# Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM

Anne-Cécile Mathé, Eric Mounier

# Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2014

Édités par

Anne-Cécile Mathé et Éric Mounier

# PRESENTATION

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de permettre la diffusion régulière de recherches, nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Moment fort de la vie de cette communauté, ce séminaire est traditionnellement organisé, deux fois par an (aux mois d'octobre/novembre et de mars), dans les locaux de l'université Paris Diderot. Si ces deux rendez-vous ont été maintenus, l'année 2014 a également été marquée par plusieurs innovations dans l'organisation matérielle et scientifique du séminaire national : l'inauguration d'un *séminaire itinérant*, la mise en ligne, tout au long de l'année, d'enregistrements vidéo du séminaire et de pré-publications des actes de chaque session et la création d'un dispositif de présentation de posters organisé avec l'équipe des jeunes chercheurs de l'ARDM.

De façon inédite en janvier 2014, le séminaire national a en effet quitté ses locaux parisiens pour les locaux historiques de l'université de Bordeaux. Cette première session de l'année 2014 a ainsi constitué la première édition d'un nouveau dispositif appelé *séminaire itinérant*. Il s'agit d'organiser une troisième session du séminaire, tous les deux ans (les années sans école d'été), dans différentes universités de France. Plus qu'une délocalisation géographique, l'idée est d'aller à la rencontre d'équipes de recherche, et de mettre en lumière des thématiques à l'œuvre dans leurs travaux passés ou actuels. Le choix de Bordeaux pour cette première édition itinérante est symboliquement fort au regard de la place de cette ville dans l'histoire de notre discipline. Guy Brousseau, Denise Greslard et Marie-Hélène Salin nous ont fait le plaisir de revenir sur l'expérience passée du COREM (Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques, école Michelet). Lalina Coulange et Caroline Bulf ont pris en charge l'organisation matérielle de ce séminaire à Bordeaux. Nous tenons à les remercier pour leur accueil convivial et chaleureux.

Depuis mars 2014, une plage de présentation de travaux en cours autour de l'affichage de posters est organisée avec l'aide de l'équipe des Jeunes Chercheurs de l'ARDM durant les sessions du séminaire. Ces présentations donnent lieu à des textes courts que vous pourrez retrouver dans ces actes. Nous remercions Raquel Barrera, Cécile Allard et Katalin Gosztonyi pour leur aide sur ce projet.

Pour permettre au plus grand nombre l'accès aux présentations de travaux en didactique des mathématiques, les présentations du séminaire, sous réserve d'un accord des intervenants, sont dorénavant filmées et mises en ligne. L'enregistrement, le montage et la mise en ligne de ces vidéos sont assurés par l'IREM de Paris. Ces vidéos sont accessibles depuis un lien sur la page « manifestations » / « séminaires nationaux » du site de l'ARDM* ou directement sur le site de l'IREM de Paris.

Enfin, les actes du séminaire national existent également en version électronique. Vous avez ainsi la possibilité d'accéder de manière plus rapide et plus pratique à une pré-publication des textes relatifs aux présentations de chaque séminaire depuis la page « séminaire national » du site de l'ARDM.

Le présent ouvrage regroupe les actes des sessions de janvier, mars et novembre 2014. Nous vous en souhaitons bonne lecture.

Anne-Cécile Mathé et Éric Mounier

Responsables du séminaire national de l'ARDM

*http://www.ardm.eu/

## SOMMAIRE

*Séminaire des 24 et 25 janvier 2014 à Bordeaux*

*Travaux en cours* ..... **1**

**Yann Lhoste, Maryse Rebière, Caroline Bulf & Lalina Coulange**

Apprentissages et langage(s) dans les disciplines d'enseignement - Exemples en Sciences de la Vie et de la Terre et en mathématiques

*Présentation de thèse* ..... **24**

**Fabien Schlosser**

Construction et fonctionnement d'espaces de travail géométriques personnels d'élèves. Cas de la géométrie synthétique dans l'espace au lycée

*Présentation de thèse* ..... **45**

**Grégory Train**

Le tableau blanc interactif : un outil pour la classe de mathématiques ?

*Revue de questions* ..... **66**

**Guy Brousseau, Denise Greslard, Marie-Hélène Salin**

L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM)

**Guy Brousseau**

Le COREM et l'étude scientifique des Situations Mathématiques et Didactiques

**Yves Matheron, Serge Quilio**

L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le dispositif des LÉA (Lieux d'Éducation Associés à l'IFÉ)

*Présentation de thèse* ..... **92**

**Karine Millon-Fauré**

Répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe. Le cas des élèves migrants

*Présentation d'Habilitation à Diriger des Recherches* ..... **108**

**Lalina Coulange**

L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques. Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves

*Présentation d'Habilitation à Diriger des Recherches* ........................................................ 109

**Cécile Ouvrier Buffet**

Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve - Étude épistémologique et enjeux didactiques

*Présentation de thèse* ........................................................................................................ 129

**Raquel Barrera**

Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation

*Présentation d'Habilitation à Diriger des Recherches* ........................................................ 145

**Maha Abboud-Blanchard**

Les enseignants de mathématiques et les technologies : pratiques, usages et formations

*Travaux en cours* .............................................................................................................. 165

**Aline Robert**

Un regard de chercheure sur son livre, écrit pour des formateurs

*Ouverture sur* .................................................................................................................. 188

**Cécile de Hosson**

Recherches en didactique de la physique : quelques enjeux d'actualité, objets et cadres

*Présentation de thèse* ........................................................................................................ 200

**Samuel Voisin**

L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA

*Session de posters* ............................................................................................................ 219

**Valérie Batteau**

Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation continue lesson study en mathématiques

**Marie-Line Gardes**

Sur les gestes de la recherche en mathématiques : éléments de comparaison entre élèves et chercheurs

**Edith Petitfour**

Étude du processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée

**Frédérick Tempier**

Des nouvelles pistes pour l'ingénierie didactique. Exemple de conception d'une ressource pour enseigner la numération à l'école primaire

## *Séminaire des 7 et 8 novembre 2014 à Paris*

*Ce séminaire a été précédé d'un colloquium organisé en partenariat avec la CFEM. La conférence de Maria Bartolini Bussi n'est pas transcrite dans les présentes actes.*

*Présentation de thèse* ........................................................................................................231

**Simon Modeste**

Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?

*Ouverture sur* ........................................................................................................253

**Thomas Morel**

*Ouverture sur* – Enseigner les mathématiques dans un domaine technique. Écoles et académies des mines au XVIIIe siècle

*Présentation d'Habilitation à Diriger des Recherches*........................................................270

**Catherine Houdement**

Au milieu du gué : entre recherche en didactique et formation des enseignants

*Présentation de thèse* ........................................................................................................272

**Marie-Line Gardes**

Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres

*Session de posters*........................................................................................................293

**Christine Del Notaro**

L'entretien clinique-critique de Piaget en toile de fond de l'interaction de connaissances dans un jeu de tâches

**Michel Deruaz et Thierry Dias**

Dyscalculie : Et si les enseignants reprenaient la main ?

**Maria Alice Gravina, Marcus Vinícius Basso, Elisabete Burigo, Márcia Meneghetti, Eliana Salin et Vandoir Stormowsky**

Le développement professionnel des enseignants de mathématiques: l'utilisation de la technologie numérique

**Dominique Laval**

Une ingénierie didactique autour de l'« algorithme de dichotomie » illustrant un enseignement de l'algorithmique en première Scientifique comme objet d'apprentissage dans un champ des mathématiques : l'analyse

**Anne Voltoni**

Duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre les mathématiques

# APPRENTISSAGES ET LANGAGE(S) DANS LES DISCIPLINES D'ENSEIGNEMENT
## *EXEMPLES EN SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE ET EN MATHEMATIQUES*

Caroline **BULF**, Lalina **COULANGE**, Yann **LHOSTE**, Maryse **REBIERE**

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux, E3D-LACES 4140

caroline.bulf@espe-aquitaine.fr, lalina.coulange@espe-aquitaine.fr,

yann.lhoste@espe-aquitaine.fr, maryse.rebiere@espe-aquitaine.fr

**Résumé**

Le projet ALANDIS a pour but d'identifier et de comprendre les rôles du langage dans les apprentissages scolaires. Il fédère une équipe de didacticiens de différentes disciplines et plusieurs institutions qui partagent un même cadre théorique concernant les relations entre langage et construction de savoirs. Le travail collaboratif, déjà amorcé, repose sur une approche innovante à la fois pluridisciplinaire et comparatiste, menée à différents niveaux de la scolarité. Ce projet vise à caractériser les différentes manières dont les élèves, en interaction avec les enseignants, mobilisent le langage pour construire des savoirs de l'école. Les travaux conduits dans chaque discipline, dans le cadre des concepts et des démarches qui leur sont propres, constituent la première étape.

À partir des corpus recueillis et de leur analyse, la démarche comparatiste cherchera à saisir le rôle que joue le langage dans les situations d'apprentissage, dans leurs fonctionnements et leurs dysfonctionnements. Nous nous proposons de réfléchir à partir d'exemples pris dans plusieurs disciplines sur les concepts, communauté discursive disciplinaire scolaire et secondarisation, développés par notre équipe.

**Mots clés**

Didactique des disciplines, langage, communauté discursive disciplinaire scolaire, secondarisation.

Le propos porte ici sur la présentation des objets d'étude d'une équipe de recherche bordelaise, E3D (Épistémologie et Didactique Des Disciplines), dont l'un des axes de recherche a pour objet le rôle du langage dans la construction des savoirs disciplinaires. En particulier, le projet ALANDIS (projet fédérateur d'équipe) a pour but d'identifier et de comprendre les rôles du langage dans les apprentissages scolaires. L'équipe est constituée de didacticiens de différentes disciplines qui partagent un même cadre théorique concernant les relations entre langage et construction de savoirs. Le travail collaboratif, déjà amorcé, repose sur une approche innovante à la fois pluridisciplinaire et comparatiste menée à différents niveaux de la scolarité. Ce projet vise à caractériser les différentes manières dont les élèves, en interaction avec les enseignants, mobilisent le langage pour construire des savoirs de l'école. À partir des corpus recueillis et de leur analyse, la démarche comparatiste cherche à saisir le rôle que joue le langage dans les situations d'apprentissage, dans leurs fonctionnements et leurs dysfonctionnements.

Notre projet a donc pour ambition d'articuler différentes didactiques disciplinaires autour de la problématique de construction des savoirs et des pratiques langagières. L'un des enjeux porte sur la mise en cohérence de différents cadres théoriques dont l'un commun à plusieurs membres de l'équipe.

Durant la communication du séminaire national de Janvier 2014 à Bordeaux, nous avons illustré notre démarche à partir de différents exemples pris dans plusieurs disciplines (Mathématiques et Sciences de la Vie et de la Terre). Nous ne développerons pas ici autant ces exemples, ces derniers sont tirés d'articles de recherche en cours de publication (Coulange, 2014) et (Bulf, Mathé, Mithalal, 2014). La recherche présentée en Sciences de la vie et de la Terre est tirée également d'une publication de recherche (Gobert et Lhoste, 2014). Aussi, cet écrit s'appuiera de façon brève et concise sur ces recherches pour exposer les ambitions théoriques de notre équipe portées dans un projet collaboratif ALANDIS (Apprentissage et LANgage dans les DISciplines d'enseignement).

## PRESENTATION D'UN CADRE THEORIQUE

Les travaux de notre équipe s'inscrivent dans un cadre théorique qui suppose de repenser le langage comme action, étroitement liée à la pensée et au contexte d'énonciation. De ce fait, il n'est pas transparent. En effet, pratique sociale, il construit des « mondes » et les objets de discours, il façonne les contenus. Aussi toute activité sociale se caractérise-t-elle par les pratiques dont les pratiques discursives qu'elle génère, croyances, valeurs, sociabilités, finalité mais aussi savoirs, dont ils constituent une composante notable. Cette conception de l'activité sociale comme *communauté discursive* a conduit notre équipe à élaborer la notion de *communauté discursive disciplinaire scolaire*, chaque discipline étant caractérisée par ses modes d'agir-parler-penser (Jaubert, Rebière, Bernié 2012).

Cette analyse importée dans le cadre vygotskien nous a amenés à repenser les apprentissages et plus particulièrement la place du langage dans la formation des concepts et à le positionner comme outil de travail, témoin et corollaire de la transformation des concepts (généralisation, mise en réseau, dénivellations...). Nos travaux reposent ainsi sur l'idée d'une co-construction des savoirs et des langages.

Trois didacticiens (deux de mathématiques et un de SVT) ont tenté, lors du séminaire, de travailler trois notions en cours d'élaboration dans notre équipe, afin d'en tester la pertinence ainsi que la qualité heuristique dans leur discipline.

Le contexte de pertinence, exploré par Lhoste dans le cadre de la didactique des SVT, nous conduit à revenir sur la notion de contexte, "des" contextes, de leur mise en tension et de celle des positions des locuteurs qui conduisent à des négociations, des réorganisation des modes d'agir, parler, penser pour construire un contexte partagé par les interlocuteurs (Professeur/élèves), propice aux apprentissages.

Bulf, Mathé et Mithalal développent, dans le cadre de la didactique des mathématiques, un modèle d'analyse innovant, celui dit des « modes de fréquentation » dans le contexte spécifique de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie. Ce modèle d'analyse renvoie aux questions, récurrentes au sein de l'équipe, en lien avec le position(-nement) énonciative(-tive). Les auteurs s'interrogent sur le travail cognitif et langagier d'inscription dans la discipline des mathématiques (comment les locuteurs réfèrent aux objets de discours et à autrui). Les "modes de fréquentation" devront, ultérieurement, être confrontés aux "postures", qui ont déjà fait l'objet d'investigation dans notre équipe (Rebière, 2000-2001) et dont on pourrait tirer des points d'ancrage.

Toujours en didactique des mathématiques, Coulange creuse la notion de secondarisation des discours, fondée sur la distinction vygotskienne concept quotidien/ concept scientifique et croisée avec l'opposition genres premiers/ genres seconds de discours, la secondarisation transformation progressive des connaissances et du langage : de formes spontanées vers des des discours signalant et informant les déplacements cognitifs.

Ces trois analyses reposent donc, tout en en creusant chacune un aspect différent, sur l'hypothèse forte de notre équipe selon laquelle les déplacements des concepts sont en lien avec la construction d'un contexte de pertinence et des positions énonciatives adaptées. Elles explorent, dans le cadre de didactiques différentes (sciences et mathématiques), trois notions développées dans l'équipe avec, à terme, une visée comparatiste. Ces notions sont-elles pertinentes, quel que soit l'objet de savoir et la discipline étudiée? Quelles reformulations, quels déplacements théoriques nécessitent-elles pour outiller une discipline donnée ?

## La question des contextes et du contexte de pertinence

Tout sujet agit en fonction de son interprétation du cadre de l'activité qu'il développe et que Brossard (1998) appelle *contexte*. Ce cadre est complexe et multiforme. En effet, il prend en compte à la fois les conditions matérielles mais aussi toutes les contraintes (philosophiques, psychologiques, politiques...) qui pèsent sur l'interlocution. Il en est du travail scolaire comme de toute activité : l'élève s'organise en fonction de la reconstruction subjective qu'il élabore des contraintes qui pèsent sur l'apprentissage, contraintes scolaires, contraintes familiales, avenir social... mais aussi en fonction de son rapport à l'école, et au savoir en jeu. Or ce savoir, produit culturel, est porteur des travaux antérieurs, croyances, théories qui ont présidé à son élaboration et qui dessinent un contexte socio-historique. Ainsi le contexte scolaire est composé de tous les contextes individuels (maître/élèves), orienté par les savoirs, valeurs, outils, pratiques disciplinaires en jeu. L'apprentissage suppose la mise en tension de ces différents contextes individuels et la construction d'un contexte partagé qui rend possible la mise en fonctionnement des outils culturels et donc la négociation des savoirs, des pratiques et des énoncés. C'est ce nouveau contexte que nous appelons, avec M. Brossard, le *contexte de pertinence*.

## La secondarisation des discours

Dans ce cadre, apprendre c'est élaborer et s'inscrire dans ce nouveau contexte, qui génère réorganisation et transformation des connaissances. Nous appelons *secondarisation* des discours la transformation des genres premiers de discours (Bakhtine 1984), liés à l'action, qui permettent de gérer dans l'immédiateté les interactions de la vie quotidienne, en genres seconds, plus élaborés qui permettent de gérer les échanges culturels et supposent mise à distance et généralisation. Ce mouvement discursif est indissociable de la transformation des modes d'agir et de penser dans une discipline. Dans l'optique du lien étroit que nous établissons entre opérations langagières et opérations cognitives, il accompagne, témoigne, rend possibles les réorganisations cognitives successives vers le contexte de savoir visé par l'enseignant. La secondarisation est ainsi un outil d'analyse de l'inscription du sujet dans la communauté discursive disciplinaire intentée par l'enseignant.

## Le positionnement énonciatif

Tout discours produit dans un champ de l'activité humaine a un impact sur l'énonciation elle-même. Le locuteur, en effet, met en œuvre les modes de parler qu'il juge pertinents et construit ainsi, au fil des discours, ce que les linguistes appellent une "position énonciative". Le positionnement énonciatif est donc fortement contextualisé. Cependant des schèmes d'activité langagière peuvent être partiellement automatisés, ce que désigne la *posture*, d'origine sociologique (Bernstein 1971,1975). Alors que la circulation sur plusieurs positions énonciatives s'avère nécessaire aux apprentissages, la mise en œuvre systématique d'une posture due à une analyse erronée de l'articulation action-activité, et/ou relevant de pratiques sociales de référence en rupture avec les attentes scolaires pour un contexte donné, peuvent alors être source de malentendus et d'obstacle aux apprentissages.

## UN PREMIER EXEMPLE EN SVT : L'ELABORATION D'UN CONTEXTE DE PERTINENCE

Nos travaux récents (Gobert et Lhoste, 2014 ; Lhoste, 2014) nous ont conduit à élaborer une construction théorique et méthodologique pour préciser la signification d'un apprentissage des SVT par problématisation, ce que permet la centration que nous développons sur l'étude fine des pratiques langagières de l'enseignant et des élèves (Lhoste, 2006 ; Lhoste, Boiron, Jaubert, Orange et Rebière, 2011). Nous cherchons donc à articuler le cadre théorique de la problématisation auquel cette dernière emprunte les concepts et les outils et le cadre historico-culturel d'origine vygotskienne et développé à l'université de Bordeaux par M. Brossard et ses continuateurs, membres de l'équipe *Épistémologie et didactique des disciplines* du LACES à laquelle nous appartenons (J.-P. Bernié, M. Jaubert, M. Rebière, P. Schneeberger). Nous mobilisons donc certaines modélisations du savoir scientifique issues des travaux ancrés dans le cadre théorique de la problématisation (Orange 2002). Nous retenons de ces modélisations que le processus de problématisation est toujours un processus situé au sein de ce que nous appellerons un *contexte problématique* à la suite de M. Meyer (1979). Nous développons la thèse selon laquelle la notion de *contexte* est un candidat sérieux à même d'assurer l'articulation avec la théorie historico-culturelle des apprentissages scolaires. En effet, l'approche historico-culturelle développée par Vygostki propose d'envisager les processus d'apprentissage comme l'appropriation par les élèves d'outils culturels qui permettent de transformer « les fonctions élémentaires et ouvre ainsi la voie au développement culturel » (Brossard, 2004, p. 31). Dans cette perspective, l'apprentissage et le développement de l'élève sont des processus doublement situés :

> pour comprendre le développement de l'enfant, il ne faut l'extraire, ni des contextes socio-historiques – qui mettent à sa disposition les outils culturels – ni des contextes intersubjectifs à l'intérieur desquels avec l'aide de l'autre, il apprend à les mettre en œuvre (ibid., p. 39).

Ainsi l'apprentissage de concepts de SVT peut être envisagé comme la construction d'un *contexte* ajusté aux savoirs que l'enseignant souhaite faire apprendre à ses élèves, ce que Michel Brossard nomme le *contexte de pertinence*. Les différents concepts et outils développés par l'équipe de Bordeaux (communauté discursive scientifique scolaire, secondarisation, hétéroglossie, positionnement énonciatif) sont mobilisés pour nous permettre de comprendre les transformations successives subies par le contexte dans des situations d'enseignement-apprentissage.

Dans cette partie, nous proposons de présenter l'analyse de l'évolution du contexte de pertinence dans le cadre d'un travail sur la construction du concept de sélection naturelle par une dyade d'élèves de troisième en interaction avec une enseignante (Gobert & Lhoste, 2014). Dans un premier temps, nous allons présenter très rapidement un contexte socio-historique du concept de sélection naturelle. Il est issu d'une reconstruction rationnelle du concept de sélection naturelle (Gobert, 2014).

## Un contexte socio-historique du concept de sélection naturelle

Les analyses épistémologiques menées sur le concept de sélection naturelle (Conry, 1987 ; Gayon, 1992), nous permettent d'expliciter le contexte socio-historique du concept de sélection naturelle. Nous positionnons ce concept au nœud d'articulation de trois mondes : celui de la génétique mendélienne, celui de la causalité darwinienne et celui de la pensée populationnelle probabiliste. La figure 1 rend compte de ce contexte de pertinence relatif au néodarwinisme ou au champ de la génétique des populations. Nous aurions pu proposer une autre reconstruction si nous nous étions intéressés à la théorie hiérarchique de l'évolution (Gould). Cette délimitation est liée aux programmes de troisième qui demandent d'articuler génétique et évolution ce qui relève, au vu des savoirs en jeu à ce niveau de classe, d'une approche ancrée dans un cadre néo-darwinien. L'évolution du contexte de pertinence que nous allons conduire dans l'analyse didactique, entendue à la fois dans sa dimension normative et comme outil que l'enseignant et les élèves seront en mesure de mobiliser, se fera en référence à ce contexte socio-historique.

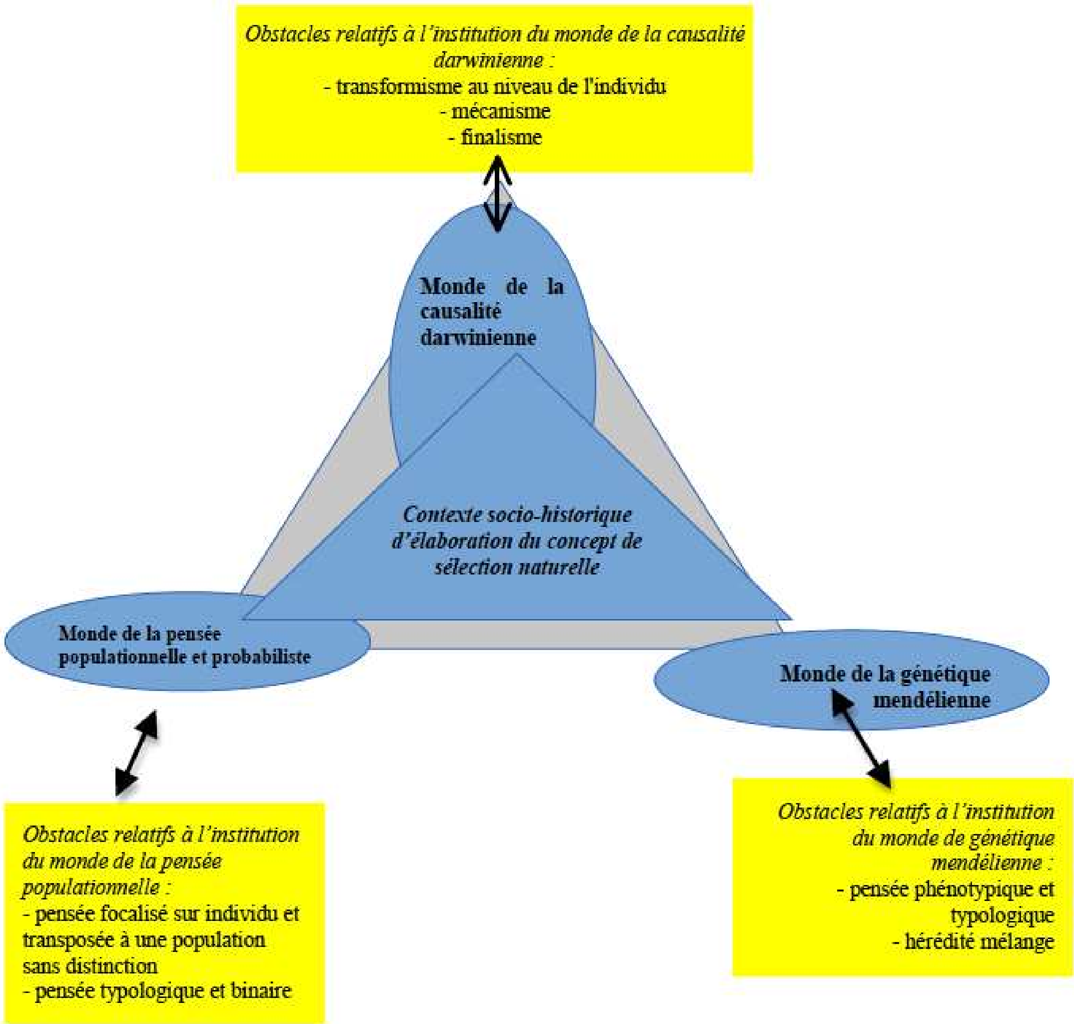



*Figure 1. Le contexte socio-historique du concept de sélection naturelle (Gobert 2014)*

## Corpus et méthodologie d'analyse des transformations du contexte de pertinence

Le corpus de données, support de l'analyse, est extrait d'une séquence d'enseignement-apprentissage (4 séances) qui vise la reconstruction par les élèves du concept de sélection naturelle dans une classe de troisième. Cette séquence a été co-construite par l'enseignante et l'équipe de recherche. Les données ont été recueillies lors de la troisième séance qui demande aux élèves de « proposer une explication aux variations de la fréquence des formes sombres et claires dans les populations de phalènes entre 1830 et 1950 » à partir d'un ensemble de documents. La séance ménage un travail en petits groupes qui a été enregistré en audio puis retranscrit. C'est le verbatim de ce travail en dyade avec des interventions de l'enseignant qui constitue notre corpus pour cette étude.

Nous avons réalisé une analyse mésoscopique de cette séance par l'identification des problèmes travaillés par les élèves et des modèles explicatifs qu'ils construisent en lien avec ces problèmes, ce qui nous a permis de découper le verbatim en 5 épisodes.

Pour chacun des épisodes, nous avons ensuite procédé à une analyse microscopique des interactions professeur-élève-élève-chercheur. L'analyse des interactions langagières sera conduite à partir de trois entrées :

- la construction, l'évolution, la transformation des objets du discours, à partir des outils présentés par Jaubert et Rebière (2000, 2001) adaptés des travaux de Grize (1996) ;
- les mécanismes de prise en charge énonciative (Rebière, 2000) ;
- la nature des questionnements relatifs aux objets du discours qui seront caractérisés du point de vue de l'activité de problématisation (Lhoste et Peterfalvi, 2009 ; Orange 2012).

C'est à partir de l'articulation de ces différentes dimensions de l'analyse que nous pourrons proposer des interprétations en termes de contexte de pertinence et de ses transformations (ou non) dans le temps de l'interaction.

## L'analyse en termes de contexte de pertinence du dernier épisode du travail de la dyade

Au cours des premiers épisodes (1-172), les élèves mettent au travail principalement deux problèmes :

- *Problème 1 :* Comment et pourquoi un papillon blanc se transforme en papillon noir ?

Problème 1 – réponse 1 : le modèle du dépôt

| | |
|---|---|
| 4 | Louise : ou alors, nan, ou alors, y'a le charbon, comme y'a le charbon, comme les résidus de combustion noircissent les arbres…quand ils se mettent sur le... le truc de l'arbre ça va sur eux. |
| 8 | Louise : Ben non ! Ils sont sur l'arbre et ça se dépose sur eux et ils deviennent tout noirs. C'est comme euh…je sais pas |
| 11 | Christal : Ouh… le charbon ça va rentrer dans ta peau ça devient noir |
| 23 | Louise : non, je te dis que c'est à cause que le charbon se met dessus |

Problème 1 – réponse 2 : le modèle de l'induction

| | |
|---|---|
| 3 | Christal : C'est bien ce que je te dis là. Donc toi tu dis que c'est à cause parce qu'ils mangent les troncs d'arbres *plein de* charbon là et moi je dis : c'est pour se cacher |
| 10 | Louise : ben non, ça peut rentrer hein ? |
| 25 | Louise : Mais c'est bizarre, ou alors ils mangeraient...mais c'est bizarre..ils mangeraient |
| 27 | Louise : des trucs sur l'arbre qui ferait que le charbon rentrerait à l'intérieur |

- *Problème 2 :* Quels sont les liens entre le changement de l'environnement et les modifications de l'information génétique de l'individu ?

| | |
|---|---|
| 41 | Louise : Il a bien du avaler quelque chose, quelque chose qui est rentré dans son corps pour que... l'information se...se change..enfin se transforme |
| 128 | Christal : ben sinon c'est le charbon qu'est passé dans une cellule qu'est allé jusqu'à l'IG et qu'a bouleversé quelque chose |
| 129 | Louise ouais y'a un changement y'a un changement et y'a eu quelque chose qui est rentré,enfin rentré entre parenthèse, dans le papillon et qui a fait euh... qui a fait que l'IG s'est transformée ! |

Les élèves entrent dans la tâche à partir du monde quotidien (modèle du dépôt, mise en histoire, transformisme et mutations adaptatatives (Lhoste, 2008). Les indices contenus dans la situation-problème ne font directement sens pour les élèves. Les élèves, comme Lamarck en son temps (Le Guyader, 2012, p. 191), sont à la recherche de la causalité de la variation des caractères. Le contexte de travail est donc très éloigné du contexte socio-historique de référence. Pour permettre de déplacer l'activité des élèves et les amener à s'inscrire progressivement dans un contexte pertinent, l'enseignant devra aider les élèves à déplacer leurs points de vue sur la situation. Au niveau mésoscopique, l'épisode 173-206 peut être interprété dans ce sens. L'enseignante propose une solution pour expliquer la transformation de l'information génétique des papillons : elle est due à une mutation aléatoire. Cette intervention ferme le problème 2 travaillé par les élèves des liens entre changement de l'environnement (CE) et modification de l'information génétique (MIG) du papillon : il n'y a pas de relation causale entre CE et MIG. En faisant cela, l'enseignante met à disposition des élèves des outils issus du monde de la pensée populationnelle et probabiliste et du monde de la génétique mendélienne, ce qui « ferme » les problèmes travaillés jusque-là.

***Une situation-problème éloignée des possibilités des élèves***

Le début du troisième épisode est marqué par une tentative de l'enseignante d'installer le problème travaillé dans le contexte socio-historique du concept de sélection naturelle (205, 207, 209, 211). En effet, les élèves ancrent leur activité dans un autre contexte, celui d'une approche phénotypique. Alors que l'enseignante questionne en 209 et 211 sur le problème de l'évolution de la population de papillons par rapport au milieu (« dans quelles conditions d'environnement », « qu'est-ce qui se passe entre 1848 et 1950 ? »), Louise répond sur les raisons du changement d'environnement (en 211 : « ben l'industrie du charbon ») et reprend en 213, de manière diachronique, son modèle de l'induction *« ça les bouleverse d'autant plus que ces molécules chimiques »*. Cette intervention est dissonante du point de vue du problème et des objets de discours de l'enseignante. La signification attribuée aux indices de la situation-problème n'est pas accessible tel quelle aux élèves à ce moment-là de la séance, ce qui signale l'écart entre le contexte dans lequel se situe l'enseignante et le contexte dans lequel interagissent les élèves, écart déjà évoqué à la section précédente.

***Une concession de l'enseignante pour reprendre l'interaction***

L'intervention 212 (212-Prof : «l'industrie du charbon/Alors qu'est-ce que ça a comme cons // qu'est-ce que ça leur fait l'industrie du charbon aux papillons à votre avis/ ») peut apparaître comme une concession de l'enseignante. Cette concession permet la reprise des échanges dialogiques avec les élèves, par la prise en compte de leur point de vue, même si le contexte de pertinence construit s'éloigne du contexte socio-historique du concept de sélection naturelle.

Ce déplacement conduit à une modification du niveau d'organisation de l'objet de discours. L'enseignante accepte de travailler à un niveau phénotypique. Cependant, ce changement de point de vue permet de remettre au travail la relation milieu-vivant d'un point de vue historique et/ou fonctionnel. Même si ce déplacement est dissonant par rapport aux premières interventions de l'enseignante, il permet la construction d'un contexte de pertinence qui va permettre l'intercompréhension. Nous notons d'ailleurs une stabilité de ce contexte de pertinence entre les interventions 213-230. Les élèves y travaillent la mise en relation entre les papillons (proies) et les oiseaux (prédateurs) dont les rapports sont relatifs à la couleur des arbres. La difficulté rencontrée par les élèves réside dans la prise en charge de la relativité des rapports vivants-milieu pour construire l'idée de prédation différentielle qui nécessite l'ancrage du contexte de pertinence dans une pensée populationnelle. Sur une autre thématique, celle du développement embryonnaire, nous avions également montré l'importance des rapports vivants-milieu pour l'ancrage des raisonnements des élèves dans une causalité darwinienne.

***Le déplacement du contexte de pertinence dans le monde de la pensée populationnelle par la mobilisation de différents obstacles (dont l'obstacle de la pensée typologique)***

L'extrait ci-dessous correspond à un déplacement déterminant du contexte de pertinence dans le monde de la pensée populationnelle puisqu'il correspond au changement de cadre épistémique majeur pour construire le concept de sélection naturelle. En effet, comme le rappelle de Ricqlés, « les individus n'évoluent pas, l'évolution est une propriété des populations » (de Ricqlès, 2010, p. 35).

| | |
|---|---|
| 218- Prof | dans leur condition de vie y'a quoi par rapport aux papillons // qu'est-ce qui peut leur arriver |
| 219-Louise | ils peuvent se faire manger |
| 220-Prof | se faire manger // alors **imagine que t'es un oiseau toi** / si t'es en 1830 / t'es confrontée à ça // vous les voyez les papillons sur l'image / y'en a combien |
| 221-Louise | Un |
| 222-Prof | ah ben non |
| 223-Christal | y'en a deux |
| 224-Prof | y'en a un noir là et un blanc là |
| 225-Louise | Ah oui, ah oui |
| 226-Prof | Et là y'en a un blanc là et un noir là // **donc toi t'es un papillon en 1830** / t'as ça dans ton environnement / si t'es un papillon en 1950 / t'as ça |

En 220, l'enseignante invite les élèves à s'identifier à un papillon à deux dates différentes de l'histoire (référence aux documents : 1830 et 1950). L'enseignante propose aux élèves d'adopter, pour regarder la situation à ces deux périodes, le point de vue d'un « oiseau ». Cela permet aux élèves de regarder autrement la situation « papillon-milieu de vie » et de les amener à se saisir de la dimension populationnelle du problème. En effet, l'oiseau voit non pas un papillon, mais une population de papillons (avec une diversité phénotypique) sur le tronc du bouleau. L'interprétation que nous faisons de cette intervention, qui peut poser des questions du point de vue de la représentation de l'éthologie qu'elle donne à voir, est la suivante : il nous semble que cette interventions permet de faire jouer la fonction aide de certains obstacles (pensée typologique déplacée des papillons à l'oiseau, mise en histoire et anthropocentrisme : *« imagine que t'es un oiseau toi »* sous-entendu : *« tu vas faire quoi »*) et qu'elle facilite un changement de point de vue des élèves. Du point de vue didactique, cette intervention permettrait de contrer les mêmes obstacles qui jouaient jusque-là en empêchant le passage à une pensée populationnelle.

En 226, nous avons identifié un phénomène similaire (*« donc toi t'es un papillon »* ; *« si t'es un papillon »*) qui engage également à un changement de point vue. Nous pouvons voir en quoi ces interventions de l'enseignante semblent aider les élèves à reconstruire l'« environnement » changeant des papillons qui peuvent être sombres ou clairs. Simultanément l'enseignante signale la dimension historique du problème travaillé (« en 1830… en 1950… »). Nous l'interprétons comme un processus de décontextualisation/recontextualisation : passage des images des papillons sur les troncs à la situation-problème initialement proposée (l'évolution de la population de phalène). Nous pensons que l'enseignante permet ainsi aux élèves de s'engager dans la construction de la nécessité d'une évolution de la prédation différentielle au cours du temps, c'est-à-dire des rapports changeants milieu/vivant au regard des différents phénotypes de papillons. Elle pointe les objets à prendre en compte (« T'as ça…t'as ça… »), même s'ils restent non explicitement formulés par l'enseignante. Ce défaut d'explicitation permet aux élèves de développer un discours populationnel et donc différentiel. Elle pointe les objets pertinents à prendre en compte mais ne les désigne pas verbalement. En ce sens, nous pouvons interpréter cet épisode comme une spécification de l’horizon d’attente de l’enseignante ancré dans un contexte de pertinence en lien avec le monde de la pensée populationnelle.

***Le contexte de pertinence ancré de façon stable dans le monde de la pensée populationnelle***

Les interventions des élèves, en particulier de Louise en 230 (*« et du coup ils se cachent, enfin ils sont pas vus par les oiseaux et du coup ils restent en vie plus »*), témoigne de l’efficience du changement de point de vue. En effet, Louise produit une explication qui se situe au niveau populationnel (aussi bien pour *« les papillons »* que pour *« les oiseaux »*), même si la question de l’évolution de la population dans le temps ne sera prise en compte que plus tard.

Il nous semble pouvoir dire que le déplacement et l’ancrage du contexte de pertinence dans le monde de la pensée populationnelle est réalisé puisque les échanges prof-élèves jusqu’à la fin de cet épisode sont situés dans le monde de la pensée populationnelle. Louise en 247 explicite même ce qui a permis, dans les interventions de l’enseignante, déplacement du contexte de pertinence *(« oui parce que Me. Decussy nous a aidées // et donc enfin elle nous a aidée parce qu'elle nous a fait style qu'on était des oiseaux »*).

Pour finir, analysons la dernière intervention de cet épisode.

| | |
|---|---|
| 251-Louise | donc ce qui fait que / comme les oiseaux mangent les blancs // y'a de moins en moins de blancs puisqu'ils ne peuvent plus se reproduire / et donc les noirs vont se reproduire avec les blancs // sachant que l'allèle F est dominant sur l'allèle C et ben va y'avoir plus de noir qui vont |

Cette intervention atteste de la construction d’une causalité de l’évolution des fréquences phénotypiques dans la population de papillons liée à la reproduction différentielle, par l’intermédiaire de la prédation différentielle. La reproduction différentielle incorpore le temps long de la succession des générations, là où la prédation différentielle portait sur une population à un moment donné. La tentative d’articulation entre l’approche phénotypique et l’approche génotypique est plus difficile à interpréter. Nous pouvons y voir une tentative pour déplacer le raisonnement causal de l’évolution des fréquences phénotypiques aux évolutions des fréquences alléliques dans la population papillons (*« sachant que… »*), sans être en mesure d’affirmer que ce déplacement du contexte de pertinence soit réellement attesté, l’objet du discours restant à un niveau phénotypique (*« va y avoir plus de noirs »*).Discussion et conclusion

Avant de discuter des limites de cette étude et des perspectives de recherche qu’elle ouvre, nous souhaitons reprendre quelques-uns de ces apports.

Nous avons tenté de rendre compte d’un moment de travail en classe à partir d’une situation-problème co-construite entre l’équipe de recherche et l’enseignante, du point de vue de la construction d’un contexte de pertinence et de ses transformations successives dans le temps de l’interaction. Nous situons ainsi ce travail dans le champ de la didactique de SVT, dans le prolongement des propositions de M. Brossard et plus généralement de l’analyse didactique d’une situation d’enseignement-apprentissage dans le cadre de la théorie historico-culturelle (Brossard 2001).

Nous pensons avoir mis en évidence certaines conditions de l’efficience d’une situation-problème. Pour que les indices de la situation-problème fassent sens pour les élèves, il est nécessaire que l’enseignant les accompagne dans la construction d’un contexte qui se rapproche du contexte socio-historique qui a servi de référence à la construction de la situation-problème. Cela pourrait permettre de proposer une nouvelle façon de rendre compte du processus de dévolution du problème, ou de position du problème, dont nous avons montré, par ailleurs, l’importance dans les séquences d’enseignement-apprentissage (Lhoste, Peterfalvi et Schneeberger, 2010). Nous pensons également avoir montré que pour provoquer des bougés du contexte, c'est bien l'ensemble des éléments qui le constituent qui doivent être déplacés. Dans cette étude, les élèves adoptent d'emblée les façons de parler spécifiques des communautés scientifiques, ce qui témoigne de la *« la culture de la classe telle qu'elle a été construite au long cours par l'enseignante »* (Vinatier, 2013, p. 108). Cependant, tant que les objets du discours et les raisonnements ne relèvent pas du monde scientifique, ce positionnement énonciatif pertinent n'impacte pas les apprentissages.

Enfin, à la suite d'autres résultats de recherche produit par notre équipe (Schneeberger, Robisson, Liger-Martin et Darley, 2007), nous avons mis en évidence le rôle déterminant des interventions de l'enseignante dans les processus d'apprentissage des élèves. En effet, l'enseignant doit réguler ses interventions de manière à maintenir une zone d'intercompréhension, nécessaire aux déplacements du contexte de pertinence. Dans notre étude, nous interprétons certaines interventions de l'enseignante comme signalant la mise au travail d'un problème relativement éloigné (du point de vue épistémologique) de celui porté par la situation problème. D'autres interventions ont été interprétées par rapport à ce qu'elles permettent aux élèves de construire comme nouvelles manières de considérer les objets du discours, de les questionner, autant de moyens qui induisent le déplacement du contexte de pertinence. Nous pensons avoir mis en évidence comment certaines façons de faire de l'enseignante (qui pourraient être critiquables d'un seul point de vue normatif) permet de mobiliser certains obstacles pour mieux les mettre au travail par les élèves. Même si nous ne nous sommes pas intéressés dans cette étude aux pratiques enseignantes et à leur détermination épistémologique, nous pensons que ces manières de faire pourraient être mises en relation avec le travail d'analyse didactique fine conduite lors de la construction de la situation-problème avec l'équipe de recherche, incluant une identification préalable des obstacles.

Du point de vue des limites de cette étude, elles sont nombreuses : étude d'une seule dyade d'élèves, interventions ponctuelles de l'enseignante, situation expérimentale co-construite entre l'enseignante et l'équipe de recherche, spécificité de notre espace à quatre dimensions, ensemble d'objections qui singularise notre recherche et limite la portée et la généralité de nos résultats. Mais en même temps, l'ensemble de ces objections ouvre de nouvelles perspectives de recherche et pourrait nous conduire à réinterroger, d'un nouveau point de vue, certains concepts classiques de la didactique des SVT (situation-problème, obstacles, dévolution/institutionnalisation, problématisation, gestes professionnels).

## UN DEUXIEME EXEMPLE EN MATHEMATIQUES : INSTITUTIONNALISATION ET SECONDARISATION L'INSTITUTIONNALISATION DES SAVOIRS ET LA SECONDARISATION DES DISCOURS

Nous conduisons des travaux sur la construction des inégalités scolaires depuis plusieurs années dans le cadre du réseau RESEIDA (Coulange, 2011 ; Coulange et Rochex 2013). À l'instar d'autres chercheurs en didactique des mathématiques dont les travaux sont centrés sur les élèves en difficulté (Perrin-Glorian, 1997; Butlen, Peltier et Pézard, 2002 ; Margolinas et Laparra, 2011), nous nous intéressons aux processus de dévolution et d'institutionnalisation dans l'ordinaire des pratiques d'enseignement.

L'institutionnalisation des savoirs retient particulièrement notre attention. Suite à l'étude de ce que nous considérons comme des dysfonctionnements de l'institutionnalisation dans des classes ordinaires, nous considérons que ce processus comprend une part d'incertitude aussi importante que celle plus classiquement considérée au sujet de la dévolution. Ceci nous conduit à formuler un paradoxe symétrique (et complémentaire) à celui souvent énoncé pour la dévolution : Comment le maître obtient-il ce qu'il veut mais qu'il ne peut pas dire ? (Coulange, 2012). Le travail langagier du maître est essentiel dans la gestion de l'incertitude du processus d'institutionnalisation. Notamment, il est à même de donner plus ou moins de visibilité aux savoirs comme éléments de contexte de la situation didactique (et par là-même, d'ailleurs d'orienter de façon plus ou moins pertinente de la situation) (Coulange, 2012 ; Bosch et Perrin, 2013).

Afin d'étudier plus avant le rôle des pratiques langagières (du maître et des élèves) dans l'institutionnalisation, nous utilisons la notion de « secondarisation » des genres de discours. Comme rappelé dans la première partie, en référence aux travaux de Bakhtine sur des genres premier et second de discours (Bakhtine 1984), cette notion vise à considérer les transformations inhérentes à l'élaboration d'un nouveau genre de discours, spécifique du champ disciplinaire (Jaubert, Rebière et Bernié, 2012). La secondarisation des genres de discours sous-entend des transformations de contextes interprétatifs (Gobert, 2013). La pluralité des contextes spontanément convoqués par les élèves et par le professeur se traduit par une hétéroglossie inhérente à toute communauté discursive, qu'il s'agit d'orchestrer (Jaubert, 2007). Ces transformations de contextes et d'objets de discours passent par des déplacements de positionnements énonciatifs des élèves (Jaubert *et al.*. 2012 ; Rebière, 2013). Ces déplacements, transformations, et mises en œuvre de pratiques langagières contribuent potentiellement plus ou moins à la secondarisation des genres de discours et par là même à l'institution d'une communauté discursive scolaire pertinente (Jaubert, Rebière et Bernié,. 2004).

## Une étude de cas : une situation d'enseignement de la géométrie à l'école

Pour illustrer la façon dont nous utilisons les notions d'institutionnalisation et de secondarisation, nous allons chercher à l'illustrer en nous appuyant sur une étude de cas, correspondant à une situation d'enseignement ordinaire de la géométrie dans une classe de CM2 considérée comme socialement hétérogène (Rochex et Crinon, 2011).

L'objet de cette situation est d'institutionnaliser des savoirs géométriques en lien avec une situation de communication installée au préalable. Les deux modèles qui ont servi de support à cette activité de description et de reproduction de figures sont reproduits à une autre échelle ci-dessous (sur chaque figure, le côté du « grand » carré à l'intérieur duquel sont inscrites les sous-figures a pour longueur 5 cm).

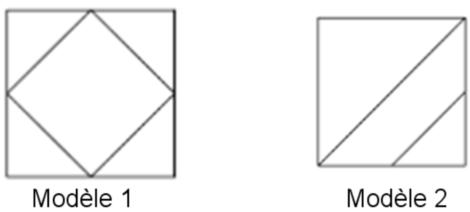



*Figure 2. Figures de la situation de communication*

Nous avons effectué des analyses *a priori* et *a posteriori* de la situation de communication ainsi mise en œuvre dans la classe de la maîtresse surnommée E, que nous ne détaillons pas ici (Coulange, 2014 à paraître). Lors de la séance qui suit la mise en œuvre de cette situation de communication, l'enseignante cherche à institutionnaliser les savoirs géométriques mis en jeu dans l'activité de description et de reproduction des figures données. Elle gère la production collective d'une fiche reproduite ci-dessous.

| A la place de ... | ... on peut dire | définition |
|---|---|---|
| Un coin | Un sommet | Point où se rencontrent 2 côtés d'un carré |
| La ligne de droite | Un côté | Segment délimité par 2 sommets |
| Un carré en forme de losange | Un carré sur la pointe | Un carré a 4 angles droits<br>Un losange n'a pas d'angles droits |
| Fais une marque | Place un point | |
| Une diagonale parallèle à l'autre diagonale | Segment parallèle à la diagonale | Segment qui joint deux sommets opposés |
| Une rayure | Un segment | Droite limitée par 2 points |

*Figure 3. Fiche « Vocabulaire sur le carré »*

La fiche ainsi élaborée révèle le projet didactique local de l'enseignante de repartir des formulations imparfaites produites par les élèves (citées pour une part dans la première colonne à gauche), pour produire un écrit conforme (dans la colonne centrale), tout en livrant les « définitions » correspondantes. Le contenu de cet écrit *stricto sensu* pourrait être objet d'étude ; mais nous allons nous attarder sur l'analyse des interactions collectives et orales entre la maîtresse et ses élèves lors de la production de cette fiche, à même d'illustrer des phénomènes langagiers spécifiques de l'institutionnalisation des savoirs géométriques en jeu.

La maîtresse commence par axer le déroulement sur la reformulation de l'expression « un coin » utilisée par certains élèves pour qualifier les sommets de la sous-figure carrée dans leur description du premier modèle. La maîtresse tente d'introduire le concept de sommet, qui renvoie *a priori* à l'identification des points caractéristiques de cette sous-figure comme coïncidant avec d'autres points, les milieux des côtés du premier carré tracé.

> Ayoub : le bout euh sur un angle droit/ou euh un//un sommet c'est celui qui est plutôt en haut [mime]/il est pointu
>
> E. [à Elève]: ouais mais enfin ça c'est pas très/c'est pas très euh
>
> Ivan : bah c'est c'est/c'est maîtresse [lève le doigt]/c'est le bout de/de deux droites qui s(e) coupent [mime]
>
> E. [à Ivan]: c'est le bout de deux droites.
>
> Ivan : deux droites qui coupent et qui font un/un angle droit/des angles droits (…)
>
> E. [à tous]: y a la notion d'angle / d'angles droit [à Florentin] attends/alors on/attends Florentin là j(e) te coupe mais on est dans le carré hein/c'est le vocabulaire du carré/alors on va le mettre un/c'est le carré [écrit LE CARRE au-dessus de la colonne où elle a écrit sommet]/pa(r)c(e) que c'est pas obligé que là ce soit un angle droit.
>
> E. [à Florentin]: mais tu as raison/il a raison/si ça n'était pas un carré [à tous] par exemple dans un triangle [trace un triangle en dessous des deux feuilles A4]/est-c(e) qu'i(l) y a des sommets ? (Elèves : non Elèves : oui).

L'étude de l'extrait de transcription cité montre que lorsque l'enseignante incite les élèves à reformuler le mot « coin » en « sommet », un premier élève donne une signification au mot « sommet » comme étant « en haut », « pointu » ancrée dans un monde quotidien, invalidée par l’enseignante. Toutefois plusieurs élèves évoquent ensuite spontanément les angles du carré en faisant sans doute référence aux angles droits qu’ils identifient comme caractéristiques du carré. À la suite de leurs interventions, la maîtresse évoque la figure du triangle. Le déplacement de contexte interprétatif ainsi suggéré peut correspondre à une tentative de déstabilisation du point de vue initialement adopté par les élèves qui se focalisent sur les angles droits du carré, ou à une volonté de décontextualiser le concept de sommet (en passant du contexte général du carré au triangle). Mais cette intervention brouille la référence faite au contexte de la situation d’enseignement qui a précédé. L’enseignante demande ensuite aux élèves de rechercher la définition du mot « sommet » dans le dictionnaire, ce qui contribue à externaliser le concept sous-jacent, c’est-à-dire à l’éloigner des éléments de contexte de la situation de description et de reproduction du premier modèle dont elle semblait pourtant vouloir partir. L’étude des interactions collectives entre la maîtresse et ses élèves révèle un phénomène que nous qualifions de brouillage des contextes interprétatifs. Au fur et à mesure des échanges on s’éloigne des éléments de contexte de la situation de communication à même de faire émerger des apprentissages relatifs à la notion de sommet.

Les objets de discours sont multiples : ils restent parfois premiers (par exemple quand l’élève nommé Ayoub parle d’un sommet « plutôt en haut » et « pointu ») ou renvoient à divers univers de savoirs (le « sommet d’une montagne », le « sommet d’un solide ») liés aux définitions trouvées dans le dictionnaire. Les positionnements énonciatifs des élèves qui en résultent sont fortement différenciés. Si certains élèves continuent à donner une signification première au mot « sommet » ou à parler d’angles « au milieu des côtés » du premier carré, un des meilleurs élève de cette classe se retrouve dans une posture d’archi-énonciateur au sens de Rabatel (2004) quand après avoir interrogé l’enseignante de manière récurrente, il semble se saisir de distinction à opérer entre le sommet d’un solide (en se référant à la définition trouvée dans le dictionnaire) et le sommet d’un carré.

Dans le cas présent, il est intéressant de pointer une spécificité des pratiques langagières mathématiques à même d’éclairer l’origine des difficultés rencontrées par l’enseignante et ses élèves dans l’institutionnalisation des savoirs visés. En effet, on trouve dans le registre verbal utilisé en géométrie plane, plusieurs dénominations du « point » (sommet, centre, extrémité, milieu) qui indiquent les relations de cet objet de dimension 0 avec des objets de dimensions 1 ou 2 (Duval 2005) mais qui peuvent de fait contribuer à masquer l’objet « point », en l’absence d’un contexte de pertinence. Par exemple ici, de quels moyens les élèves disposent pour percevoir que ce qui va discriminer l’usage du mot « angle » au profit de l’emploi du mot « sommet » est lié au fait que la relation entre les deux sous-figures renvoient aux points communs entre ces figures (sommets de l’une et milieux de l’autre) ? On peut faire l’hypothèse que cette spécificité peut faire obstacle à la secondarisation des pratiques langagières en géométrie.

Le phénomène de brouillage de contextes interprétatifs décrit ci-avant est donné à voir à plusieurs reprises à l’occasion de la séance observée. Ainsi la première définition retenue pour la diagonale par la maîtresse (toujours en référence au dictionnaire) renvoie à la notion de droite alors que dans le contexte donné, et plus généralement dans celui correspondant à l’univers de savoirs fréquentés par des élèves de l’école primaire, il s’agit d’un segment. Lors de l’épisode correspondant, la multiplicité des objets de discours concernant les « sommets opposés » alors évoqués par la maîtresse, dans les reformulations produites par les élèves est d’ailleurs frappante. Ces derniers parlent du « nord à l’opposé du sud », de « Paris Marseille », etc. Notons que, se référant ici à un autre univers de savoir que celui des mathématiques (celui de la géographie), les élèves semblent dès lors orienter la figure considérée dans un espace donné. Des indicateurs langagiers liés au repérage dans un espace orienté (nord/sud, haut/bas, à gauche / à droite, etc) sont récurrents dans les interventions des élèves (qui disent « en haut / bas », « à gauche / droite » pour décrire les figures données). Les pratiques d’orientation spatiales sous-jacentes nous semblent pourtant à même de constituer des obstacles didactiques pour l'apprentissage de la géométrie plane. En effet, pour commencer appréhender la notion de figure en géométrie, il s'agit de considérer les propriétés géométriques de la (ou des) figure(s) ce qui nécessite précisément de dépasser une vision orientée du dessin géométrique.

Considérons à ce sujet ce qui se produit lorsque l'enseignante interroge les élèves au sujet de la reformulation de l'écrit *un carré en forme de losange* (visant à désigner le carré dont les sommets correspondent aux milieux du « grand carré » dans le premier modèle), présent dans les productions de plusieurs binômes.

> E. [à tous]: alors on ne va pas dire un carré en forme de losange/qu'est-c(e) qu'on va dire
>
> Elève: un carré sur […]
>
> E. : sur la pointe (…) [à tous]: regardez si j(e) le mets comme ça [met modèle 1, penché, au tableau]/qu'est-c(e) qui s(e) passe
>
> Elève : un carré sur la pointe
>
> E. [à Elève]: voilà [à tous]: si j(e) le mets comme ça c'est l'autre qui est/mais/est-c(e) que j(e) l'ai déformé/est-c(e) que j(e) l'ai tiré ?
>
> E. [à tous]: donc c'est le même/c'est toujours un carré/donc on va dire quoi
>
> Elève : qu'il est sur la pointe
>
> E. [à Elève]: un carré sur la pointe/hein
>
> E. [à tous]: ça s(e) dit comme ça/ou sur le sommet [mime]/mais bon on peut dire ça/alors un carré [écrit en dessous de "un côté"]

Pour montrer que le *carré en forme de losange* n'est autre qu'un carré, l'enseignante tourne la feuille représentant un agrandissement du premier modèle au tableau, de manière à ce que celui-ci se retrouve en position prototypique. Ce geste est susceptible de conforter une vision spatiale orientée du dessin, celle-là même que la maîtresse essaie de déstabiliser et qu'il s'agit bien de dépasser pour appréhender la figure géométrique carrée par le biais de ces propriétés. Que retenir de cette injonction quasi-paradoxale relative au rôle joué par l'orientation spatiale dans la description de la sous-figure carrée ? Il y a là une espèce d'impasse vis-à-vis des apprentissages géométriques visés. L'enseignante valide au final la reformulation *un carré sur le sommet* qui conforte une vision « orientée » du dessin incohérente et non-conforme au regard des pratiques discursives géométriques de référence. On peut y voir un indice fort de l'achoppement de la secondarisation des pratiques langagières spécifiques de la géométrie et de l'institutionnalisation des savoirs géométriques enseignés.

Ces exemples empruntés à la même étude de cas montrent selon nous l'intérêt d'une perspective d'étude des pratiques langagières pour identifier des phénomènes liés à l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie. Il nous semble notamment que les exemples donnés ouvrent une nouvelle voie de recherche, celle de l'étude des aspects spécifiques des pratiques langagières géométriques, afin de mieux saisir les clés de la secondarisation de ces pratiques à même de contraindre et de peser sur l'institutionnalisation des savoirs visés. Par exemple, nous montrons dans Coulange (2014) l'intérêt d'une perspective d'étude des pratiques relatives à la désignation de points par des lettres en géométrie, inégalement enseignées à l'école, mais massivement introduites dès le début du collège. La recherche exposée en suivant explore d'autres aspects des pratiques langagières, spécifiques de la géométrie.

On pourrait s'étonner que les deux recherches citées ici en exemple portent sur le même domaine d'étude (celui de la géométrie plane). Ce n'est sans doute pas un hasard. Dans ce domaine peut-être plus que d'autres, la question des pratiques langagières paraît à la fois vive du fait d'injonctions fortes ou perçues comme telles par les enseignants sur le lexique, et délicate car tout ne se résume pas au lexique. Par exemple, on peut penser la reformulation d'un écrit d'élève *fais une marque sur le côté* (qui renvoie *a priori* à une action matérielle de tracé) en *place un point* (qui renvoie à l'action abstraite de positionner un point sur une figure géométrique) par l'enseignante dans l'étude considérée ci-avant, contribue potentiellement à une inscription dans la communauté discursive des savoirs géométriques. Dans quelle mesure, ce type de reformulations contribue-t-il à institutionnaliser des savoirs géométriques ? Que signifie le fait que plusieurs élèves de la classe reformulent la proposition de la maîtresse en *place un petit trait, place un petit point, etc.* et ne semblent pas au moins dans un premier temps, reprendre la formulation induite par l'enseignante ? S'il va de soi que l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie ne peut se résumer à une « simple » question de vocabulaire, il n'est pas toujours simple de démêler ce qui, dans les pratiques à la fois matérielles (de tracé) et langagières (verbales, écrites, voire symboliques), atteste de la présence et/ou de la construction des connaissances géométriques visées. La recherche citée en exemple ci-après contribue largement à élucider cette pluralité de registres d'activités langagières (matérielles, verbales, écrites, etc.) convoquées en géométrie.

## UN DEUXIEME EXEMPLE EN MATHEMATIQUES : LES MODES DE FREQUENTATION EN GEOMETRIE

Les extraits de texte ci-dessous sont partiellement repris de l'article (Bulf, Mathé, Mithalal 2014).

De façon partagée en didactique des mathématiques, nous considérons que l'apprentissage de la géométrie, à l'école primaire et au collège, résulte de la confrontation à des problèmes dont la résolution donne du sens aux connaissances géométriques. Mais entrer dans la géométrie, ses manières d'agir, de parler et de penser le monde, repose également sur une construction collective et sociale permettant l'entrée dans cette pratique spécifique, culturellement déterminée. Comment comprendre la manière dont ces deux processus s'entremêlent et interagissent pour permettre la construction de connaissances géométriques ? Explorer cette question conduit à la nécessité d'une prise en compte nouvelle de la dimension langagière de l'activité géométrique des élèves en situation de résolution de problème. Dans (Bulf et al., 2014) nous proposons et mettons à l'épreuve, un outil méthodologique pour la description de l'activité géométrique d'élèves et de son évolution, appelé *mode de fréquentation*. Reconnaissant au langage une fonction cognitive, cet outil vise d'une part à intégrer une analyse de la dimension langagière de l'activité géométrique des élèves aux analyses plus classiquement développées en didactique des mathématiques. D'autre part, en permettant d'étudier la manière dont différentes facettes de l'activité géométrique sont susceptibles de dialoguer, cet outil livre également des pistes pour mieux comprendre les déterminants de l'évolution de l'activité des élèves et identifier des interactions entre phénomènes adaptationnistes et construction sociale de connaissances.

### Positionnement théorique

Notre travail vise à étudier le rapport dialectique entre deux mouvements que nous considérons comme constitutifs du processus d'apprentissage en géométrie : une construction personnelle par confrontation à un milieu et une construction sociale par l'inscription dans une pratique culturelle, celle d'une certaine géométrie scolaire dans le cas présent. Cet objectif induit la nécessité de mieux prendre en compte le rôle du langage dans la manière dont nous appréhendons et analysons la construction de connaissances par le sujet, dans une situation d'apprentissage donnée. Nous proposons alors d'étudier le processus par lequel les connaissances mobilisées par un sujet en situation de résolution de problème et par là même la manière dont celles-ci évoluent, dans une dynamique d'apprentissage, en décrivant ce que nous appelons son activité. Celle-ci recouvre pour nous trois dimensions indissociables, relatives à des modalités d'action sur le milieu, un langage et une manière de penser les objets de la situation. La première hypothèse que nous formulons est celle de la cohérence entre ces différentes dimensions de l'activité, ces dernières étant dépendantes du contexte. Ceci nous conduit à employer la notion de modes de fréquentation qui visent à une description *a posteriori* de l'activité des élèves, et dont nous souhaitons montrer la cohérence interne. L'apprentissage est alors envisagé comme l'évolution des modes de fréquentations des élèves, vers des modes de fréquentation conformes aux pratiques géométriques de référence, visées par l'enseignant et l'institution, à un niveau donné, relativement à des objets de savoir donnés. Sous cette hypothèse de cohérence, notre question initiale nous renvoie aux déterminants de cette évolution. La seconde hypothèse que nous formulons et que nous mettons à l'épreuve dans l'article (op. Cité) est que ces déterminants sont – au moins – de deux types, et que ceux-ci sont en interaction : les interactions entre sujet et milieu mais aussi l'interaction discursive orale hors de la situation adidactique.

## Exemple d'analyse *a priori* en termes d'agir-penser-parler dans le cas d'une situation d'enseignement et d'apprentissage sur le cercle

Nous nous appuierons sur un corpus tiré de Barrier, de Vittori et Mathé (2012) et repris par Barrier, Hache et Mathé (2013). Il s'agit d'une tâche de construction d'un cercle en classe de $6^e$ dans une cour de récréation à l'aide d'instruments inusuels mis à disposition des élèves : une craie et une corde (le diamètre étant donné).

Dans un premier temps, dans l'analyse *a priori* que nous faisons, nous nous efforçons de prendre en compte les trois dimensions pré-citées. Nous appuierons sur les travaux de Artigue et Robinet (1982) qui proposent différents manières de penser le cercle et sur une analyse logique des objets géométriques en jeu (au sens de Barrier et al.2013) qui permet de caractériser les différentes manières de penser le cercle en fonction du regard porté sur l'objet cercle, le nombre et la dimension des sous-objets considérés (Duval, 2005). Le *penser*, inhérent aux interprétations des problèmes liées à une communauté discursive dans laquelle s'inscrivent les élèves, va conditionner une manière de parler et une manière d'agir. Inversement, mettre en œuvre un certain usage d'instruments peut orienter le regard des élèves (Perrin, Mathé et Leclercq, 2013) et influer ainsi sur la nature des objets considérés et donc sur les manières de penser et parler, etc. Cette analyse *a priori* nous livrera des indices pour identifier ensuite dans le déroulement effectif les Modes de Fréquentations dont les observables portent sur les manières d'agir et de parler.

| Ex de manière de penser | | Ex de manière de construire | Ex de manière de parler |
|---|---|---|---|
| *MP1 : une surface délimitée par une ligne de courbure constante* | D2 D1 | Tracé à main levée | « cercle » ou « rond » |
| *MP1bis : une ligne continue de courbure constante* | D1 | idem | idem |
| *MP2 : une ligne située à une distance constante (le rayon) d'un point donné (le centre)* | Relation entre objets D1 et D0 | placer une extrémité de la corde en *I*, placer la craie sur la corde à une distance *OI* ou *IE* de *I* puis à tourner autour de I, corde tendue | « cercle de centre I et de rayon IO » |
| *MP2bis : un ensemble de points situés à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre)* | Relation entre objets D0<br><br><br>D1 | Idem ou encore des élèves effectuant un tracé « point par point » de multiple points à la distance *IO* ou *IE* du centre (puis traçant à main levée une ligne reliant ces points) | |
| *MP3 : une ligne ayant une infinité d'axes de symétrie.* | D1 | | |

*Figure 4 : Agir-parler-penser a priori de l'objet cercle*
*(ici « cercle de diamètre [OE] » ; O et E, et le milieu I de [OE] sont déjà tracés)*

On pourrait donc imaginer un tableau (tableau 1) qui permettrait de considérer différentes manières de penser le cercle (Artigue et Robinet 1982) dans le contexte d'une classe de 6$^{e}$. La différence majeure entre ces différentes manières de penser le cercle semble résider dans le regard porté sur l'objet cercle, le nombre et la nature des sous-objets pris en compte. Par exemple MP1 mobilise une vision du cercle en termes de surface (objet de dimension 2) ; MP2 et MP2bis définissent le cercle par une relation entre un objet de dimension 1 (ligne) et un objet de dimension 0 (le « centre »). Nous renvoyons plus généralement aux travaux en cours de Barrier, Chesnais et Hache (2014) qui portent sur l'analyse logique pour l'analyse de l'activité de l'élève. L'idée générale que l'on peut retenir est que mobiliser l'une ou l'une autre de ces manières de penser n'induira donc pas les mêmes techniques de construction du cercle, ni les mêmes manières d'en parler. Par exemple si je me situe dans la première MP1, je peux me contenter de tracer un cercle à main levée surtout si je me situe en dehors du champ des mathématiques. Il nous semble toutefois important d'être prudents ici et de ne pas donner l'impression d'être caricatural et notamment de ne pas confondre l'existence d'un schème d'utilisation d'un instrument et la présence d'une connaissance géométrique qui y est potentiellement associée. En effet, un élève peut par exemple faire tourner la corde tendue autour de I pour tracer le cercle, par simple mimétisme. Il est nécessaire de croiser une analyse du discours des élèves sur les objets de la situation et les procédures de construction mises en œuvre.

## Éléments d'*analyse a posteriori*

Nous nous centrons ici sur l'activité géométrique d'un groupe de trois élèves et leurs interactions avec l'enseignant (P) autour de la construction du cercle. L'extrait auquel nous nous intéressons commence alors que les deux premières étapes du plan de construction sont passées (tracé des points O, E, et milieu I du segment [OE]). Les élèves doivent tracer le cercle ayant pour diamètre le segment [OE]. À partir de l'analyse des extraits filmiques et des transcriptions, nous pouvons relever deux modes de fréquentation en confrontation au début des échanges. On peut décrire un premier mode de fréquentation de l'objet cercle dans lequel se placent ces élèves : le cercle est pour eux délimité par une ligne fermée de courbure constante (MP1 ou MP1bis). Son tracé s'effectue à main levée, en respectant l'allure générale du cercle ; ce dernier est désigné par un mot « rond », qui n'appartient pas à la communauté discursive de la géométrie du collège. Les élèves ne prennent pas en compte le centre du cercle, ni pour tracer ce cercle, ni dans sa désignation. Tandis que l'enseignant montre que celui-ci se place dans un *mode de fréquentation* du cercle radicalement différent de celui des élèves. Pour lui, un cercle se caractérise par « un cercle de centre O et de rayon 3 cm ». Un cercle devient une ligne (ou un ensemble de points) situé à une distance donné (le rayon) d'un point (le centre) *(MP2-MP2bis).* L'enseignant convoque dans son discours le centre, le rayon et le cercle (ensemble de points ou ligne), ce sont les relations perçues entre ces objets qui sous-tendront la procédure de construction. Les interactions langagières verbales s'avèrent être le lieu de confrontation entre deux modes de fréquentation du cercle (bien qu'il n'en existe pas que deux) qui renvoie au concept d'hétéroglossie ou d'orchestration des voix dissonantes (voir les parties précédentes). L'objectif de notre travail est d'étudier par quelle dynamique on peut décrire l'évolution de ces modes de fréquentations.

## Dynamique d'évolution des Modes de Fréquentation

Cette dynamique passe par la construction des domaines de validité (contextes de pertinence, voir parties précédentes) vers un mode de fréquentation opératoire conforme à la communauté discursive disciplinaire scolaires du collège (en classe de 6e). Outre des indices de secondarisation : l'enseignant agit ici par le langage (en questionnant, en cherchant des reformulations, etc.) pour signifier que le contexte est ici un problème géométrique, donc qu'il s'agit de s'inscrire dans la communauté de pratiques des mathématiques, et que le rond tracé par les élèves n'est pas un rond « mathématique », nous proposons d'aller plus loin. Nous renvoyons à l'article (Bulf et al. 2014) pour une analyse *a posteriori* plus fournie à partir des extraits du corpus. À titre d'exemple, nous pouvons citer l'un des extraits du corpus qui illustre le fait qu'en introduisant l'objet « points situés sur le cercle » dans le discours, l'enseignant accompagne les élèves vers une manière de voir et de penser le cercle différente. À la vision du cercle en termes de ligne, bord d'une surface globale « rond », mobilisée par les élèves, il oppose une appréhension du cercle en termes d'un ensemble de points situés à équidistance d'un cercle. Les objets (des points) convoqués sont de nature très différente et le cercle devient caractérisé par une relation ternaire. Il nous paraît alors imprécis, si ce n'est réducteur, de se limiter ici à l'identification d'un effet de contrat : il ne s'agit pas seulement de placer les élèves dans le contexte des mathématiques de la classe, le discours a pour effet de donner une existence au centre du cercle dans ce cas précis.

> E1 : ben c'est un cercle.
>
> P : Le cercle de centre O et de rayon trois centimètres. [pause]
>
> P : la définition c'est du cours qu'il faut connaître sinon tu vois on est bloqué quand on connaît pas le cours. Et donc formé par quoi ?
>
> E3 : [inaudible - voix très basse]
>
> P : Par quoi est formé un cercle ? Quelle est la particularité de tous les points qui sont situés sur un cercle ?
>
> E1 : Euh, euh ils sont euh
>
> P : Oui
>
> E1 : ils sont de même distance
>
> P : Ils sont tous à la même distance de quoi ?
>
> E1 : Ben de, ben du milieu

P : Voilà du centre du cercle/

E1 : du centre du cercle.

Le reste de l'analyse des extraits de corpus met en lumière plusieurs points qui nous semblent essentiels pour mieux comprendre la manière dont l'activité géométrique est susceptible d'évoluer en situation de résolution de problème, dans un processus de construction de connaissances géométriques.

L'ensemble de l'analyse pointe d'abord le caractère concomitant et dialectique de l'évolution des dimensions langagières, matérielles et conceptuelles de l'activité géométrique chez les élèves. La tâche à résoudre était ici une tâche matérielle (construire un cercle à l'aide d'une craie et d'une corde). Or le dépassement de procédure non adéquate est bien loin de se limiter au terrain de l'action matérielle et de contraintes liées à des rétroactions pragmatiques. En effet c'est ici une négociation dans mais surtout sur le langage qui provoque une négociation de la manière de penser le cercle mobilisée. Ceci induit une modification de la manière d'agir, dans un mouvement global de changement de mode de fréquentation.

Il nous semble ensuite important de souligner que les interactions langagières jouent ici deux rôles fondamentaux. Elles sont lieu d'interaction des élèves avec l'objet cercle : le discours des élèves (et notamment l'usage du mot « rond ») est indissociable d'un positionnement dans une communauté discursive dont découlent des manières de penser, d'agir. Elles sont aussi lieu de construction sociale et située (en articulation avec la tâche et les contraintes sur les instruments) des objets de savoirs. Il s'agissait ici d'être capable d'étendre la définition géométrique du cercle au contexte de ce problème pour parvenir à tracer un cercle de diamètre donné avec une corde. En permettant une prise en compte nouvelle du rôle du langage dans l'analyse didactique de cet épisode de classe, l'outil mode de fréquentation donne alors à voir la manière dont les interactions des élèves au milieu, d'une part, et les interactions sociales portées par les interactions langagières verbales, d'autre part, s'entremêlent dans le processus d'apprentissage observé.

## PERSPECTIVES GENERALES : LE PROJET ALANDIS

Il s'agit à l'avenir de croiser et d'amplifier ces travaux disciplinaires juxtaposés pour repenser les rôles génériques et spécifiques du langage dans les apprentissages. L'approche comparatiste du projet de recherche ALANDIS (Apprentissage et LANgage dans les DISciplines d'enseignement) cherchera à traiter des questions suivantes :

1/ Au sein d'une même classe peut-on identifier des pratiques langagières homogènes entre les disciplines ou les domaines d'apprentissage ? Si oui, quelles en sont les causes : la forme scolaire et/ou les enjeux sociaux et/ou les pratiques enseignantes ? Quels en sont les effets sur les apprentissages ?

2/ Au sein d'une même classe ou d'un même niveau scolaire, qu'est-ce qui différencie les pratiques langagières de chaque discipline ?

3/ Aux changements d'étape de la scolarité (Petite Section, Cours Préparatoire, Sixième, Seconde, Université), identifie-t-on des ruptures dans les manières de négocier les savoirs, de solliciter les points de vue, de construire via le langage des mondes scientifiques pertinents ?

4/ Peut-on relever des constantes et des spécificités au niveau des scénarios (au sens brunérien du terme) langagiers d'enseignement dans les différentes disciplines et aux différents niveaux d'apprentissage ?

Les travaux conduits dans chaque discipline permettront d'alimenter le travail comparatiste. Pour toutes les disciplines, il s'agira de :

1/ Caractériser les pratiques langagières qui participent à la construction des savoirs et à leur diffusion dans chaque discipline participant au projet ;

2/ Repérer des scénarios langagiers d'enseignement mobilisés dans les disciplines.

De façon plus précise, dans toutes les disciplines, la recherche portera à la fois sur la verbalisation des objets de savoir, sur les interactions langagières enseignant-élève, sur leurs enjeux ainsi que sur l'inscription des élèves dans les attentes de chacune de ces disciplines.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARTIGUE M., ROBINET, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(2), 5-64.

BAKHTINE M. (1984). Esthétique de la création verbale, Paris : Gallimard.

BARRIER T., DE VITTORI T., MATHÉ A.-C. (2012). Des séancesordinaires comportant une dimension historique.Quels enseignements? *Petit x*, 90, 5-34.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, 93, 13-37.

BARRIER T., HACHE C., MATHÉ A.-C. (2013). Seeing – acting – speaking in geometry : a case study. *In Proceedings of the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2013, Antalya, Turkey.

BAUTIER E., GOIGOUX R. (2004). Difficultés, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle, Revue Française de Pédagogie, 148 (89-100).

BAUTIER E. (2011). Quand le discours pédagogique entrave la construction des usages littéraciés du langage, In Rochex J-Y. et Crinon J. (Eds.), La construction des inégalités scolaires (157-172), Rennes : PUR, Coll. Paideia.

BERNSTEIN B. (1971/1975). *Langage et classes sociales, codes sociolinguistiques et contrôle social*, Paris : minuit.

BAUTIER E., CATTEAU, C., JOIGNEAUX C., THOUNY C. (2011). Des difficultés invisibles aux apprentissages non faits. In Rochex J-Y. et Crinon J. (Eds.), La construction des inégalités scolaires (45-56), Rennes : PUR, Coll. Paideia.

BESSOT A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques, In Margolinas C. et al. (Eds.) En amont et en aval des ingénieries didactique (29-56), Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOSCH M., PERRIN-GLORIAN M.J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. In : Bronner A. et al. (Eds.) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage (267-302). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BRONNER A., BULF C., CASTELA C., GEORGET J.-P., LARGUIER M.,PEDDEMONTE B., PRESSIAT A., RODITI E. (Eds.) (2013). *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROSSARD M. (2001). Situations et formes d'apprentissage. *Revue Suisse Des Sciences De L'éducation*, *23*(3), 423-438.

BROSSARD M. (2004). *Vygotski : Lectures et perspectives de recherches en éducation.* Paris: Presses universitaires du septentrion

BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.

BROUSSEAU G. (1997). La théorie des situations didactiques (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal), Interactions didactiques. Genève.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BULF C., MATHÉ A.C., MITHALAL J. (2011). Language in geometry classroom. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European*

*Society for Research in Mathematics Education* (pp. 649-659), Rzeszów, Poland.
BULF C., MATHÉ A.-C., MITHALAL J., WOZNIAK F. (2013). Le langage en classe de mathématiques : regards croisés en TSD et en TAD. In A. Bronner & Al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* Grenoble : La Pensée Sauvage.
BULF C., MATHE A.-C., MITHALAL J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation : langage et activité géométrique. *Spirale-Revue de Recherches en Éducation*, 54, 29-48.
BUTLEN D., PELTIER-BARBIER M.L., PEZARD M. (2004). Des résultats relatifs aux pratiques de professeurs débutants ou confirmés enseignant les mathématiques à l'école. In Peltier-Barbier M-L (Ed.) Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP (70–81), Grenoble : La Pensée Sauvage.
BUTLEN D, PELTIER M.-L., PEZARD M. (2002). Nommé(s) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP : cohérence et contradictions Revue Française de Pédagogie, 140, 41-52.
CHARLES-PEZARD M., BUTLEN D., MASSELOT P. (2012). Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ? Grenoble : La Pensée Sauvage.
CHESNAIS A. (2009). L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.
CONNE F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 12, 221-270.
CONRY Y. (1987). *Darwin en perspective.* Paris: Vrin.
COULANGE L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM2. In J-Y. Rochex et J. Crinon (Eds.) La construction des inégalités scolaires (33-44), Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
COULANGE L. (2012a). Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 32.3, 361-408.
COULANGE, L. (2012b). L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves, Note de synthèse en vue de soutenir une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot. Texte disponible sur TEL : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00801863.
COULANGE L., ROCHEX J-.Y. (2013). La construction des inégalités scolaires : approches sociologique et didactique, In : Coppé S., Haspekian M. (éds.) Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2012 (31-52), Paris : IREM Paris 7 et ARDM.
COULANGE L. (2014). Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, *Spirale-Revue de Recherches en Éducation*, 54, 9-28.
CRINON J. (2011). Des pratiques langagières dans la classe et la coconstruction des difficultés scolaires. In Rochex J-Y. et Crinon J. (Eds), La construction des inégalités scolaires (57-76), Rennes : PUR, Coll. Paideia.
DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5 – 53.
FRANÇOIS F. (1993). *Pratiques de l'oral*, Paris : Nathan.
GAYON J. (1992). *Darwin et l'après darwin : Une histoire de l'hypothèse de sélection naturelle.* Paris: Editions Kimé.
GOBERT J. (2014, à paraître). *Processus d'enseignement-apprentissage des raisonnements darwiniens en classe de SVT* . Thèse de doctorat en sciences de l'éducation.
GOBERT J., & LHOSTE Y. (2014). La construction du concept de sélection naturelle en classe de 3e : Analyse didactique dans le cadre de la théorie historico-culturelle. In *Actes des*

*huitièmes rencontres scientifiques de l'ardist. Marseille, 12-14 mars 2014* (pp. 213-224). Marseille: ESPE de l'académie d'Aix-Marseille.
GOBERT S. (2013). Construire des significations, dans et par le langage, In A. Bronner et al.(Eds.) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, Grenoble: la pensée sauvage.
GOODY J. (1979). La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage, Paris : Éditions de Minuit.
GRIZE J. (1996). *Logique naturelle et communication.* Paris: PUF.
JAUBERT M. (2007) Langage et construction de connaissances à l'école – un exemple en sciences,. Bordeaux : Presses universitaires de Bordeaux.
JAUBERT M., REBIERE M., BERNIE J.-P. (2004) L'hypothèse « communauté discursive », Les cahiers Théodile, 4, 51-80.
JAUBERT M., REBIERE M avec la collaboration de BERNIE J.-P. (2012) Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative. Texte disponible sur Forumlecture.ch
http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf
JAUBERT M., & REBIERE M. (2000). Observer l'activité langagière des élèves en sciences. *Aster*, (31), 173-195.
JAUBERT M., & REBIERE M. (2001). Pratiques de reformulation et construction de savoir. *Aster*, (33), 81-110.
LE GUYADER H. (2012). *Penser l'évolution.* Paris: Imprimerie Nationale Éditions.
LHOSTE Y. (2006). La construction du concept de circulation sanguine en 3e. Problématisation, argumentation et conceputalisation dans un débat scientifique. *Aster*, (42), 79-108.
LHOSTE Y. (2008). *Problématisation, activités langagières et apprentissages dans les sciences de la vie. Études de débats scientifiques dans la classe dans deux domaines biologiques : Nutrition et évolution.* Thèse de doctorat en sciences de l'éducation.
LHOSTE Y. (2014, à paraître). *Langage, enseignement et appropriation de savoirs problématisés en SVT. La notion de contexte comme construction théorique et méthodologique pour comprendre ces processus.* Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches
LHOSTE Y., & PETERFALVI B. (2009). Problématisation et perspective curriculaire en SVT : L'exemple du concept de nutrition. *Aster*, (49), 79-108.
LHOSTE Y., BOIRON V., JAUBERT M., ORANGE C., & REBIERE M. (2011). Le récit : Un outil pour prendre en compte le temps et l'espace et construire des savoirs en sciences ? *Recherches En Didactique Des Sciences Et Des Technologies*, (4), 57-82.
LHOSTE Y., PETERFALVI B., & SCHNEEBERGER P. (2010). Poser et construire un problème en classe de SVT. Quels repères pour l'enseignant ? In *Actes du congrés de l'actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF), université de genève, septembre 2010.*
MARGOLINAS C., LAPARRA M. (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In Rochex J-Y. et Crinon J. (Eds), La construction des inégalités scolaires. (33-44), Rennes : PUR, Coll. Paideia.
MARIN B. (2011) La reformulation en classe : un discours équivoque. In Rochex, J-Y., Crinon J. (2011) La construction des inégalités scolaires, Rennes : PUR, Coll. Paideia.
MEYER M. (1979). *Découverte et justification en sciences.* Paris: Klincksieck.
ORANGE C. (2002). Apprentissages scientifiques et problématisation. *Les Sciences De L'éducation, Pour L'ère Nouvelle, 35*(1), 25-42.
ORANGE C. (2012). *Enseigner les sciences. Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe.* Bruxelles: De Boeck.
PERRIN-GLORIAN M.-J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles, Recherches en didactique des mathématiques, 13 (1-2), 5-118.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1997) Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ?, Repères IREM, 29, 43-66.

PERRIN GLORIAN M.-J., MATHE A.C, LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères IREM*, 90, 5-41.

PRIVAT J-M. (2006) Un habitus littératien ?, Pratiques, 131/132, 125-130.

RABATEL A. (2004) Interactions orales en contexte didactique. Mieux (se) comprendre pour mieux (se) parler et pour mieux (s')apprendre, Lyon : Presses Universitaires de Lyon.

REBIERE M. (2000). *Langage, posture et cognition. Enjeux et obstacles de l'activité langagière dans la classe de sciences à l'école élémentaire.* Thèse en sciences de l'éducation.

REBIERE M. (2013) S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de bordeaux, In : Bronner A. et al. (Eds.) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage (219-232), Grenoble : La Pensée Sauvage.

DE RICQLES A. (2010). Une brève histoire de l'évolutionnisme. In *A. Prochiantz (éd.). Darwin : 200 ans* (pp. 13-60). Paris: Odile Jacob.

ROCHEX J-Y., CRINON J. (2011), La construction des inégalités scolaires, au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignements. Rennes : PUR, Coll. Paideia.

SCHNEEBERGER P., ROBISSON P., LIGER-MARTIN J., & DARLEY B. (2007). Conduire un débat pour faire construire des connaissances en sciences. *Aster*, (45), 39-64.

VINATIER I. (2013). *Le travail de l'enseignant. Une approche par la didactique professionnelle.* Bruxelles: De Boeck.

# CONSTRUCTION ET FONCTIONNEMENT D'ESPACES DE TRAVAIL GEOMETRIQUES PERSONNELS D'ELEVES. CAS DE LA GEOMETRIE SYNTHETIQUE DANS L'ESPACE AU LYCEE.

Fabien **SCHLOSSER**

Université de Bordeaux

fabien.schlosser@u-bordeaux.fr

**Résumé**

Notre recherche porte sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace au lycée général. Plus précisément, nous étudions la manière dont les espaces de travail personnels des élèves sont constitués dans ce chapitre, ainsi que leur mise en fonctionnement lors de la résolution de problèmes de construction.

Le cadre théorique des espaces de travail prend en compte une dimension épistémologique, ainsi qu'une dimension cognitive. Nous développons la dimension cognitive des espaces de travail personnels, en définissant des facteurs internes et externes, constitutifs de différences interindividuelles. Ces facteurs permettent de caractériser différents profils d'espaces de travail, dont certains sont pilotés par le registre figural, et d'autres par le référentiel théorique. De manière fonctionnelle, la sémiotique pragmatique associée à la sémiotique triadique de Peirce, nous permet de structurer le niveau cognitif de l'espace de travail personnel de l'élève en un plan syntactique, sémantique et pragmatique. L'analyse des recherches des élèves permet alors d'identifier trois types de processus cognitifs engagés en géométrie dans l'espace: des processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux. Leur importance relative au sein de l'ETG personnel permet alors de distinguer les empreintes de ces ETG.

**Mots clés**

Géométrie dans l'espace – Espace de travail géométrique – Sémiotique – Peirce – Lycée général – Espace – Capacités spatiales.

## INTRODUCTION

Plus que tout autre domaine des mathématiques, la géométrie dans l'espace dispose d'un statut spécifique dans l'enseignement de cette discipline, tant du point de vue didactique que de l'expérience personnelle de tout un chacun. En effet, la problématique de la capacité à «voir dans l'espace», associée à celle de soi-disant prédispositions innées favorisant l'apprentissage des mathématiques, focalise toutes les attentions. Ainsi, l'enseignement de la géométrie dans l'espace semble s'articuler autour de certains dualismes comme par exemple le dualisme "voir dans l'espace"/raisonner, le dualisme figural/discursif, ou encore démontrer/convaincre ... Mais qu'en est-il réellement ? En quoi consiste précisément l'apprentissage de la géométrie synthétique dans l'espace au lycée ?

Notre étude a pour objectif de répondre à ces questions générales. Pour cela, nous avons mené une étude clinique minutieuse d'une séquence de classe complète portant sur ce chapitre, et considérée du point de vue de l'élève. Nous avons placé les élèves par binômes et enregistré en format vidéo et audio l'intégralité de leurs recherches effectuées sur un logiciel de géométrie dynamique (Interesp, basé sur Geospace), pour lequel seules les fonctions de construction conformes aux procédés papier-crayon étaient possibles. Il s'agit d'une étude procédant du "bas vers le haut", du local au global dans laquelle la classe, le professeur, les élèves jouent un rôle épistémique.

Bien que nos analyses relèvent d'une « micro-didactique », nos résultats et conclusions sont générales et concernent tout autant l'enseignement de la géométrie tridimensionnelle, que la démarche d'étude et le cadre théorique didactique. Sur ce dernier point, la notion d'espace de travail géométrique (ETG) de C. Houdement et A. Kuzniak (2006) nous a procuré une structure organique pour notre recherche. Mais le cœur de notre approche, l'outil fonctionnel de notre étude, est celui de la sémiotique triadique de Peirce (1931-1935). En effet, nous prenons pour postulat que l'activité mathématique relève d'une pratique sociale de communication. Elle se traduit par un flux d'informations, véhiculées par des signes mathématiques ou non mathématiques au sein de la classe ainsi qu'au niveau de chaque élève. De là découle une étude du signe mathématique, dans ses aspects de production et d'interprétation. Ainsi, d'une approche ergonomique relativement statique à l'origine des ETG, nous nous sommes dirigés vers une conception plus dynamique, quasi génétique, de la construction et du fonctionnement des ETG personnels des élèves du lycée général.

Dans ce texte, nous abordons dans une première partie les facteurs constitutifs des ETG personnels que nous adossons localement à un type de tâche et à un milieu. En particulier, nous nous appuyons sur la sémiotique triadique de Peirce pour modéliser cet ETG et définir ses composantes sémiotiques. Dans un deuxième temps, nous montrons dans quelle mesure les capacités de visualisation et de traitement spatial génèrent des différences interindividuelles chez les élèves et dans quelle mesure elles constituent des facteurs externes aux ETG, générateurs de profils différents. Pour cela, nous définissons au préalable la notion même d'espace, d'un point de vue épistémologique. Dans une troisième partie, nous montrons au travers d'exemples d'analyses locales, les processus en jeu lors du fonctionnement des ETG.

## 1. LES ELEMENTS CONSTITUTIFS DU PLAN COGNITIF DES ESPACES DE TRAVAIL GEOMETRIQUES

Les espaces de travail géométriques s'articulent initialement autour du triptyque espace réel, artefacts, référentiel théorique (Houdement, Kuzniak, 2006). Depuis 2011, ces espaces sont structurés en un plan épistémologique et un plan cognitif. Les trois composantes originales sont intégrées dans le plan épistémologique, alors que le plan cognitif est quant à lui formé des processus cognitifs de visualisation, de construction et de preuve. Le principal enjeu de la didactique de la géométrie dans l'espace est par conséquent de comprendre deux types de phénomènes importants. Le premier est celui de l'interprétation des signes réceptionnés par l'élève et le second celui de la production de signes par lui-même (à partir d'autres signes). Kuzniak fait référence à des genèses dont il distingue la genèse figurale, instrumentale et discursive.

### 1.1 La nature trichotomique des signes mathématiques, produits et réceptionnés dans l'ETG personnel

La sémiotique de Peirce repose sur un principe philosophique qu'il nomme *phanéroscopie,* consistant en « la description de ce qui est devant l'esprit ou la conscience, tel qu'il apparaît » (Peirce, 1931-1935, 8.303). Il démontre que trois catégories exactement sont nécessaires et suffisantes pour décrire toute chose : la priméité, la secondéité et la tiercéité. Ainsi, tout objet peut être représenté par un signe appelé le representamen. Ce dernier n'est pas l'objet en question, mais bien une représentation de celui-ci produisant une idée de l'objet, un troisième signe que Peirce nomme l'interprétant. Tout objet est par conséquent pris dans une relation triadique que l'on peut schématiser de cette manière :

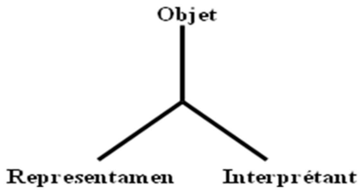
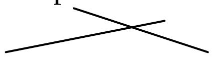



*Figure 1- La triade du signe.*

Ce modèle trichotomique est particulièrement efficient pour l'analyse didactique. Prenons l'exemple de l'objet « intersection de deux droites dans l'espace ». Cet objet mathématique peut être représenté par un representamen de type figural (pour reprendre la catégorisation de Duval (2005) du cadre des registres de représentations sémiotiques), de la manière suivante :



Bien sûr, ce signe n'est pas l'objet spatial lui-même mais une représentation, par exemple en perspective parallèle. Ce signe peut alors produire plusieurs interprétants dont notamment celui de droites sécantes, mais également celui de droites non coplanaires. On perçoit déjà le grand intérêt de l'apprentissage de la géométrie dans l'espace puisque le dessin est par nature polysémique dans ce chapitre: plusieurs interprétants peuvent être associés à un même signe[1], ce qui est moins systématique concrètement en géométrie du plan. De manière emblématique, l'objet droite et son représentamen figural (le trait) sont souvent fusionnés par les élèves.

Deledalle (1979) montre bien comment une pragmatique peut être construite à partir de la théorie de Peirce. Prenons le point de vue du système théorique mathématique. Dans ce système, il y a trois manières de considérer un signe mathématique. En premier lieu, le signe peut être considéré en tant que tel, pour lui-même : il s'agit de la dimension syntactique (ou grammaticale) du signe. En second lieu, il peut être vu dans sa relation avec son objet : c'est la dimension sémantique (existentielle ou pratique) du signe. Enfin, la dimension pragmatique (ou logique) du signe consiste en la prise en compte de la relation du signe à son interprétant.

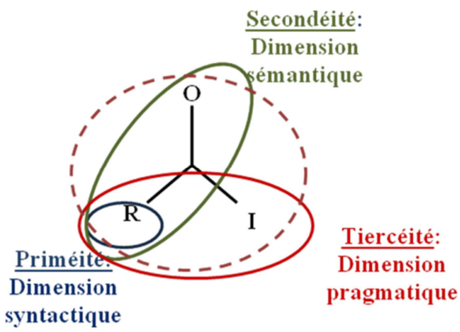



*Figure 2- Principe de décomposition de l'étude du signe.*

Reprenons notre exemple du tracé de deux droites sécantes sur le dessin. Dans la dimension syntactique de l'étude sémiotique de ce signe, aucune signification ne lui est attribuée. Il n'est pris qu'en tant que tel, en y adjoignant éventuellement certaines règles syntactiques du tracé géométrique, comme par exemple qu'un trait est sans épaisseur (Peirce (1931-1935) utilise le terme de légisigne dans ce cas). Dans sa dimension sémantique, ce dessin est mis en relation avec son objet. Cela peut se faire de trois façons : soit de manière iconique (le dessin s'identifie à son objet par une ressemblance en tout point, le dessin « est » l'intersection de deux droites), soit de manière seconde le dessin est considéré comme l'indice de deux droites de l'espace (la conséquence d'une action, celle d'une perspective parallèle de deux droites

[1] Bien sûr, la mise en relation avec des signes discursifs permet de lever cette polysémie.

non coplanaires par exemple), soit de manière troisième le dessin est pris comme le symbole de deux droites sécantes (les propriétés du representamen et de l'objet sont dissociées). Enfin, dans sa dimension pragmatique, le dessin peut être par exemple associé à l'interprétant « deux droites sécantes » grâce à un argument du type « les deux droites sont coplanaires ». Une étude détaillée des catégories de signes est réalisée dans notre thèse, dans le cas particulier des signes de la géométrie dans l'espace (Schlosser, 2012).

## 1.2 Une modélisation de l'espace cognitif des ETG personnels

Ainsi, sur la base de la sémiotique de Peirce, nous modélisons le plan cognitif de l'ETG personnel d'un élève de la manière suivante :

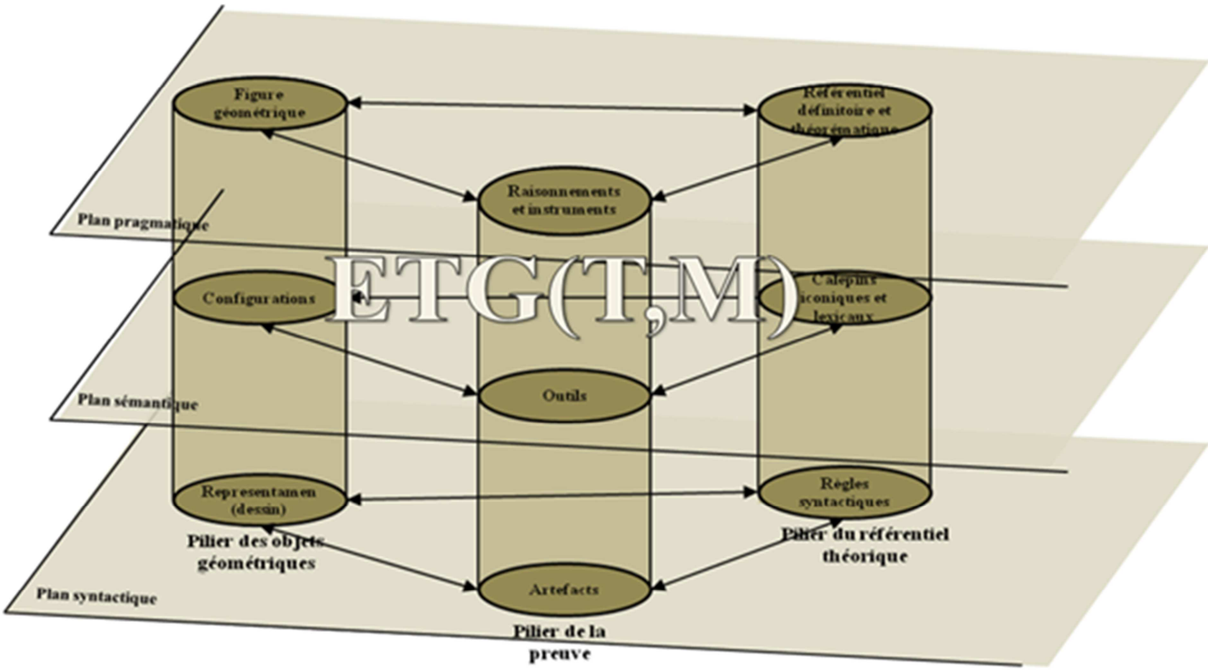



*Figure 3- Modélisation de l'ETG personnel en trois plans et trois piliers.*

Nous retrouvons le triptyque objet-artefact-référentiel, pris dans sa dimension première, seconde ou troisième. Le plan cognitif de l'ETG se voit donc modélisé en trois strates (syntactique, sémantique et pragmatique) et trois piliers (le pilier des objets, de la preuve et du référentiel).

La différenciation des composantes de chaque pilier est précisément basée sur le modèle triadique de Peirce, à savoir la distinction entre signe premier, second ou troisième, mais également en fonction de sa catégorisation des signes. Ainsi, comme nous l'avons vu plus haut avec l'exemple de l'objet « intersection de deux droites dans l'espace », le pilier des objets se structure en trois niveaux pour lesquels nous utilisons les termes de representamen (pouvant être de trois natures, un qualisigne, un sinsigne ou un légisigne), de configuration (iconique, indiciaire ou symbolique) et de figure (un objet rhèmatique, dicent ou argumental). Nous explicitons ces distinctions et les mettons en œuvre dans notre thèse (Schlosser, 2012), ainsi que dans les actes du symposium ETM4 (Schlosser, *à paraître*), notamment dans le cas de l'objet « plan dans l'espace ». De la même façon, nous faisons la distinction entre un artefact (le compas par exemple), un outil (l'artefact associé à une classe d'objets réalisables avec celui-ci, par exemple le compas associé au cercle) et un instrument (qui recouvre à la fois l'outil et les propriétés géométriques générales qui en sont induites, comme par exemple l'équidistance dans le cas du compas). Concernant le pilier du référentiel, sur le même principe, nous le structurons en un ensemble de règles syntactiques, un calepin iconique et lexical, et un référentiel définitoire et théorématique.

Cette structuration cognitive de l'ETG personnel permet de modéliser son fonctionnement, et donc de décrire et comprendre les démarches de résolution mises en œuvre par les élèves. Examinons par exemple la manière dont un simple representamen peut être mis en relation avec son objet de manière iconique (rhématique) (R↔O). Il s'agit d'un processus qualitatif s'appuyant sur un calepin d'icônes, un ensemble d'images mémorisées que nous appelons le calepin visuel (ou calepin iconique). Prenons le cas particulier de l'objet « représentation en perspective parallèle d'un cube ». Un des exercices du test de connaissances spatiales que nous avons réalisé et que nous présentons dans le paragraphe 2.3 de cet article[2], comportait 10 représentations distinctes, dont 8 devaient être associées à l'objet « représentation en perspective parallèle du cube ». Un élève ayant déjà rencontré et mémorisé ces 8 représentations correctes du cube, dispose d'un ensemble de representamens qui correspondent au même objet « cube ». Cet ensemble forme une « clique figurale ». Dès lors que cette clique est mémorisée, nous la nommons calepin visuel de la représentation figurale du cube. Le cardinal de ce calepin est un élément constitutif de ce que nous appelons la richesse de l'espace de travail. Il est très difficile de caractériser directement cette richesse du calepin visuel. Seul un test exhaustif permettrait de le faire, ce qui matériellement est hors de portée. Mais de la richesse $\mathrm{r}(\mathrm{Cv_c})$ du calepin visuel proposé par l'enseignant dans sa classe, dépendra la richesse $\mathrm{r}(\mathrm{Cv_e})$ de celui de l'élève : sans facteurs externes (années antérieures, influence de la famille, d'un professeur particulier, d'ouvrages lus en travail personnel à la maison…), on a : $\mathrm{r}(\mathrm{Cv_e}) \leq \mathrm{r}(\mathrm{Cv_c})$.

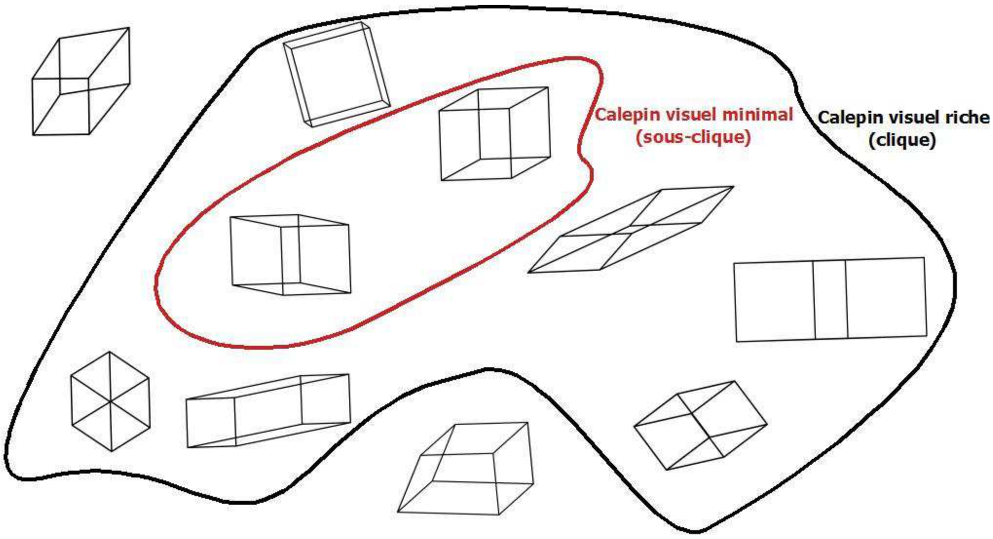



*Figure 4- Calepin visuel du cube.*

Un tel calepin visuel peut se construire de deux manières différentes. Suivant un premier principe, il peut y avoir agrégation de signes au sein d'une clique par le biais de désignations-nominations (formules implicites ou explicites du type : « cette figure "est" (représente) un cube, celle-ci aussi… »). Il s'agit dans ce cas d'un processus symbolique, puisque le signe figural est mis en relation avec le mot 'cube' (signe symbolique) qui est générique. Les relations consécutives à ces désignations-nominations communes se font alors entre des signes iconiques figuraux : deux signes figuraux sont mis en relation par transitivité.

[2] Cet exercice est partiellement reproduit en annexe : il s'agit du premier exemple de la partie III de cet annexe.

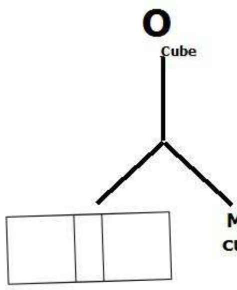



*Figure 5 – Désignation-dénomination*

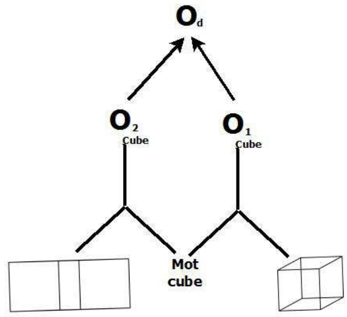



*Figure 6- Mise en relation par transitivité.*

Ainsi, deux relations triadiques peuvent être concaténées du point de vue de la représentation diagrammatique. Dans le diagramme de la figure 6, c'est le symbole rhématique 'cube' (sous sa forme discursive orale ou écrite) qui assure la liaison des deux relations triadiques. La clique formant le calepin visuel du cube produit une conceptualisation de l'objet cube. Dès l'école élémentaire, les propriétés géométriques des solides sont construites par des activités de description et de classement conduisant à des calepins visuels. Ces propriétés sont des relations que l'on peut également considérer comme des objets dynamiques, dans le sens de Peirce (1931-1935).

Suivant un second principe, le calepin visuel se construit de manière indiciaire. Le signe figural est alors directement mis en relation avec un autre signe figural par application d'une perspective : le dessin (icône bidimensionnel) devient l'indice d'un cube (en tant qu'icône tridimensionnel). Tout élève peut ainsi se construire (ou reconstruire) un calepin visuel du cube à l'aide des propriétés de la perspective parallèle, lorsqu'elles sont pour le moins partiellement connues. C'est ce qui pouvait être fait dans le test spatial, en utilisant la simple règle de conservation du parallélisme vue dans le cours.

Dans la question de notre test de connaissances géométriques, destinée à estimer le calepin visuel des élèves dans le cas des dessins en perspective parallèle du cube, le résultat médian obtenu est de 6 bonnes réponses sur 10, avec un écart-type d'environ 2, et des valeurs minimales de 4 bonnes réponses sur 10 et maximales de 9 bonnes réponses sur 10. La configuration prototypique du cube est sans surprise majoritairement reconnue.

Le calepin lexical est défini de la même manière que le calepin visuel, mais cette fois au sein du registre de représentation discursive.

### 1.3 Des ETG adossés à des types de tâches et à un milieu (facteurs internes)

Par définition, l'ETG est construit sur la base de tâches et de types de tâches à réaliser (dans le sens donné par Chevallard (2002)), ainsi qu'en fonction du milieu comme le définit Brousseau (1990). Ainsi, dans la séquence que nous avons étudiée, deux types de tâches étaient essentiellement sollicités : construire l'intersection d'une droite et d'un plan, et construire l'intersection de deux plans. Par ailleurs, le milieu de la classe que nous avons suivie était constitué notamment de maquettes et d'un logiciel de géométrie dynamique, qui permettait d'obtenir différents points de vue de chaque figure. L'enseignant faisait grandement usage de ces maquettes pour construire les connaissances de géométrie dans l'espace et pour offrir des aides à la réalisation des exercices. Nous avons pris pour postulat que la nature du milieu conditionnait la nature potentielle de l'ETG personnel de l'élève.

Pour cette raison, nous utilisons la notation ETG(T,M) dans le schéma général du paragraphe 1.2. Ce principe d'un adossement local à un type de tâche et à un milieu (facteurs internes) nous permet de modéliser l'ETG global par compilation de l'ensemble des ETG locaux[3] :

$$ETG_{Global} = \bigcup_{T,M} ETG_{local}[T, M]$$

## 2. Les facteurs externes du plan cognitif des ETG personnels.

Puisque les ETG sont dépendants du milieu, nous nous sommes attachés à étudier les liens entre les capacités spatiales et les capacités géométriques, ainsi que le concept même d'espace.

### 2.1 Epistémologie de l'espace

Il n'y a pas un concept d'espace mais plusieurs, dépendants du contexte disciplinaire dans lequel on travaille. Ainsi, on parlera d'espace physique, géographique, psychologique… Dans le cas de la géométrie dans l'espace, les signes mathématiques peuvent être associés à des interprétants issus de l'espace matériel, ou d'images mentales tridimensionnelles. Examinons donc tout d'abord le concept d'espace physique.

La notion d'espace physique relève de deux types d'approches différentes. Einstein les définit ainsi : « (a) l'espace en tant que propriété positionnelle du monde des objets matériels ;

(b) l'espace en tant que contenant de tous les objets matériels. » (Einstein, 1954, p.13).

La première approche est confondue avec celle de lieu et implique la présence d'un objet matériel ou d'un groupe d'objets. De là découle la conception d'un espace relatif : l'espace représente les propriétés positionnelles des objets, mais celles-ci ne peuvent être définies que relativement à d'autres objets (éventuellement par rapport à soi-même). Il s'agit d'un point de vue purement géométrique. Dans ce paradigme, un espace vide n'a par conséquent aucun fondement. La seconde acception du terme espace physique, correspond davantage à un paradigme cinématique. Cet espace ne marque plus une simple position: il s'agit d'un espace absolu à partir duquel la notion d'espace vide est cette fois possible.

Outre la problématique d'espace relatif ou absolu, la question du mouvement est particulièrement discriminante au sein des différentes approches de l'espace. Par exemple, pour Aristote (384-321), l'espace est une conséquence du mouvement. Il est défini comme la somme de tous les lieux, le lieu (topos) étant conçu comme une quantité continue, une partie de l'espace dont les « limites coïncident avec les limites du corps occupant » (Jammer, 2008, p.32).

Pour Platon (428-348), archétype de l'idéalisme, l'espace est identifié à la matière. En particulier, un corps est défini géométriquement comme délimité par une surface, et contenant de l'espace vide uniquement.

Mach décrit une construction de l'espace par le biais de nos sens, ce qui le conduit à différencier fondamentalement l'espace perçu de l'espace géométrique. Il utilise le terme d'espace physiologique : « l'espace de notre intuition sensible, que nous trouvons tout à fait au plein éveil de notre conscience » (Mach, 1908, p.327-340).

Poincaré (1914, éd 1968) a également consacré plusieurs de ses écrits à la définition de l'espace. Il introduit quant à lui le terme d' « espace représentatif », construit sur la base des espaces visuels, tactiles, et de l'espace moteur. Il démontre rationnellement sur la base de la

[3] Un exemple de définition d'un ETG global par compilation d'ETG locaux est donné dans l'appendice 10 de notre thèse (Schlosser, 2012).

notion de continuité et de coupure, que cet espace représentatif est différent de l'espace géométrique. En particulier :

- il n'est ni homogène ni isotrope ;
- « on ne peut même pas dire qu'il ait trois dimensions » (Poincaré, 1914, p.81) ;

Au contraire, l'espace géométrique est quant à lui :

- continu et infini (ce qui implique également qu'il est illimité) ;
- homogène : « c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux » (Poincaré, 1914, p.78) ;
- isotrope : « c'est-à-dire que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles » (Poincaré, 1914, p.78), en particulier, il n'y a pas de direction privilégiée comme la droite verticale ou horizontale ;
- il a trois dimensions.

De notre étude épistémologique de l'espace, nous pouvons retenir deux résultats essentiels. Le premier est que, dès lors que l'élève met en relation l'espace géométrique avec son espace représentatif, des obstacles épistémologiques forts sont prévisibles, associés notamment au caractère illimité, d'isotropie, d'homogénéité, de continuité, et au nombre de dimensions. Concernant les rapports entretenus entre ces espaces, Poincaré soutient même que nous ne représentons pas les objets extérieurs dans l'espace géométrique, mais que par contre, « nous raisonnons sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique » (Poincaré H., 1914, p.82).
L'espace représentatif n'aurait pas non plus de son coté la fonction de représentation de l'espace géométrique. Dès lors, la relation entre ces deux espaces ne peut être que de l'ordre d'un signe interprétant comme nous l'avons défini dans le paragraphe 1.1, avec toutes les implications didactiques que cela suppose.

Rajoutons par ailleurs, que « l'espace n'est pas présent dans la géométrie d'Euclide » d'après Vittori (2009, p.26). Autrement dit, les figures de la géométrie euclidienne ne sont pas en lien avec un l'espace, mais sont étudiées pour elles-mêmes. Cette idée est confirmée par Lombard (1994), qui établit clairement la distinction entre « géométrie dans l'espace » et « géométrie de l'espace ». La première formule fait référence à la géométrie grecque, celle d'Euclide, qui est une géométrie de la figure dans un contexte intra-géométrique. Au contraire, la seconde formule s'attache à la géométrie de la représentation de l'espace, celle de l'avènement de la perspective, dont les premiers pas ont débuté vers 1600. Deux paradigmes sont par conséquent possibles du côté des élèves :

- le paradigme dans lequel la figure géométrique est considérée comme objet symbolique à part entière, intégré dans le seul espace géométrique : il s'agit du paradigme de la géométrie d'Euclide ;
- le paradigme dans lequel la figure est mise en relation avec des objets matériels : il s'agit du paradigme de la géométrie "projective", ou plus modestement du paradigme de la perspective. Dans ce paradigme, le point de vue de l'observateur est essentiel.

Le deuxième résultat que nous dégageons de cette étude épistémologique, est une catégorisation des espaces en relation avec l'ETG géométrique construit lors de la séquence. Ainsi, nous distinguons cinq types d'espaces pouvant être engagés dans l'activité géométrique qui nous intéresse :

- **l'espace physique (EP0)** : couramment dénommé espace réel ou espace matériel, c'est celui du monde matériel, de l'existence minérale ou organique, recélant toute la complexité de ces êtres, dont certains éléments sont visibles et compréhensibles, et dont d'autres ne le sont pas (infiniment petit par exemple). L'espace euclidien est une approximation de cet espace à l'échelle terrestre ;
- **l'espace physiologique (EP1)** : constitué de la seule partie de l'EP0 accessible à nos

sens, en fonction des instruments d'observation retenus, et pouvant **potentiellement** créer une image sensorielle de l'espace, dans le sens de Mach (1908). Il n'est pas nécessairement continu et isotrope, puisqu'il dépend des instruments techniques et sensoriels utilisés;

- **l'espace représentatif (ER)** : il s'agit de l'espace représentatif défini par Poincaré (1914), dans le sens où l'espace potentiel EP1 est effectivement ressenti par un individu, et sensoriellement traité par celui-ci, le conduisant alors à un espace purement personnel. L'ER est tridimensionnel, mais fini, non isotrope et non continu.
- **l'espace cognitif (EC)** : par ce terme, nous entendons l'espace regroupant toute idée, potentielle ou élaborée par un individu ou groupe d'individus, à partir de l'espace représentatif ou à partir d'un ou plusieurs autres éléments de l'EC. Nous plaçons les images mentales tridimensionnelles dans l'EC, ainsi que l'espace lexical et grammatical, l'espace d'élaboration des processus logiques… Ces sous-espaces sont nécessairement connexes. En effet, les processus logiques, par exemple, s'élaborent le plus souvent sur la base de l'espace lexical et grammatical, ou sur des images mentales tridimensionnelles, ou sur les deux à la fois.
- **l'espace géométrique** : dans notre étude, il s'agira d'un espace euclidien à trois dimensions (bien que ce sont essentiellement les propriétés projectives et affines qui seront mises en œuvre). Il contient lui-même les sous-espaces affines, projectifs, topologiques.

Pour schématiser, nous pouvons dire qu'il y a un espace matériel (plus ou moins étendu), un espace des sensations et de la représentation, et un espace des idées. L'espace géométrique appartient évidemment à l'espace des idées. Celui-ci est très large, nous ne prenons en compte que les éléments qui nous sont utiles :

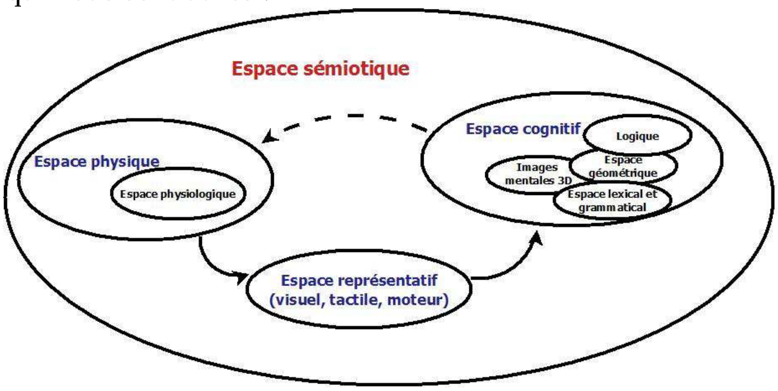



*Figure 7 – Catégorisation d'espaces.*

Notons que nous intégrons l'ensemble de ces espaces dans un espace commun, l'espace sémiotique, car nous nous appuyons sur le modèle de Peirce (1931-1935) pour lequel tout objet matériel, mais aussi toute pensée, toute idée, toute sensation ou sentiment est un signe.

## 2.2 Étude du concept de capacités spatiales

Notre objet de recherche étant la construction et le fonctionnement des ETG personnels, nous avons été amenés à étudier les facteurs externes dont ils dépendent. En particulier, l'étude du concept d'espace nous ayant conduit à une typologie, ainsi qu'à des paradigmes distincts d'ETG, nous avons dû également prendre en compte la question des capacités spatiales.

Les recherches concernant les capacités spatiales sont anciennes et relèvent initialement du domaine de la psychologie. Elles constituent une partie d'une réflexion plus générale concernant les capacités cognitives. Dès 1938, Thurstone construisit des batteries de tests d'intelligence, destinées à évaluer chaque composante des capacités intellectuelles. Son modèle de l'intelligence est structuré autour de capacités élémentaires, les « Primary Mental Abilities » (Thurstone, 1938) (PMA), au nombre de sept : les aptitudes verbales composées de la compréhension du langage et de la fluidité verbale, les aptitudes numériques (en particulier le calcul), les aptitudes spatiales composées de la visualisation spatiale et de la rapidité de perception et d'analyse des relations géométriques, les aptitudes logiques (le raisonnement) et les capacités de mémorisation (notamment la mémorisation des associations d'objets).

Krutetskii (1976) considère principalement deux modes de pensée : la pensée verbale-logique et la pensée visuelle-graphique. Il soutient que ces modes de pensée sont plus ou moins sollicités par les élèves lors de l'activité mathématique, ce qui l'amène à distinguer deux profils différents : les élèves analytiques, qui tendent plutôt à utiliser des procédures logiques et analytiques (y compris pour des problèmes pouvant être résolus par des approches visuelles relativement simples), et les élèves visuo-graphiques qui tendent à utiliser des schèmes visuels (y compris pour des problèmes qui se résolvent plus aisément avec des méthodes analytiques). Ces profils semblent trouver leur origine dans les capacités des individus. Presmeg (2008) nous rappelle que le modèle de pensée de Krutetskii, permet de positionner sur un graphique les mesures de ces deux modes de fonctionnement cognitif :

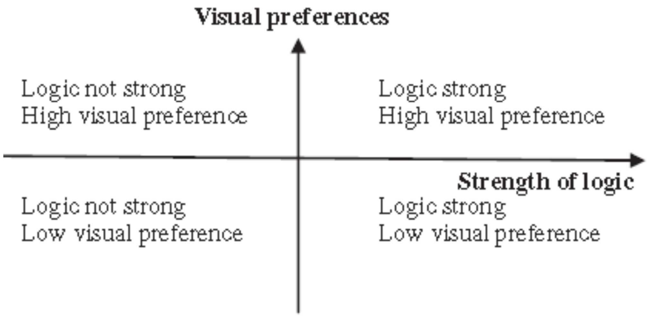



*Figure 8 – Modes de fonctionnement cognitif.*

Concernant plus particulièrement la définition des capacités spatiales, Lohmann (1988) les définit comme des capacités à générer, retenir, reconvoquer et transformer des images visuelles bien structurées. Il modélise ces capacités en trois composantes :

- la visualisation spatiale (Vz) : comprendre des mouvements imaginaires dans l'espace à trois dimensions (mouvements de l'objet entier ou pièce par pièce), ou manipulation d'objets mentalement ;
- l'orientation spatiale (SO) : concerne les changements de points de vue d'un même objet, ce qui requiert des capacités de rotations mentales de l'objet intégral (alors que Vz pouvait requérir des mouvements de parties de l'objet). Pour SO, l'orientation du corps du sujet observateur est essentielle, ce qui n'est pas le cas pour SR;
- les capacités de rotations spatiales (SR) : capacité à réaliser une rotation mentale d'un objet spatial, simplement et rapidement.

Maier (1996) quant à lui ajoute à ces composantes précédentes les capacités de perception spatiale et les relations spatiales mentales (sollicitées par exemple pour la construction d'un patron).

Dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques, Bishop (1980) retient, sur la base de certains travaux de psychologie, deux types de capacités spatiales :

- « Interpreting figural information » (IFI) : capacité de compréhension des représentations spatiales et du vocabulaire spatial, sollicitée dans les travaux de géométrie, les dessins, graphiques, et les divers diagrammes ;
- « visual processing » (VP) : plus dynamique que l'IFI, ce processus engage la

visualisation et la traduction d'informations portant sur des relations abstraites et non-iconiques, en des éléments iconiques. En particulier, la manipulation et la transformation de représentations visuelles et d'images visuelles sont des VP.

De cette étude des capacités intellectuelles et des capacités spatiales, nous retenons les facteurs externes suivants aux ETG personnels :

- la pensée verbale ;
- la pensée visuelle-graphique (elle sollicite les capacités spatiales définies plus haut) ;
- les capacités logiques ;
- les capacités de mémorisation.

## 2.3 Réalisation d'un test de capacités spatiales et de connaissances géométriques

Les facteurs externes des ETG sont donc notamment composés de capacités spatiales. Celles-ci mettent en relation les espaces que nous avons décrits plus haut. Afin de déterminer des différences interindividuelles et des profils d'ETG personnels, nous avons construit un test de capacités spatiales et de connaissances géométriques. Nous l'avons soumis aux élèves enregistrés sur l'intégralité de la séquence de géométrie dans l'espace, ainsi qu'à une deuxième classe afin d'avoir un échantillon plus important. Ce test a été réalisé en fin de séquence. Il est constitué de trois parties dont certains types de questions sont reproduits en annexe de cet article.

Le test comprend au total 56 questions. La première partie concerne les capacités de perception spatiale telles qu'elles sont définies par Lohmann (1988), c'est- à-dire les rotations spatiales, la visualisation spatiale et l'orientation spatiale. Les questions reprennent respectivement des parties des tests suivants : le test MRT (Mental Rotation Test) introduit par Venderberg et Kuse (1978) et reprenant les bases des figures originales de Shepard et Metzler (1971), le test MCT (Mental Cutting Test) développé dans le CEEB (College Entrance Examination Board) en 1939 du Educational Testing Service (ETS) aux Etats-Unis, et enfin le test de Guay (1976), modifié par Lippa (2002). La seconde partie du test est intitulée « capacités géométriques » et sollicite également des capacités de visualisation spatiale, mais dans un contexte de représentation de figures géométriques. Il reprend quelques questions du test de Baracs (1987). Enfin, la troisième partie porte sur des connaissances géométriques plus formelles. Certaines questions ont pour objectif d'identifier la capacité de l'élève à dépasser la représentation figurale par un raisonnement discursif (questions du type des deux premiers exemples de la partie III, donnés en annexe). D'autres questions ne fournissent aucun dessin et convoquent la capacité à créer éventuellement des images mentales, mais surtout à raisonner et à relier certaines notions entre elles (questions du type du troisième et du quatrième exemple de la partie II, donnés en annexe). L'exemple emblématique est celui dans lequel il est demandé aux élèves de qualifier l'assertion suivante : « trois plans ont un seul point en commun ». Sur un échantillon de 20 élèves, seuls trois élèves ont répondu correctement. Bien évidemment, la formulation sollicite des compétences de logique générale quant à la distinction des propositions du type « toujours vrai » et « vrai en général ». Mais cette question permet surtout d'examiner dans quelle mesure les élèves envisagent diverses situations spatiales à partir de mêmes objets géométriques. Ici, il s'agit de connaître les différentes configurations formées par trois plans de l'espace : parallèles (ou confondus), un plan sécant à deux plans parallèles, trois plans sécants en une droite ou trois plans sécants en un point. L'assertion du test que nous analysons ici, fait référence à cette quatrième configuration. Elle est intéressante, car elle montre clairement la difficulté des élèves à « raccorder par le haut » les concepts géométriques. En effet, une grande partie des activités de la séquence se fait à partir d'un tétraèdre. Or, il suffit de prendre trois plans déterminés par trois faces d'un tétraèdre pour avoir la configuration de trois plans sécants en un point. Par ailleurs, le théorème donné sous la dénomination de « théorème du toit » dans le cours, comporte deux configurations dont l'une d'entre elles représente précisément la situation de trois plans sécants en un point. Malgré cela, la plupart des élèves n'a pas su faire le lien entre ces situations et l'assertion en question.

Voici les résultats globaux obtenus aux trois parties du test par les 20 élèves de l'échantillon:

| | Partie I (20 questions) | Partie II (11 questions) | Partie III (25 questions) |
|---|---|---|---|
| Médiane | 12 (60% de réussite) | 6,5 (59% de réussite) | 11 (44% de réussite) |
| écart-type | 2,8 | 1,9 | 2,9 |

On observe une baisse des performances dans la troisième partie. Par ailleurs, si l'on réunit les résultats obtenus dans les deux premières partie du test pour en former une variable aléatoire, on constate qu'elle évolue dans le même sens que celle associée aux résultats de la partie III, mais avec une corrélation faible ($r \approx 0{,}33$).

Nous indiquons dans le tableau suivant les profils synthétiques élaborés dans chaque partie du test, pour trois élèves enregistrés lors de l'ensemble de la séquence. Ces profils sont hiérarchisés de D à A+ dans un ordre croissant de performance :

| Elève | Perception spatiale | Capacités géométriques | Connaissances géométriques | |
|---|---|---|---|---|
| | | | code du dessin | propriétés géométriques |
| Anne | B | C | A+ | B |
| Hélène | A+ | C- | A+ | A |
| Saliha | D | C- | B- | D |

Nous avons vu plus haut que Krutetskii distinguait la préférence verbale logique de la préférence visuelle-figurale, et qu'il était possible de situer chaque élève sur un « cadran » comprenant ces deux axes. Ainsi, notre test nous conduit à positionner approximativement ces trois élèves dans les cadrans suivants :

- Hélène dans le cadran « préférence visuelle-graphique et verbale logique fortes » ;
- Saliha dans le cadran « préférence visuelle-graphique et verbale logique faibles » ;
- Anne dans le même cadran qu'Hélène, mais avec des valeurs plus faibles pour la préférence visuelle-graphique.

## 3. LE FONCTIONNEMENT DES ETG PERSONNELS : LES PROCESSUS COGNITIFS MIS EN ŒUVRE PAR LES ELEVES AU SEIN DES ETG

Ainsi, les capacités spatiales des élèves sont inégales. Nous avons donc cherché à identifier leur influence dans le fonctionnement des ETG personnels et la manière dont ils déterminent des profils d'ETG. Pour cela, nous avons tout d'abord étudié les types de processus cognitifs en jeu dans ces ETG. Lors de la résolution d'un exercice de géométrie spatiale, trois types de processus sont engagés : des processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux. Tous ces processus sont susceptibles d'être mis en œuvre, de manière concomitante ou complémentaire. Mais l'analyse des séances de recherche enregistrées fait apparaître des inclinations plus ou moins fortes des ETG personnels vers certains types de processus. L'importance qui est accordée aux différents processus cognitifs dans les résolutions de problèmes détermine l' « empreinte » de l'ETG, voire le paradigme. Ces empreintes d'ETG, sont marquées par deux fonctions : la fonction de pilotage et de la fonction de contrôle.

En effet, nous avons constaté qu'il existait des ETG majoritairement pilotés par la visualisation (préférence visuelle-graphique) et d'autres majoritairement pilotés par le référentiel théorique (préférence logique-analytique). En d'autres termes, le pilotage peut être basé sur les signes iconiques du dessin (ou de la représentation mentale tridimensionnelle), ou au contraire sur les signes symboliques (les mots, les théorèmes…). Mais les ETG ne sont jamais à pilotages exclusifs en géométrie de type II. Il y au contraire interaction entre la visualisation et le référentiel dans le sens d'un contrôle mutuel. Ainsi :

- la visualisation peut jouer une fonction de contrôle vis-à-vis d'un ETG piloté par le référentiel ;
- le référentiel peut à son tour jouer une fonction de contrôle d'un ETG piloté par la visualisation.

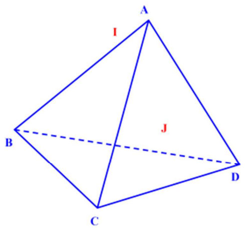
Dans tous les cas, nous avons observé que les empreintes étaient relativement stables. Par contre, un phénomène de louvoiement entre le figural et le discursif a été fréquemment constaté. Nous renvoyons le lecteur à notre thèse (Schlosser, 2012) pour une analyse détaillée de ces notions d'empreinte, de pilotage et de contrôle. Pour des raisons de format, nous nous bornons dans ce texte à la présentation des trois processus cognitifs fondamentaux identifiés chez les élèves lors de la résolution d'exercices de géométrie dans l'espace.

Notons bien avant tout que la distinction entre la dimension syntactique, sémantique et pragmatique du signe ne relève pas d'une dichotomie, mais de processus complémentaires. En particulier, un signe est nécessairement mis en relation avec un objet et un interprétant, c'est-à-dire qu'une signification lui est attribuée, mais celle-ci peut être réduite par exemple à une simple perception iconique, voire une sensation ou un sentiment (dans le cas d'un qualisigne[4]). Pour autant, il est fondamental d'identifier la manière dont cette signification est attribuée.

### 3.1 Des processus qualitatifs.

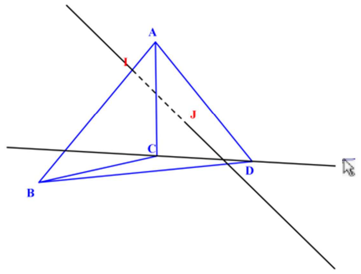
Par processus qualificatif, il convient d'entendre le fait de ne tenir compte que de l'aspect matériel du signe, de son apparence : le signe est pris en l'état. Ce type de processus ne met pas en œuvre d'artefact géométrique, mais uniquement le système visuel (pouvant certes être considéré comme un artefact, mais non géométrique). Il tient compte des règles syntactiques du dessin géométrique, ainsi que du calepin visuel présenté dans le paragraphe 1.2. Ces processus qualitatifs sont nécessairement mis en place lors des activités géométriques. Prenons un exemple observé lors de la séquence de classe de notre corpus. L'énoncé fourni aux élèves est le suivant :

> « On donne un tétraèdre ABCD, un point I sur l'arête [AB] et un point J dans la face ACD. Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD). »

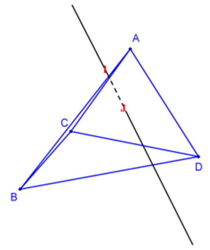



Voici un extrait de dialogue enregistré lors de la recherche :

A: Tu veux qu'on commence à faire CD?
S: Ouais, parce que j'sais pas... c'est
A: Ouais




[4] Voir pour cela Schlosser (à paraître dans les actes ETM4).




[…]
S: On va … pour voir... [rotation de la figure]

A: Elles se coupent?
S: Ben sûrement.
A: On va... fait un truc genre baisse...qu'on voit [rotation de la figure vers le bas], ouais voilà...
S: Ben ouais!
A: Après si tu vas jusqu'en bas, enfin si tu la soulèves genre [parle de la façon de tourner la figure]
S: Comme-ça?
A: Ouais, voilà .

Cet extrait montre bien que les élèves s'appuient sur la visualisation iconique de deux droites sécantes sur le dessin. Bien entendu, le logiciel est utilisé en tant qu'artefact pour modifier les points de vue, mais aucun argument n'est mis en œuvre pour savoir si les droites (IJ) et (BC) sont bien concourantes. Ce type de processus qualitatif peut donc être représenté de la manière suivante sur notre modèle d'ETG (flèche jaune) :

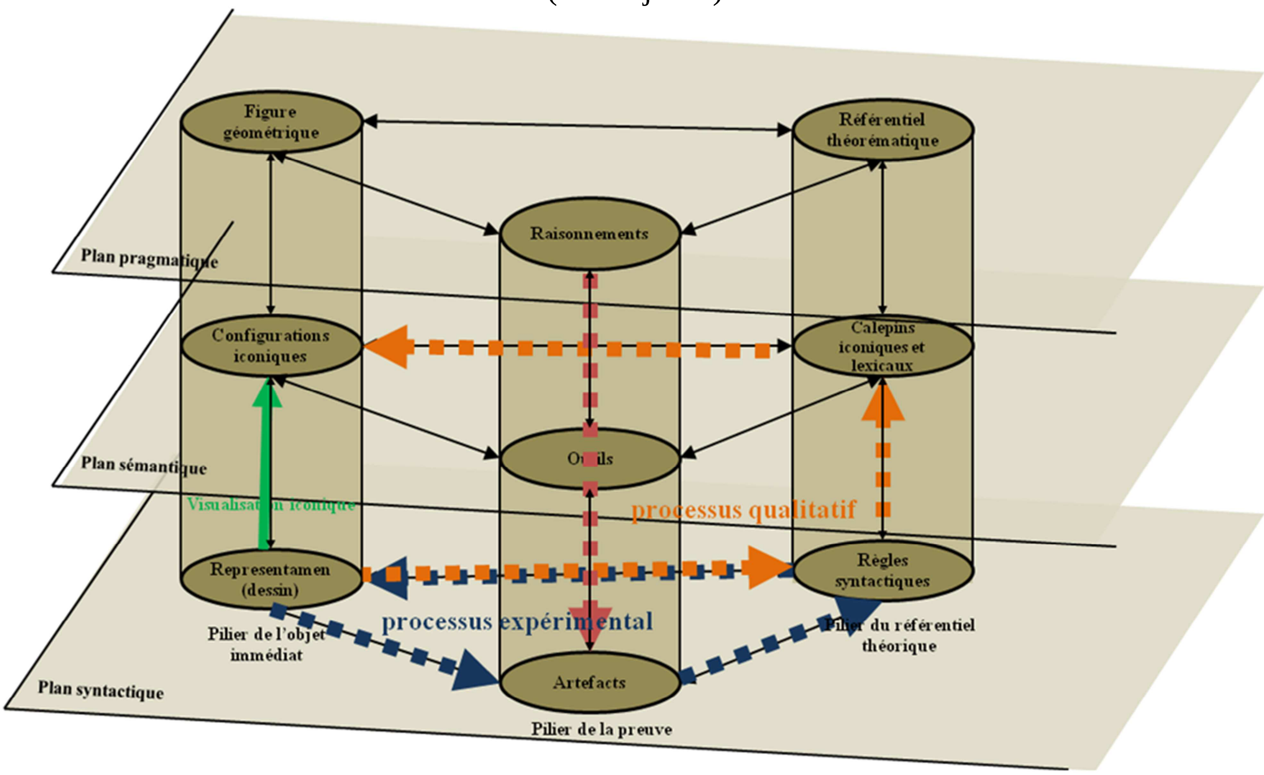


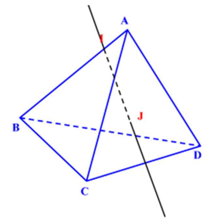

*Figure 9 – Représentation d'un processus qualitatif.*

Ce processus qualitatif peut être accompagné d'un processus expérimental au niveau syntactique (1ère strate de l'ETG, flèches bleues). Les ETG à pilotage iconique sont dominés par ce type de processus.

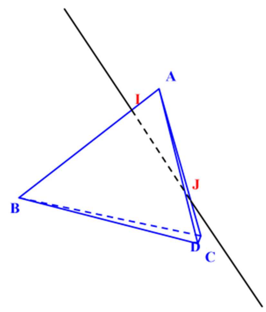
## 3.2 Des processus expérimentaux (au niveau sémantique).

L'élève peut chercher également à donner une dimension informative au representamen, concernant l'objet qu'il représente par le biais d'outils (notamment par des compositions ou des décompositions structurales). Cela consiste donc en une extraction d'informations portant sur l'objet, par le biais du signe qui le représente (mouvement allant du signe à l'objet). Voici un exemple tiré du même exercice que ci-dessus, mais concernant un autre binôme de la classe :

C : alors attends…[Visualisation à l'aide du curseur de la souris]
En fait, j'ai pas trop compris il faut qu'on fasse quoi là ? Qu'on trouve [inaudible] avec ça là ?




H : oui
C : mais euh, ça fait ça de toute façon. [désigne l'intersection de (IJ) avec (CD) sur le dessin 2D]
H : à mon avis on prolongerait [désignation et prolongement de (BC) à l'aide du curseur de la souris]
C : C'est hors sujet parce que c'est pas dans ce plan-là. Ils demandent ça, l'intersection, mais pas dans le plan-là
H : en fait il est pas… Comment dire, c'est pas une intersection [inaudible] c'est juste une intersection de deux lignes sur un dessin
C : ouais
H : tu vois ce que je veux dire ?
C : ouais [blanc]
H : le plan…
C : le plan, en fait c'est là le plan, le truc qui est par terre
H : ouais, par terre ?
C : oui enfin bref. Faut qu'on trouve un truc, avec ça, un point qui est dedans, eh bien c'est là
H : c'est pas là !
C : je vois trop pas les trucs
H : je vois trop pas non plus si IJ elle passa déjà là là ou si elle passe carrément à côté
C : quoi ? Mais non… Mais non…
[Rotation de la figure]
H : tiens, regarde, elle passe à côté, tu la vois la p… [mot argotique]
H : ben en fait, non en fait, non il faut pas les prolonger, si tu prolonges tu vois BC et BD, tu vois genre elle va arriver là et là, enfin elle arrive là, mais le problème c'est qu'il faut… Il faut trouver des points !




C : eh bien AD
H : pourquoi AD ?
C : je sais pas. Ah ben non je suis conne, comme je l'ai vue comme ça, je me suis dit euh
[nouvelle rotation de la figure puis replacement de celle-ci dans la position d'origine]
[blanc] [les droites (IJ), (AC), (BC) sont prolongées à l'aide du curseur de la souris].

Sur cet exemple, nous trouvons deux processus différents : le processus qualitatif pour l'élève C et expérimental pour l'élève H. En effet, tout indique que ce deuxième élève produit une image mentale tridimensionnelle (l'objet), mise en relation avec le dessin (le representamen), à partir de laquelle il travaille. Ce type de processus prend également une place importante dans les ETG à pilotage iconique.

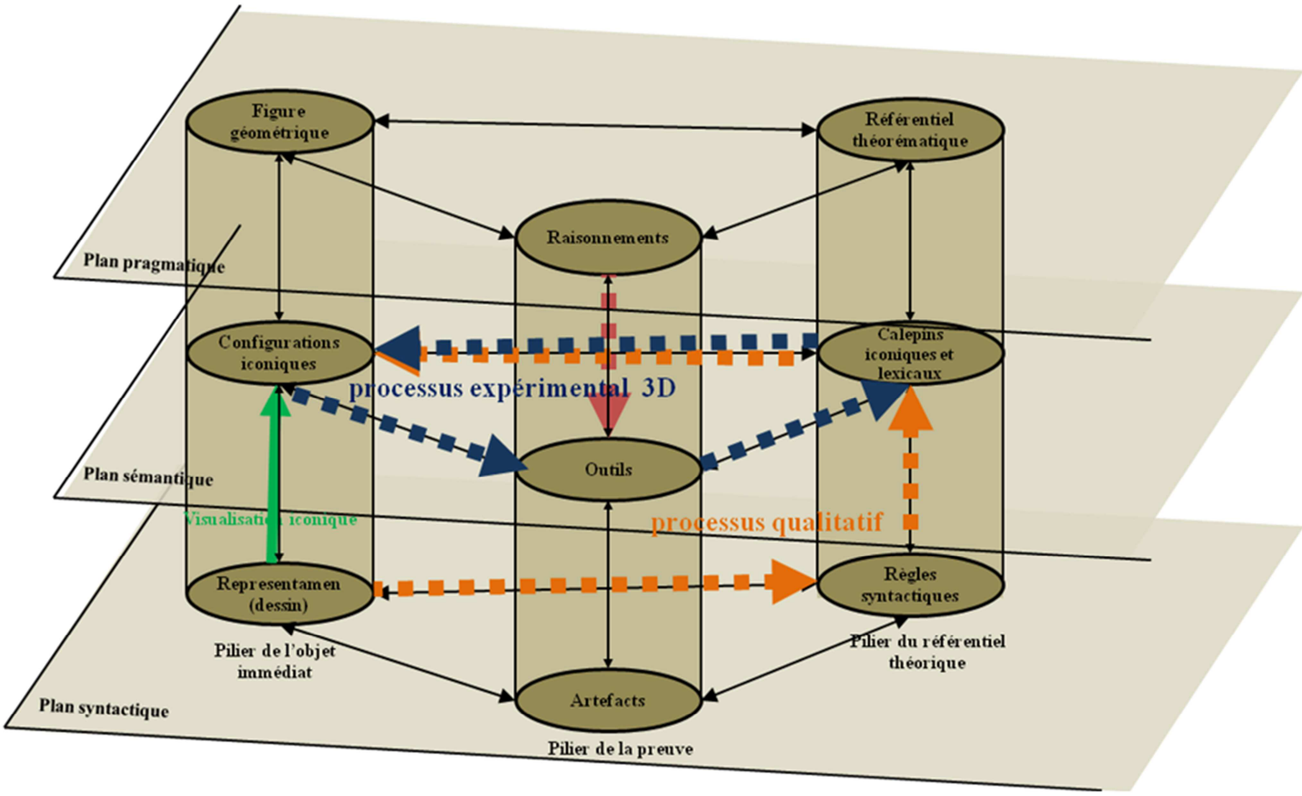



*Figure 9 – Représentation d'un processus expérimental au niveau sémantique.*

### 3.3 Des processus argumentaux

Il s'agit du processus « final » en jeu dans ce que l'on entend par « géométrie hypothético-déductive ». Ce processus fait intervenir le registre discursif, puisqu'il engage un raisonnement. Il se situe donc dans la généralité. Ce raisonnement en question peut être modélisé par les outils de la logique. Dans la logique classique, le processus argumental met en œuvre des théorèmes qui permettent de passer d'une prémisse à une conclusion.

Reprenons pour exemple notre premier binôme, lors du même exercice :

> A: IJ il est dans ACD [blanc]. On n'a pas une connerie genre il est dans ACD et c'est dans BCD, c'est deux plans ? [blanc] C'est la même chose qu'on a fait avant mais dedans…
> S: Comment ?
> A: C'est la même chose qu'on a fait avant en plus [long blanc].
> Réfléchissons, pour faire une intersection, il faut que IJ et BCD soient coplanaires [blanc].
> Quoique, quand tu regardes sur la fiche, il y a pas marqué qu'il faut que ce soit coplanaire.
> [blanc et exploration des commandes dans les menus déroulants]
> S: Tu crois pas qu'on demande de l'aide à la prof?
> A: Ouais.

Même si ce processus n'a pas pu aboutir à la solution, on voit de quelle manière l'élève A cherche à construire une heuristique discursive, notamment sur la base de l'heuristique d'un exercice précédent et de théorèmes du cours. Les ETG à pilotage symbolique sont dominés par ce type de processus.

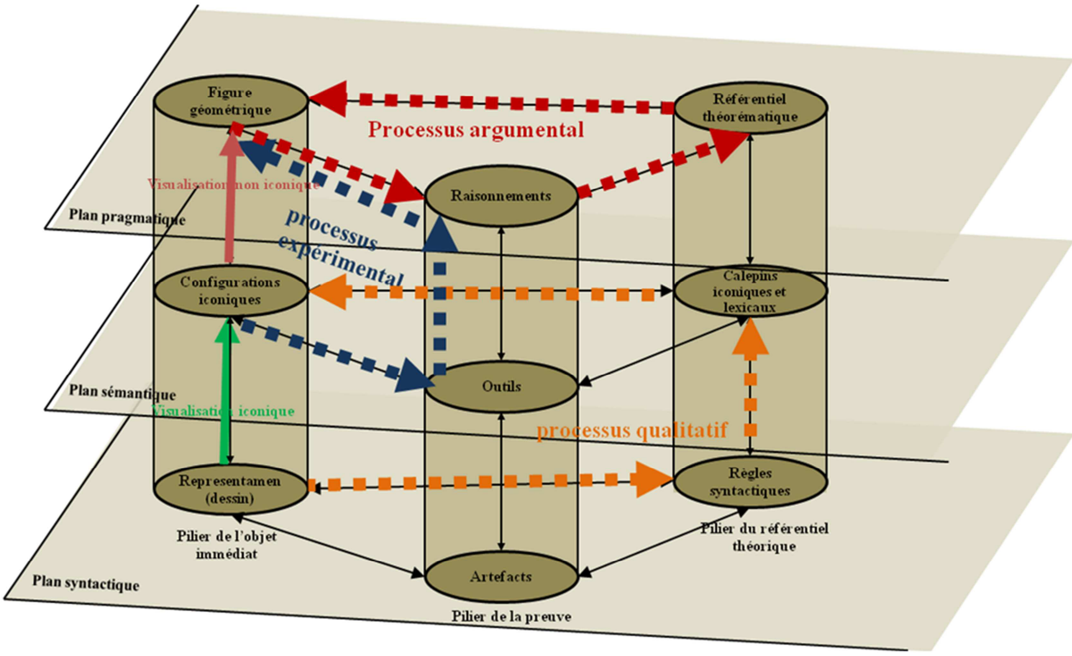



*Figure 9 – Représentation d'un processus argumental.*

## CONCLUSION

L'objectif de cet article était de présenter le fonctionnement des espaces de travail géométriques personnels des élèves de lycée, dans le cas de la géométrie synthétique dans l'espace. Nous avons modélisé l'ETG personnel d'un élève en trois strates, à savoir les niveaux syntactiques, sémantiques et pragmatiques. Pour chacun de ces trois niveaux, nous retrouvons les trois piliers fondamentaux que sont les objets, la preuve et le référentiel théorique. D'un point de vue sémiotique, la résolution d'un problème de géométrie dans l'espace conduit les élèves à mettre en œuvre des processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux. Cette modélisation du plan cognitif de l'ETG personnel s'appuie sur la sémiotique triadique de Peirce, dont les fondements sont la distinction entre des objets premiers, seconds et troisièmes. Ainsi, concernant les objets du registre figural, nous avons été amenés à faire la distinction entre la prise en compte iconique, indiciaire ou symbolique du signe. L'exemple du dessin de deux droites sécantes montre bien ces différences de point de vue sémiotique. Il montre par ailleurs toute la richesse cognitive de la géométrie dans l'espace, dont il est selon nous préjudiciable de se passer dans la formation de tout citoyen.

Pour des raisons de format d'article, nous ne présentons dans ce texte qu'une partie de l'aspect fonctionnement des ETG personnels, et renvoyons le lecteur à notre thèse pour l'aspect construction, mais également pour les notions de treillis sémiotique, et de pilotage et contrôle des ETG (distinction entre pilotage iconique et pilotage symbolique). Les empreintes des ETG sont fortement dépendantes de facteurs externes, que sont les capacités de visualisation et de traitement spatial que nous avons pu évaluer grâce à un test complet. Ainsi, les élèves présentant de grandes capacités spatiales sont enclins de manière durable à travailler au niveau sémantique (deuxième strate du plan cognitif de l'ETG), notamment en considérant le dessin comme un signe indiciaire d'une image mentale tridimensionnelle (signe iconique) sur laquelle ils réalisent leur recherche. D'autres élèves louvoient entre un pilotage argumental et un pilotage iconique de l'ETG, au gré de leur réflexion (louvoiement entre la deuxième et la troisième strate). Ainsi, l'enseignement gagnerait à assumer des activités de visualisation spatiale dédiées, et à les distinguer des tâches de traitement argumental pur.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


AID-CREEM. *Geospace (version 2007*). http://www2.cnam.fr/creem/.

BARACS, J. (1987). Exercices de perception structural (2ème partie). *Bulletin AMQ, 1987,* 20-23.

BISCHOP, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education - a review. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 71-81.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 309-336.

CHAACHOUA, H. (1997). Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. *Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1).*

CHEVALLARD, Y. (2002). *Organiser l'étude 1. Structures et fonctions.* Grenoble : La Pensée Sauvage, 3-32.

DELEDALLE, G. (1979). *Théorie et pratique du signe. Introduction à la sémiotique de Charles S. Peirce*. Paris : Payot.

DUVAL, R. (2005). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée mathématiques. *XXXII ième colloque COPIRELEM,* 67-89.

EINSTEIN, A. (1954). Préface. In M. Jammer (Ed), *Concepts d'espace, une histoire des théories de l'espace en physique* (traduction de l'ouvrage original Jammer, M. (1993 – 3e ed.) *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*). Paris : VRIN.

GUAY R. MC DANIELS E. (1976, modifié par Lippa & al. (2002)). *The Visualization of Viewpoints*. The Purdue Research Foundation.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

JAMMER, M. (2008). *Concepts d'espace, une histoire des théories de l'espace en physique* (traduction de l'ouvrage original Jammer, M. (1993 – 3e ed.). *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*). Paris : VRIN.

KRUSTETSKII, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago*:* University of Chicago Press.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

LOHMAN, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. *Advances in the psychology of human intelligence*, *4*.

LOMBARD, PH. (1994). La « géométrie de l'espace » comme obstacle épistémologique. *Colloque Inter-IREM d'Histoire et d'Epistémologie-Cherbourg*.

MACH, E. (1908). *La connaissance et l'erreur* (traduit sur la dernière édition allemande, par le Dr Marcel Dufour). Paris : Flammarion.

MAIER, P.H. (1996). Spatial geometry and spatial ability- How to make Solide geometry solid? In *: E.* Cohors-Fresenborg & K. Reiss & G. Toener & H.G. Weigand, *Selected papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996,* Osnabreck, 63-75.

Ministère de l'Education Nationale – CREEM. *Interesp (version 1*, 1998).

PEIRCE, C.S. (1931-1935). *Collected Papers*. Cambridge: Harvard University Press.

PEIRCE, C.S. (textes rassemblés par DELEDALLE G.(1978)). *Ecrits sur le signe*. Paris : Editions du Seuil.

POINCARE, H. (1914 ed 1968). *Science et hypothèse*. Paris : Flammarion.

PRESMEG, N. (2008). Spatial Abilities Research as a Foundation for Visualization in Teaching and Learning Mathematics. In P. Clarkson & N. Presmeg (2008). *Critical Issues in Mathematics Education* (Chapitre 6, pp.83). Springer Science & Business Media, LLC.

SCHLOSSER, F. (2012). Construction et fonctionnement d'espaces de travails géométriques personnels d'élèves. Cas de la géométrie dans l'espace en 1ère L à option mathématique. *These de l'Université Denis- Diderot Paris 7*.

SCHLOSSER, F. (2014), Pragmatique de la construction et du fonctionnement des espaces de travail géométriques. Etude de cas en géométrie dans l'espace synthétique au lycée. *Symposium ETM4 de madrid* (*à paraître*).

SHEPARD, R.N. & METZLER, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science, 171(3972),* 701-703.

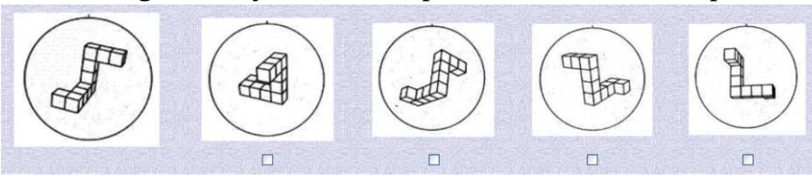
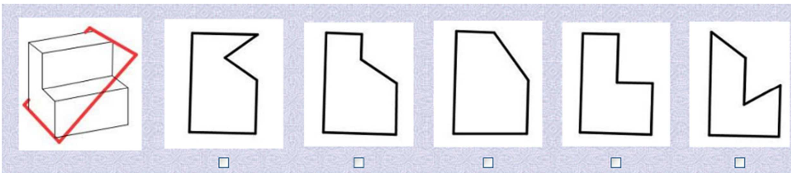
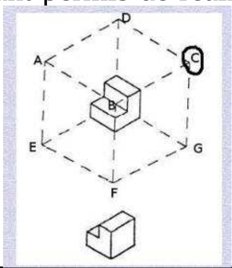
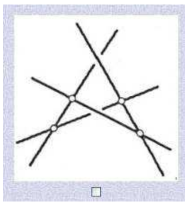
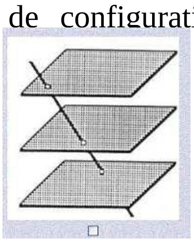
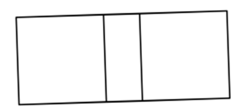
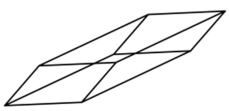
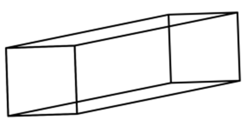
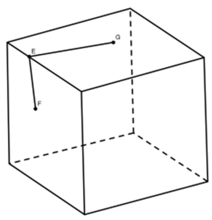
THURSTONE, L.L. (1938). *Primary Mental Abilities.* Chicago: University of Chicago Press.

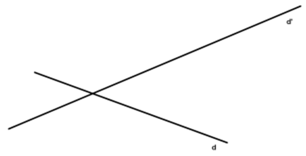
VANDERBERG S.G. & KUSE, A.R. (1978). Mental Rotation, a group of three dimensional spatial visualization*. Perceptual and Motor Skills*, *47*.

VITTORI, T. (2009). *Les notions d'espace en géométrie – De l'Antiquité à l'Age classique*. Paris : L'Harmattan

## ANNEXE

## EXEMPLES DE QUESTIONS PROPOSEES DANS LE TEST DE CAPACITES SPATIALES ET DE CONNAISSANCES GEOMETRIQUES

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Partie I :</u> perception spatiale (20 questions)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les élèves doivent désigner l’objet modèle représenté suivant deux points de vue différents (5 questions) : </td></tr>
<tr><td colspan="2">Il s’agit d’identifier la section plane correspondant à la configuration donnée (5 questions) : </td></tr>
<tr><td colspan="2">Il faut identifier le point de vue ayant permis de réaliser un nouveau dessin d’un objet donné (5 questions) 
</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Partie II :</u> capacités géométriques (11 questions)</td></tr>
<tr><td>Identifier si ce type de configuration est possible (5 questions) </td><td>Identifier si ce type de configuration est possible (6 questions) : </td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Partie III :</u> connaissances géométriques (25 questions)</td></tr>
<tr><td>Identifier parmi 10 dessins ceux qui peuvent représenter un cube, par exemple :<br><br><br></td><td>Les segments [EF] et [EG] sont placés sur deux faces adjacentes d’un cube. E est sur l’arête adjacente à ces deux faces. Les segments [EF] et [EG] sont-ils perpendiculaires ?<br>□ Toujours vrai<br>□ Vrai en général<br>□ Faux en général<br>□ Toujours faux<br></td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| *Sans qu'aucun dessin ne soit fourni, répondre à 10 questions de ce type :*<br>Trois plans ont un seul point en commun :<br>□ Toujours vrai<br>□ Vrai en général<br>□ Faux en général<br>□ Toujours faux<br><br>Si deux droites sont contenues respectivement dans deux plans sécants, alors ces droites sont sécantes :<br>□ Toujours vrai<br>□ Vrai en général<br>□ Faux en général<br>□ Toujours faux | <br>Les droites d et d':<br>□ sont sécantes<br>□ ne sont pas sécantes<br>□ le dessin ne permet pas de répondre |

# LE TABLEAU BLANC INTERACTIF, UN OUTIL POUR LA CLASSE DE MATHEMATIQUES ?

Grégory **TRAIN**

LDAR, Paris 7

gerg.train@gmail.com

**Résumé**

Nous examinons dans ce texte les pratiques enseignantes de six professeurs de mathématiques utilisant la technologie Tableau Blanc Interactif (TBI), à partir d'entretiens semi-directifs centrés sur les usages du TBI et leur évolution. Les six enseignants choisis appartiennent à deux catégories d'utilisateurs volontairement contractées : trois sont des enseignants ayant pleinement intégré l'outil dans leurs pratiques, trois ne disposent pas du TBI dans leur classe et en ont un usage seulement épisodique. L'étude des usages consiste en particulier à l'examen de l'orchestration de la classe médiée par le TBI (*dimension orchestrative des usages*). A cet effet, les concepts de *familles de ressources* et de *moments didactiques* sont proposés pour compléter ceux de *configurations didactiques* et *modes d'exploitation* usuellement associés à la question de l'orchestration de la classe (Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010).

L'étude met en évidence des régularités fortes au niveau des usages stabilisés de l'outil et de leurs genèses, régularités qui transcendent les deux catégories d'enseignants. Un modèle de développement de compétences dans l'utilisation de l'outil est proposé (*dimension instrumentale* des usages). La dimension *orchestrative* se révèle très dépendante de la dimension instrumentale, en particulier en ce qui concerne la conception de ressources en direction de l'outil. Les évolutions identifiées concernent ces ressources mais également les moments de l'étude investis et la gestion des phases collectives.

De manière générale, nous montrons que si le renforcement de phases collectives est confirmé, ce n'est pas pour autant que l'on peut qualifier les pratiques d'ostensives. Chez les utilisateurs réguliers de l'outil, il semble apparaître un enrichissement des possibilités de l'action conjointe enseignant-élèves au niveau collectif. Finalement, loin de contraindre un certain style d'enseignement, le TBI apparaît pouvoir offrir des possibilités d'optimisation de la gestion et de l'orchestration du travail mathématique de la classe, même si cela engage un investissement fort chez les enseignants et un *coût instrumental* conséquent de conception de ressources pour l'outil TBI. En revanche, on note que certains usages et potentialités des TBI traditionnellement mis en avant, notamment ceux relatifs à l'emploi de l'enregistrement et le rappel d'écrans pour construire une *mémoire didactique* de classe ne sont pas repris par les enseignants.

**Mots clés**

Tableau blanc interactif - Pratiques enseignantes - Approche instrumentale - Théorie de l'action conjointe en didactique - Dimension instrumentale - Dimension orchestrative - Conception dans l'usage

## PREAMBULE

*Le propos principal de ce texte est l'étude des pratiques médiées par la technologie Tableau Blanc Interactif (TBI) de six enseignants. Ce travail est issu de notre travail de thèse intitulé Le tableau blanc interactif, un outil pour la classe de mathématique ? En amont, nous proposons une présentation succincte de ce travail et en particulier la trajectoire de l'étude qui nous a conduit à l'examen de ces six enseignants utilisateurs de l'outil et des catégories dont ils sont issus.*

Notre travail de thèse concerne l'usage du tableau blanc interactif (TBI) dans l'enseignement des mathématiques. Ce nouvel outil, apparu récemment dans les classes, se situe au carrefour de deux mondes : celui du tableau noir aux usages quasi-naturalisés - et celui du logiciel avec ses techniques didactiques propres. Il apparaît dès lors et à plusieurs égards distinctif des autres outils technologiques étudiés jusqu'ici par la recherche didactique.

Nous étudions le développement des usages des TBI en mathématiques en poursuivant principalement deux enjeux : disposer d'une meilleure compréhension des spécificités de cette technologie - appréhender les implications didactiques de ces spécificités dans l'enseignement des mathématiques. L'hypothèse est faite de l'existence de tensions entre les fonctionnalités interactives de l'outil et ses fonctionnalités illustratives, moins coûteuses et s'inscrivant plus volontiers dans les pratiques existantes. Les usages du TBI sont en conséquence pensés dans leur diversité, diversité questionnée en termes d'usages privilégiés, d'adaptations spontanées et d'évolutions.

Du point de vue théorique, la thèse s'appuie sur deux piliers : l'approche instrumentale (Rabardel, 1995 ; Rabardel & Pastré, 2005) en prenant en compte ses évolutions récentes dans le champ de la didactique des mathématiques, en particulier son extension à l'enseignant (Trouche, 2005 ; Drijvers et al., 2010) - la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) (Sensevy & Mercier, 2007). Ce second choix est notamment motivé par le fait que le TBI est d'abord conçu comme un artefact à destination de l'enseignant, et que l'expérience montre qu'il est mobilisé prioritairement dans des jeux collectifs entre enseignant et élèves pour l'étude desquels la TACD fournit des outils intéressants.

L'apport théorique de ces travaux relève principalement de l'articulation de ces deux cadres : elle permet de considérer la constitution des artefacts en instruments en un processus conjoint entre professeur et élèves et d'interroger spécifiquement l'activité de conception de ressources menées par les enseignants au sein de l'environnement du TBI. En particulier, les marges de manœuvre laissées à l'enseignant dans cette tâche de conception conduisent à prendre en compte une nouvelle figure professorale : celle d'un enseignant concepteur apparaissant comme trait d'union entre les concepteurs de l'outil et un enseignant utilisateur devant la classe.

Une analyse de la littérature didactique relative au TBI (essentiellement du Royaume-Uni, le pays ayant fait l'objet d'un vaste plan d'équipement il y a plusieurs années déjà) montre la spécificité des problèmes posés par l'usage éducatif de cette technologie, comparativement à ceux posés par les technologies étudiées jusqu'alors, avec notamment une tendance au renforcement de pratiques magistrales ostensives. Une question d'importance émerge en particulier : comment plus d'interactivité *technique*[1] entre TBI et utilisateurs est susceptible (ou non) d'être reliée à plus d'interactivité *pédagogique* entre enseignant et élèves ? Pour l'heure, cette question reste résistante et la littérature française, encore parcellaire, apparaît peu sensibilisée à de telles interrogations.

[1] C'est-à-dire la possibilité de disposer d'un écran devant la classe répondant aux sollicitations des utilisateurs et accueillant diverses ressources (images, sons, animations, vidéos...) qu'il est possible de contrôler via cet écran.

Parallèlement, l'étude de la technologie TBI et son évolution depuis son apparition sur le marché, menée en s'appuyant sur le principe de *conception dans l'usage*, démontre la prise en compte par les concepteurs des TBI des capacités innovatrices des utilisateurs, notamment en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques. Des résultats sont établis sur les intentions des concepteurs en terme d'*utilisabilité* de l'outil TBI : les cycles de conception du TBI, à travers une politique de mises à jour régulière, soulignent un enrichissement des fonctionnalités des tableaux et la capacité des concepteurs à prendre en compte les besoins des utilisateurs. Cet enrichissement des possibilités techniques s'accompagne cependant d'une certaine complexité d'usage du TBI : l'exemple détaillé de la conception d'un tangram via le TBI illustre la complexité potentielle de l'activité de conception d'une telle ressource par l'enseignant. Cela laisse apparaître un usage du TBI sans doute plus orienté vers la gestion du collectif en classe, moins coûteuse techniquement, que vers la création de ressources. Cette complexité instrumentale est par ailleurs confrontée au discours institutionnel (analyse des programmes, publications institutionnelles, interviews de trois Inspecteurs Pédagogiques Régionaux de mathématiques) qui reste assez flou concernant le TBI et aux ressources accessibles sur le site institutionnel Eduscol, montrant qu'ils y sont l'un et l'autre peu sensibles. Les analyses d'interviews des IPR montrent de surcroit des prescriptions institutionnelles qui renvoient à des stratégies d'accompagnement des usages locales, sans dénominateur commun, voire orthogonales[2]. Elles montrent *in fine* des stratégies d'accompagnement pilotées avant tout par des expériences personnelles et le rapport aux technologies qu'entretient chacun des inspecteurs. Elles posent dès lors la question de la nécessaire formation des inspecteurs, lorsque de telles innovations technologiques sont introduites dans les classes.

A partir de cette première partie des travaux de la thèse, la question des usages est abordée en combinant études quantitatives et qualitatives. Une première étude de type quantitatif est conduite : deux questionnaires, l'un destiné à des utilisateurs de l'outil et cherchant à cerner les usages, l'autre destiné à des non utilisateurs connaissant par ailleurs le TBI et cherchant à cerner leurs représentations et attentes, permettent de sonder 523 professeurs. Les réponses aux questionnaires sont analysées à l'aide d'un traitement statistique combinant analyse des correspondances multiples et analyse hiérarchique. Ces analyses aboutissent à l'identification de catégories. Pour les non-utilisateurs, quatre catégories sont identifiées par l'analyse factorielle : les réfractaires; les enthousiastes, qui n'ont pas eu de formation; les enseignants persuadés des potentialités du TBI mais attachés au tableau noir ; les enseignants plutôt prêts à intégrer le TBI, mais non significativement convaincus des apports de cet outil. Pour les utilisateurs, on trouve avec des analyses du même type cinq catégories : les enseignants qui ont pleinement intégré l'outil TBI qui intervient dans tous les aspects de leurs pratiques, et est devenu nécessaire ; les enseignants qui utilisent le TBI pour certains domaines seulement ; les enseignants qui utilisent moins fréquemment le TBI ; les enseignants qui ont un TBI dans leur classe, mais le considèrent défavorablement ; enfin les enseignants qui utilisent rarement le TBI. Ces catégories sont naturellement présentées de manière plus riche et détaillée dans la thèse. Ici, nous voulons surtout souligner qu'elles permettent de mettre à jour des résultats difficilement prévisibles comme la présence d'enseignants favorables au TBI mais non-utilisateurs, l'orientation des usages vers des domaines mathématiques précis pour certains enseignants ou encore des utilisateurs des technologies par ailleurs qui sont plus critiques au regard de l'utilité de ce nouveau dispositif, autrement dit des enseignants qui se sont d'ores et déjà organisés une pratique bien construite, outillée par le vidéoprojecteur et dans laquelle l'intrusion du TBI n'est pas jugée simple.

[2] Pour les uns, un accompagnement technique ponctuel apparaît suffisant, pour les autres, la nécessité d'un accompagnement sur le long terme s'affiche pour éviter des écueils de pratiques monstratives d'ores et déjà constatées.

En s'appuyant sur cette première phase, un travail plus fin est organisé avec six enseignants de la population des utilisateurs, appartenant à deux catégories contrastées : trois dans la catégorie des enseignants ayant pleinement intégré l'outil dans leurs pratiques et trois dans la catégorie des enseignants ne disposant pas du TBI dans leur classe et ayant un usage seulement épisodique. Pour chacun des enseignants, entretien semi-directif et observation de classe sont organisés. Nous détaillons dans la suite l'étude de ces entretiens.

## ENJEUX ET METHODOLOGIE DE L'ETUDE

### Choix des enseignants

Les six enseignants retenus[3] appartiennent à deux profils a priori contrastés du point de vue des usages et capables d'éclairer leurs discours par une expertise plus ancienne de l'usage des technologies éducatives : le premier profil (catégorie 1) correspond à des enseignants ne disposant pas de l'outil à demeure dans la classe, et dont l'usage est épisodique, le second profil (catégorie 2) renvoie à des enseignants ayant pleinement intégré l'outil dans leurs pratiques et jugeant un enseignement sans lui dorénavant problématique.

Si le choix de disposer de deux catégories fortement contrastées (parmi les cinq catégories exhibées par l'étude quantitative précédente) est susceptible d'éliminer de l'échantillon des profils intermédiaires, nous le retenons car il permet *a priori* de mettre clairement en évidence l'existence (ou non) de régularités dans les usages et leur genèse qui possiblement transcenderaient ces catégories.

En disposant de trois enseignants par catégories, nous cherchons également à examiner ce que recouvre réellement une catégorie donnée et quels sont précisément ses contours. Nous cherchons à examiner ainsi la diversité au sein d'une même catégorie et ce qui en fait sa cohérence.

### Dimension instrumentale et dimension orchestrative

L'étude des entretiens interroge, en cohérence avec le cadrage théorique de la thèse, deux dimensions spécifiques des usages de l'outil, la dimension instrumentale et la dimension orchestrative, avec une attention particulière accordée au repérage d'évolutions. Le choix d'interroger spécifiquement ces deux dimensions est motivé par les études précédentes de la littérature et de l'objet technologique TBI. Ces dernières ont mis l'accent sur un outil pédagogique principalement médié par l'enseignant. De plus, des problèmes instrumentaux spécifiques[4] et des potentialités dans la gestion et l'orchestration des différents moments d'enseignement se sont révélés.

Concernant la dimension instrumentale, est repéré l'usage qui est fait des fonctionnalités offertes par le logiciel, la sélection et l'utilisation des ressources logicielles et les éventuels changements opérés au fil du temps. Ce sont à la fois l'adéquation et l'adaptation des fonctionnalités du TBI avec les besoins de l'enseignant qui sont examinées. Il s'agit également de repérer comment s'expriment les besoins instrumentaux des enseignants et quels leviers sont investis par les usagers pour y répondre.

La dimension orchestrative correspond, quant à elle, à la gestion globale de la classe et à son orchestration par l'enseignant. Est repéré l'agencement des artefacts présents dans la classe et son exploitation par l'enseignant. Les éventuels changements opérés dans la position et le rôle

[3] Trois enseignants par profil sont retenus, et sont choisis proches des individus parangons de l'étude statistique précédemment conduite.
[4] Ce que nous avons désigné plus haut sous le terme de complexité instrumentale

occupés par l'enseignant dans cet agencement ainsi que le rôle et les tâches assignés aux élèves sont examinés. Afin de mieux qualifier la diversité des orchestrations repérées dans les entretiens, nous proposons un quadruplet caractéristique des orchestrations : *les configurations didactiques* renvoient à l'agencement des artefacts dans la classe et la position de l'enseignant induite par cet agencement, *les modes d'exploitation* correspondent à l'exploitation par l'enseignant de la configuration didactique pour mettre en scène la classe et ses intentions didactiques, *les familles de ressources* en distinguant[5] cinq familles différentes, *les moments didactiques* de l'étude. Si les deux premiers éléments[6] (*configurations didactiques et modes d'exploitation*) s'inscrivent dans la continuité des travaux de Drijvers (2010), les deux ingrédients orchestratifs supplémentaires tiennent compte des spécificités de l'outil TBI : contrairement aux travaux de Drijvers (dans lesquels les ressources utilisées sont fournies par le chercheur), dans notre étude, l'activité de conception de ressources pour le TBI est à l'entière charge de l'enseignant. Ce degré de liberté supplémentaire laisse apparaître une diversité signifiante dans les ressources construites par les enseignants et les moments de l'étude qu'elles permettent de soutenir. Le choix de ce quadruplet[7] (*familles de ressources - moments didactiques - configurations didactiques - modes d'exploitation)* permet en outre l'accès synthétique à la diversité catégorielle des ressources utilisées, l'accès à la diversité et à l'enrichissement des modes d'exploitation d'une même ressource dans le passage d'une catégorie d'usagers à l'autre ou encore l'accès à d'éventuelles sous-représentations des différents moments didactiques dans lesquels le TBI est impliqué. Ce choix de quadruplet s'inscrit enfin dans la continuité et le prolongement de la catégorisation proposée par Drijvers dans laquelle le paramètre *ressource* constituait un paramètre unifié de l'étude.

Pour accompagner la lecture spécifique des dimensions instrumentale et orchestrative, nous avons mis au point différentes grilles de lecture déclinant un ensemble de descripteurs. Nous ne les détaillons pas ici et fournissons un exemple en annexe 1.

Une dernière dimension, qualifiée de personnelle est prise en charge à travers la construction d'un narratif des interviewés. Elle examine les conditions d'entrée et d'accès à l'outil, le rapport entretenu avec les TUIC par chacun des usagers et plus largement, à travers notamment la proximité de ces enseignants avec d'autres institutions, les connaissances et conceptions des professeurs sur les mathématiques et sur la manière de les enseigner. Cette dernière dimension permet d'interroger l'existence de relations entre le parcours instrumental des enseignants, leur parcours orchestratif et leur vision de ce qu'est l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et du rôle qu'ils semblent assigner à la technologie dans leurs pratiques.

Nous présentons dans la suite certains éléments relatifs aux deux premières dimensions des usages de l'outil. Concernant la dimension instrumentale, un premier résultat concerne les régularités au niveau des genèses d'usage. Ces régularités ne sont pas seulement internes à une catégorie donnée mais transcendent les catégories d'usagers et nous permettent d'identifier quatre phases dans la trajectoire instrumentale des enseignants. Concernant la dimension orchestrative, si une certaine variabilité semble plus aisément s'installer dans les usages stabilisés, nous montrons l'existence d'une tension partagée dans les premiers usages de l'outil. Nous mettons également à jour une intention commune chez les usagers expérimentés d'inscription continuée de l'outil dans une gestion collective de l'étude et une

[5] Les cinq familles sont les suivantes, elles sont issues de l'étude préalable de la base de données Educ'Base regroupant des ressources TBI construites par des enseignants : les ressources reproduisant les documents à disposition des élèves - les ressources intégrant un logiciel institutionnel (LGD, tableur, etc...) - celles constituées de la trace du travail des élèves - celles permettant de simuler l'action matériel à disposition des élèves - et une dernière catégories regroupant les logiciels et autres utilitaires non institutionnels.

[6] A noter que compte tenu de la nature descriptive de nos données, nous avons provisoirement écarté de la caractérisation une dernière dimension - celle de *design didactique* - proposée par Drijvers.

[7] Un exemple d'utilisation de ce quadruplet caractéristique des orchestrations est donné en annexe 2.

recherche d'optimisation de cette gestion. Nous montrons enfin comment la dimension personnelle permet de faire sens de certaines régularités et diversités observées chez deux enseignants expérimentés.

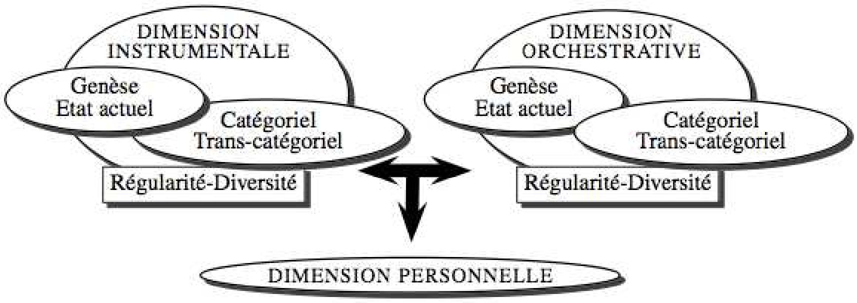
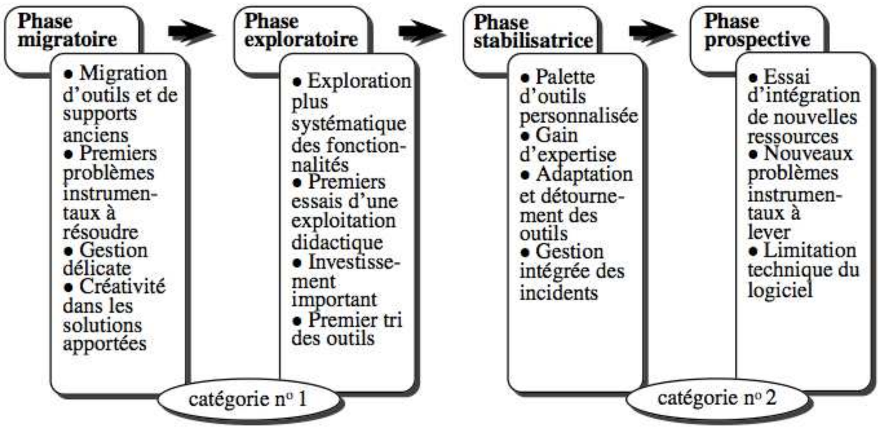



*Schéma récapitulatif de l'étude*

## RESULTATS DE L'ETUDE

### La dimension instrumentale

Le schéma ci-dessous présente les quatre phases de la trajectoire instrumentale des enseignants identifiées à partir des régularités trans-catégorielles et des points de convergence observées dans les genèses d'usage. Nous décrivons chacune d'elles brièvement.




***Première phase : la phase «migratoire»***

Cette première phase instrumentale consiste en la migration d'instruments anciennement installés dans la pratique des enseignants vers ce nouveau support. Le TBI devient un espace d'accueil de divers documents (énoncés d'activités, d'exercices, fiches de cours....) ainsi que de logiciels institutionnels, et en premier lieu, LGD et tableurs. Il libère ainsi l'enseignant de certaines contraintes (disponibilité du manuel, contrôle des logiciels devant la classe, etc...) et offre la possibilité d'annoter les différents éléments projetés à l'écran. Ce sont avant tout les outils d'annotation et de sélection qui interviennent dans cette phase. De plus, dans ce premier mouvement, les matériaux projetés sur le tableau sont très proches des matériaux utilisés avant l'arrivée du TBI. L'héritage d'usages établis d'instruments plus anciens (tableau noir, vidéoprojecteur) vient peser sur les usages en construction, le TBI devant assumer simultanément les fonctions d'espace d'écriture et de vidéo projection de divers matériaux.
Ce processus de migration d'outils dans ce nouvel environnement ne va pas nécessairement de soi, et soulève plusieurs problèmes instrumentaux : l'intégration des LGD, particulièrement

symptomatique, avec le problème de la gestion simultanée au TBI de textes démonstratifs et de figures géométriques animées, l'espace de projection disponible jugé réduit ou encore les problèmes d'importation (format non supporté, etc...) de supports numériques plus anciens (fichiers textuels : Word, OpenOffice, etc...) dans l'interface du logiciel du TBI.

***Seconde phase : la phase «exploratoire»***

Elle consiste en une exploitation plus systématique des fonctionnalités de l'outil et en un essai de leur exploitation didactique. L'exploration de nouvelles fonctionnalités, motivée par des arguments de découverte et de rentabilité[8], reste cependant encore localisée (fonctionnalités présentes dans la palette d'outils principale du logiciel et tournées vers l'annotation des contenus).

Cette exploration systématique a un coût important, mais l'investissement conséquent consenti par les enseignants est soutenu par un gain d'expertise instrumentale directement quantifiable. Dans ce travail de recherche de niches d'usage des fonctionnalités, un tri s'opère. Des régularités s'observent chez l'une et l'autre des catégories d'usagers : certains outils peinent à trouver une place pérenne (le spot, le zoom, etc...); l'outil mémoire, dont les potentialités apparaissaient a priori grandes, ne demeure que faiblement exploité et loin d'ériger le TBI comme mémoire didactique de la classe.

***Troisième phase : la phase «stabilisatrice»***

Repérée uniquement chez les usagers les plus avancés, cette troisième phase consiste en une stabilisation et une sécurisation instrumentale des usages. On observe chez chacun des usagers la constitution et la personnalisation d'une palette d'outils privilégiée sur laquelle ils se centrent. Ce qui caractérise cette troisième phase, au-delà des variations existantes dans le choix des outils, est un spectre des fonctionnalités recentré sur des usages routiniers, un gain d'expertise dans le maniement de l'outil et des enseignants mieux préparés à la gestion d'éventuels problèmes instrumentaux. Des stratégies d'adaptation et de contournement sont mises en place et permettent de régler certains problèmes rencontrés (l'outil gomme, d'usage peu aisé, n'est pas utilisé pour effacer le tableau mais est détourné pour réaliser des caches, etc...), d'autres problèmes plus résistants (calibrage du tableau, etc...) sont des événements intégrés et assumés dans le quotidien de la classe et ne sont plus source d'inquiétude.

***Quatrième phase : la phase «prospective»***

La quatrième phase consiste en une seconde exploration des fonctionnalités de l'outil, plus raisonnée en termes d'investissement. Elle a pour objet le développement d'usages non encore investis, reposant sur l'intégration de ressources nouvelles et dans une certaine mesure inédites (vidéos, animations, etc...). Cette dernière phase n'apparait pas systématiquement actualisée dans les pratiques. Elle est envisagée comme perspective par les utilisateurs occasionnels de l'outil.

Cette première étude met à jour des points d'ancrage communs dans un parcours instrumental structuré et des catégories d'usagers clairement identifiées dans ce processus. Si de telles régularités apparaissent structurer la dimension instrumentale des usages, leur dimension orchestrative laisse vivre une plus grande variabilité. Quand est-il précisément ? Quelles sont les spécificités catégorielles relative à cette dimension ? Comment expliquer cette relative diversité ?

[8] Le coût du dispositif est un argument avancé de façon récurrente pour motiver l'exploration des fonctionnalités de l'outil.

## La dimension orchestrative

### *Une première tension orchestrative*

L'entrée du TBI dans la classe est globalement jugée synonyme d'une augmentation de la présence de l'enseignant au tableau, et en conséquence, des élèves engagés de manière synchrone dans une même tâche, tournés vers le tableau. Cette tendance des premiers usages est en cela conforme aux recherches anglo-saxonnes ambiantes. Plusieurs raisons sont données pour expliquer cette possible inflexion vers un renforcement du collectif. Elles concernent d'une part les effets sur la classe et sa gestion, avec des avantages pointés sur la concentration et la motivation des élèves ainsi qu'une gestion facilitée de la classe avec un contrôle de l'activité des élèves plus aisé. Elles concernent d'autre part les caractéristiques de l'outil lui-même : les fonctionnalités illustratives, jugées d'une prise en main aisée, permettent d'outiller plus facilement des usages collectifs du tableau et participent ainsi à alimenter une poussée vers plus de collectif dans la classe.
Par ailleurs, apparaissent dans le discours des enseignants des écueils d'une telle tendance : la position renforcée du professeur au tableau dirigeant le logiciel est vue également comme pouvant altérer l'engagement des élèves dans les tâches d'apprentissage. Sortir de cette première tendance orchestrative reste cependant délicat, et ceci même pour des enseignants sensibilisés à de tels écueils.

Les arguments avancés dans la littérature anglo-saxonne pour justifier ce renforcement du collectif consistent à souligner que l'entrée dans l'usage du TBI se fait dans la continuité de pratiques existantes, elles-mêmes teintées de collectif, cette tendance étant appelée à s'amoindrir au cours du processus d'intégration de l'outil dans les pratiques. Pour notre part, plus qu'une tendance, c'est possiblement l'existence d'une tension que révèle également notre étude à travers des enseignants interviewés par ailleurs vigilants à ne pas renforcer cette inflexion vers plus de collectif. Cette tension est alimentée à la fois par des bénéfices immédiats dans la gestion de la classe et par des premières fonctionnalités illustratives de l'outil facilement accessibles. Sa résolution nécessite une prise de conscience des écueils possibles et un travail de conception substantiel. Elle passe en particulier chez certains enseignants par la renégociation explicite du contrat de classe. Nous proposons dans ce qui suit l'examen des répertoires orchestratifs catégoriels à partir des familles de ressources repérées.

### *Ressources communes aux deux catégories et schémas orchestratifs associés*

Deux premières familles de ressources, communes à l'ensemble des usagers trouvent un terrain d'accueil favorable et pérenne dans les premiers usages : celle intégrant un logiciel institutionnel (tableur, LGD, etc...) et celle constituée de ressources dupliquant les documents mis à disposition des élèves. Ces ressources correspondent à une migration de lieu de ressources par ailleurs exploitées dans des pratiques antérieures : les logiciels institutionnels migrant de la salle informatique à l'écran du TBI, la documentation des élèves se dupliquant dans ce nouvel espace de travail. Des arguments partagés en faveur de ce mouvement concernent la centration de l'attention de la classe sur une unique référence commune, la libération de contraintes matérielles (livre, etc...) ou encore l'économie de l'écrit au tableau. Mais au delà de ce trait commun, des spécificités catégorielles se dessinent. Elles tiennent à la fois aux moments de l'étude et aux modes d'exploitation.
Plus précisément, chez les usagers occasionnels, une amélioration de la gestion didactique de ces ressources est visée et sert prioritairement la dévolution de l'étude et son exploration collective : le fait de disposer d'une ressource projetée annotable et identique à celle des élèves permet plus aisément de s'assurer de la compréhension par tous des consignes, de questionner la classe et d'apporter toute information complémentaire nécessaire. Les

possibilités offertes par les LGD (aspect dynamique, etc...) permettent d'explorer collectivement une situation géométrique, d'assurer la dévolution des tâches mathématiques ou encore de tester la validité d'une conjecture. Les moments de correction, quant à eux, apparaissent moins investis que les moments de présentation d'un travail à la classe. Le TBI est alors cantonné à un espace d'écriture. La redondance fonctionnelle d'avec le tableau noir et les difficultés de gestion de l'espace disponible au tableau jugé restreint expliquent cette sous-représentation. Chez les usagers expérimentés, un investissement plus global des différents moments de l'étude et un enrichissement des modes d'exploitation se dessinent : l'usage conjoint du TBI et d'un LGD et l'intégration de copies d'écran du LGD dans la synthèse permet d'assister les moments de correction d'un travail géométrique. Les potentialités spécifiques résident ici dans la possibilité de faire coexister et d'accompagner les changements et transitions, dans un même espace commun, entre différents points de vues, cadres et registres de représentations d'un même problème. Les moments d'institutionnalisation sont également plus aisément investis. Les modes d'exploitation décrits visent à impliquer la classe dans l'élaboration de l'institutionnalisation. Par exemple, les ressources intégrant la présence de «textes à trou» permettent une économie de l'écrit au tableau et évitent de limiter l'activité de l'élève au seul travail de recopie. La tâche d'annotation du tableau laissée à la charge des élèves permet ainsi à l'enseignant de gérer et contrôler l'activité dans la classe. Aussi, des éléments de texte déplaçables et à réorganiser par les élèves au tableau poursuivent les mêmes objectifs. Cependant, une tendance allant vers l'abandon de ces techniques, qualifiées de "rigide" et difficile à adapter aux besoins spécifiques des élèves apparait au profit d'une institutionnalisation construite conjointement avec les élèves et manuscrite au TBI, jugée plus "flexible". Un schéma orchestratif exclusif à cette catégorie, avec une part ostensive plus marquée dans le mode d'exploitation est repéré : il s'agit d'assister collectivement les genèses instrumentales des élèves d'outils institutionnels (LGD, tableurs, etc...). Cette construction collective d'une première expertise du maniement de ces outils est annoncée comme une réponse aux problèmes d'instrumentation rencontrés par les élèves et leur gestion individuelle par l'enseignant lors de séances conduites en salle informatique.
Les schémas ci-dessous synthétisent les moments de l'étude investis à partir des deux familles de ressources communes pour chacune des catégories (l'aire des rectangles étant proportionnelle aux moments de l'étude repérés chez les enseignants)

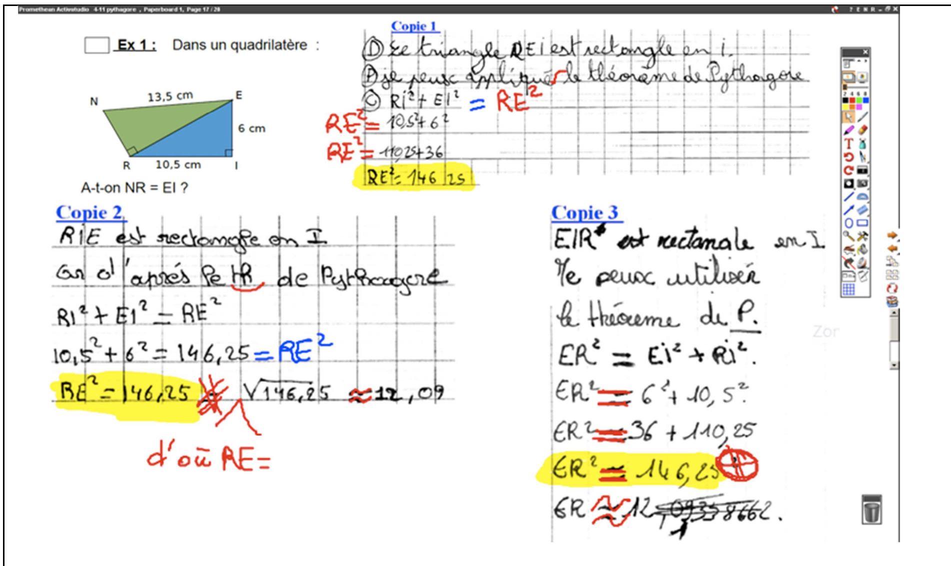

*Usagers occasionnels : moments de l'étude repérés*

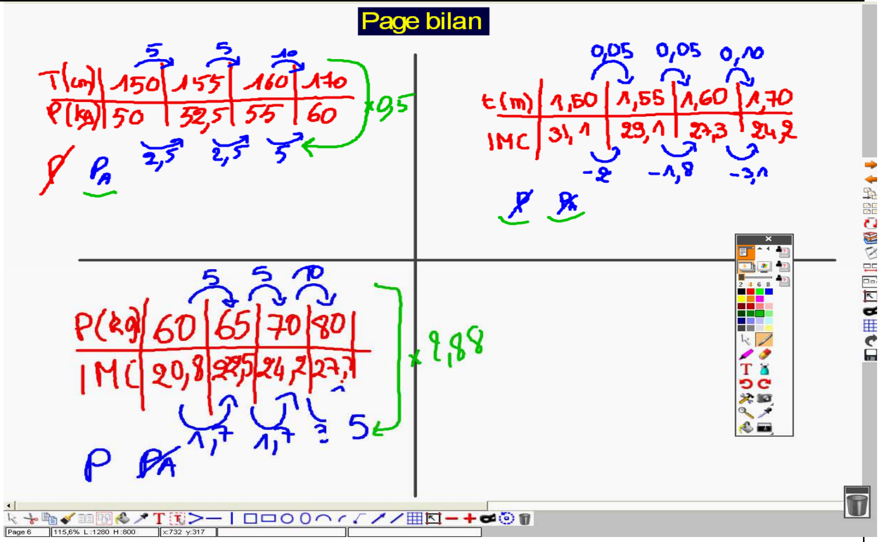

*Usagers expérimentés : moments de l'étude repérés*

Qu'en est-il des autres ressources instrumentées par les usagers expérimentées ? Quels modes d'exploitation sont privilégiés ? Quels moments de l'étude ? Nous examinons dans la suite les ressources spécifiques de ces usagers et les schémas orchestratifs associés.

***Ressources spécifiques aux usagers expérimentés et schémas orchestratifs associés***

Trois familles de ressources sont spécifiques de la catégorie des usagers expérimentés : la première correspond à des ressources exploitant la trace du travail des élèves, la seconde est constituée de ressources permettant la simulation de l'action du matériel à disposition des élèves, la troisième famille renvoie à des ressources intégrant l'usage d'animation et autres logiciels non-institutionnels.

| | |
|---|---|
|   | Différentes productions d'élèves ont été préalablement scannées et intégrées dans l'environnement du logiciel du tableau |

| | |
|---|---|
| Ici, c'est le travail de différents élèves qui a été préalablement annoté au tableau et regroupé sur une même page du tableau. |  |



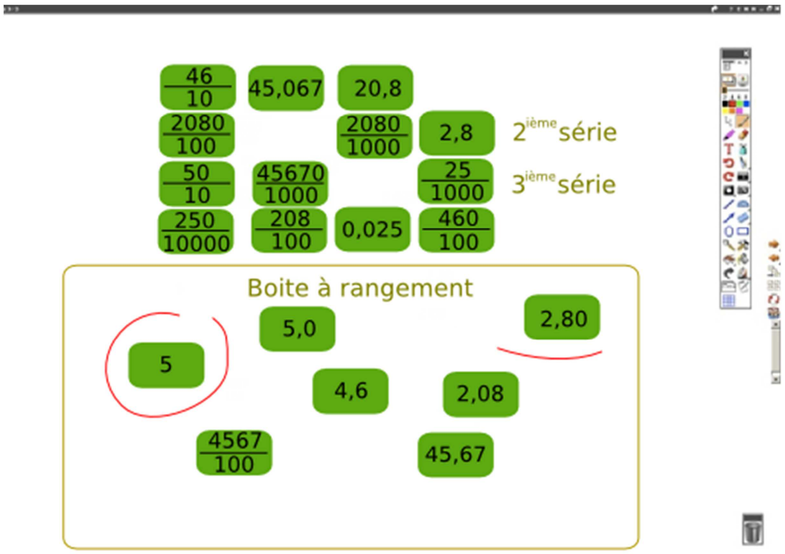
*Exemples de représentants de la troisième famille de ressources*

Différentes tendances se dégagent clairement :

- un enrichissement des modes d'exploitation d'une même ressource : en rendant accessible à tous des productions d'élèves, différentes intentions sont poursuivies : du simple examen d'un travail d'élève afin de fournir des éléments de correction à la classe, à l'étude de différentes productions choisies par l'enseignant pour débattre de la portée d'une technique ou institutionnaliser une nouvelle connaissance.

- une recherche d'optimisation de ces modes d'exploitation dans la gestion du collectif : en examinant plus finement le schéma orchestratif précédent, la nécessité pour le professeur de disposer des travaux des élèves en amont pour construire la ressource est pointée (on parlera dans ce cas de publication asynchrone). En l'absence d'une telle disponibilité, différentes techniques permettant la publication de ces travaux de manière synchrone sont mises en place : envoyer successivement des élèves au tableau et regrouper ces derniers sur une même page du tableau, charger un groupe d'élèves de travailler directement sur l'espace du tableau pendant que le reste de la classe conduit la même étude de sa place (à leurs bureaux) ou encore faire l'usage d'un appareil photo ou d'un scanner pour numériser les travaux des élèves. Ces techniques doivent cependant composer avec certains écueils repérés (chronophage), potentiellement démobilisatrice (travaux rendus publics trop tôt dans le déroulement de l'étude) ou encore problématique pour certains élèves (rendre publics des travaux privés).

- la conception de ressources permettant de soutenir "continument" l'étude : les ressources reproduisant virtuellement le milieu matériel à disposition des élèves et offrant la possibilité de simuler les moyens d'actions sur ce même milieu sont ainsi exploitées pour servir différents moments de l'étude. En permettant de présenter le milieu et les moyens d'actions sur celui-ci, ces ressources participent à la dévolution de la situation. Les actions des élèves sur le milieu peuvent être reproduites au tableau. Cette possibilité permet une régulation de l'étude, en accédant aux intentions que recouvrent ces actions, en les discutant collectivement et en rendant nécessaire leurs justifications. L'efficacité d'apposer l'institutionnalisation à la ressource réside dans la possibilité offerte ultérieurement de pouvoir convoquer et recontextualiser les connaissances construites en s'appuyant sur l'évocation de la ressource. La conception de telles ressources nécessite cependant des connaissances instrumentales fortes qui vont de pair avec la complexité du milieu matériel à reproduire et simuler.




*Un exemple de ressource reproduisant le milieu matériel des élèves : le jeu des étiquettes*

- l'utilisation de nouvelles ressources permettant d'élargir l'éventail des moments de l'étude impliquant le TBI : animations reproduisant une construction géométrique instrumentée, vidéos détaillant les étapes d'un algorithme de calcul posé sont des exemples de ressources mises à contribution dans les moments de construction et d'institutionnalisation d'une technique mathématique. Si la projection collective de ces savoir-faire semble recouvrir un potentiel monstratif fort, des précautions semblent prises dans les modes d'exploitation construits afin de ne pas limiter l'activité de l'élève à une reproduction mimétique de ce qui est vidéo projeté : d'une part, la possibilité de pouvoir allier un geste, sa description et sa réalisation devant la classe est pointée. Cette potentialité est jugée particulièrement efficiente pour accompagner les apprentissages instrumentaux. D'autre part, ces ressources sont vues également comme pouvant constituer un point de départ d'un travail de justification mathématique des techniques données à voir à la classe.

Apparait ainsi une première catégorie d'usagers pour laquelle l'outil TBI, utilisé de manière épisodique, vient soutenir des moments de l'étude que l'on pourrait, d'une certaine façon, qualifier de "naturalisés" (présenter un travail, corriger un travail, etc...) et ceci de manière segmentée. Le discours des enseignants de la seconde catégorie, plus expérimentés et faisant un usage quotidien de l'outil, permet d'entendre un raffinement dans les moments de l'étude impliquant l'usage du TBI, une inscription "continuée" du TBI dans une gestion collective de l'étude et une recherche d'optimisation dans cette gestion. Des spécificités internes, entre les usagers, existent cependant. En faisant intervenir la dimension personnelle dans l'analyse, le paragraphe suivant permet d'éclairer certaines spécificités des usages et de leurs trajectoires.

## Usagers expérimentés et spécificités des usages

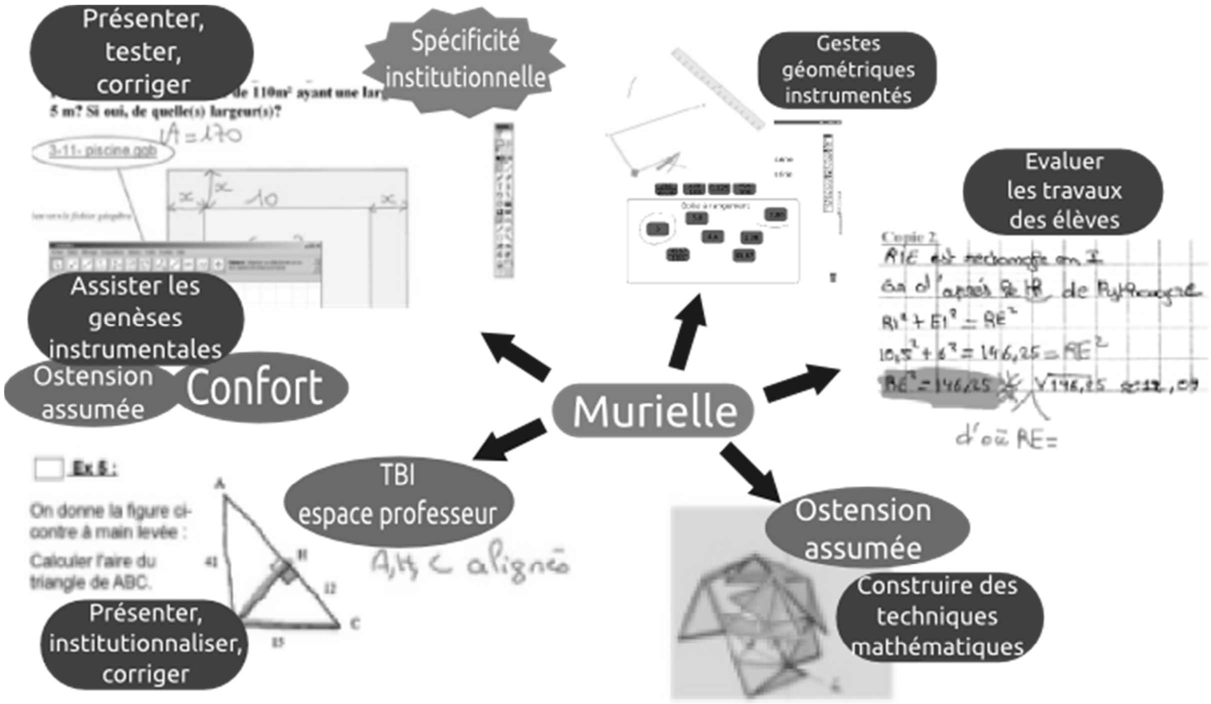
Nous examinons dans cette section les spécificités des usages de l'outil TBI de deux enseignants expérimentés, au regard de leur profil spécifique et en particulier de leurs conceptions de l'enseignement des mathématiques et du rôle qu'ils assignent à la technologie.

### *Une tendance ostensive assumée en réponse à des problèmes spécifiques chez Murielle*

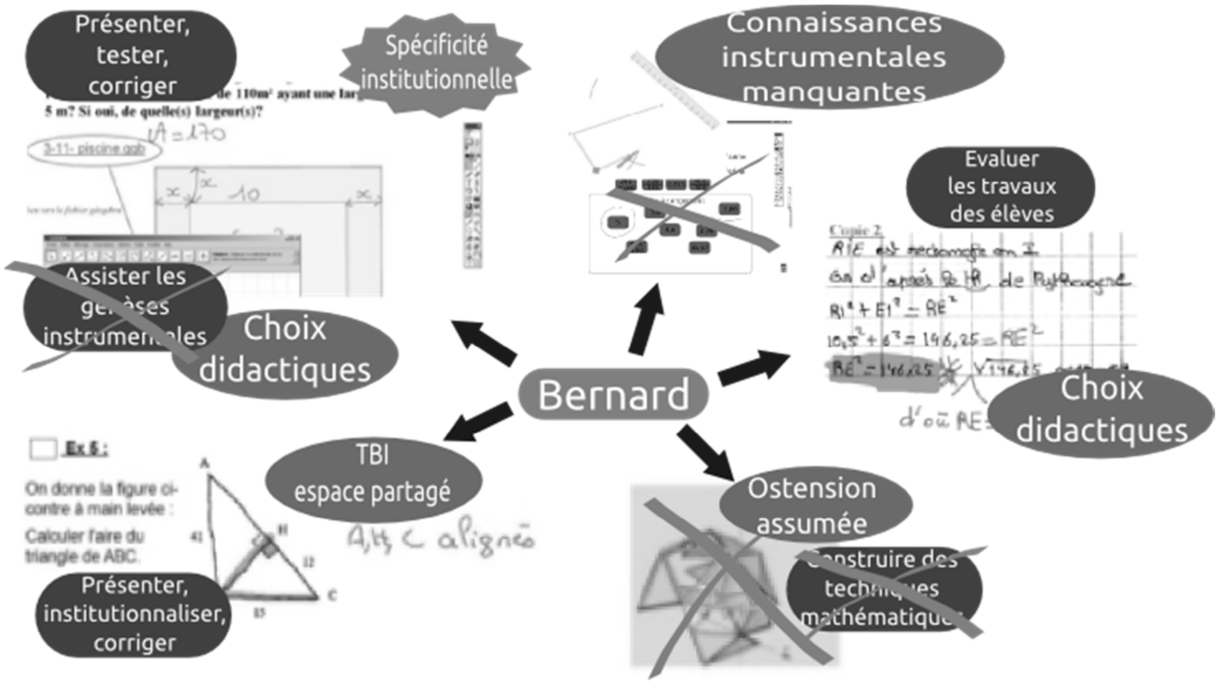
Enseignante au collège, Murielle entame cette rentrée scolaire une huitième année d'utilisation quotidienne du TBI. L'usage des technologies, et notamment des logiciels institutionnellement plébiscités est une pratique durablement installée chez cette enseignante convaincue de l'intérêt qu'ils présentent dans son enseignement. L'arrivée du TBI a d'ailleurs permis de naturaliser le recours à de tels logiciels. Ils peuvent aujourd'hui venir, en fonction des besoins, parfois non prévus, enrichir l'étude. Pour Murielle, le TBI n'est pas vu comme un vecteur de motivation des élèves et globalement, dans la pratique de cette enseignante, l'outil est présenté comme d'abord pour l'enseignant. Ces sont des arguments de confort (libérée de contraintes matérielles : livres, etc... - possibilité d'annotation directe sur différents supports - gestion de l'attention des élèves, etc...) qui priment et qui ont pour visé une amélioration de la gestion du collectif. Usage des technologies, confort d'enseignement et meilleure gestion du collectif orientent ainsi en partie la construction du paysage orchestratif de l'outil. L'intersection de ces trois tendances nourrit l'apparition de nouvelles formes orchestratives marquées par l'ostension, le TBI étant par exemple utilisé à des fins de démonstration des fonctionnalités des logiciels. Et même si ces usages spécifiques développés par cette enseignante sont jugés comme pouvant être problématique, ils répondent d'une part à des arguments de confort résistants : "il faut aller en salle multimédia, il faut se déplacer alors que c'est tellement confortable de rester dans la salle". Ils sont d'autre part vus comme une réponse au caractère problématique de la gestion de la co-construction des connaissances instrumentales et mathématiques que posent ces environnements logiciels dans des configurations d'usage en salle multimédia. : "je n’envisage pas d’emmener des élèves en salle multimédia utiliser un outil tableur ou LGD si je ne leur ai jamais montré avant"

***Des choix didactiques pesant sur la construction du paysage orchestratif chez Bernard***

Utilisateur de l'outil depuis deux années, Bernard est membre d'un groupe académique chargé de promouvoir l'usage des technologies dans l'enseignement des mathématiques. C'est un usage raisonné des technologies, qui doit nécessairement viser des apprentissages mathématiques que Bernard veut proposer dans son enseignement. Plus largement, l'apprentissage pour cet enseignant se réalise en situation de résolution de problème, et un schéma réglé : la dévolution du problème se faisant à la fois à chacun des élèves qui doit, seul, se mettre à la tâche, et à l'ensemble des élèves dont les échanges, les explications, les argumentations permettent aux uns et aux autres d'affiner leur raisonnement et au groupe de produire des hypothèses et des réponses auxquelles chaque élève, pris individuellement, n'aurait pas eu accès. Contrairement à Murielle, le TBI est vu comme un espace partagé entre le professeur et les élèves et son intégration dans la classe ne doit pas être synonyme de pratiques ostensives. La construction du paysage orchestratif de l'outil se fait ainsi chez Bernard en soutien de pratiques professionnelles éprouvées et questionnées sous l'angle de la pertinence pédagogique. Ce processus est en particulier visible dans le discours de cet enseignant avec le passage en revue et l'attribution de fonctionnalités didactiques aux différents outils présents dans l'interface du logiciel du tableau. Les apports identifiés relèvent de différents ordres : un amélioration de la gestion de certains moments d'apprentissage (la possibilité de garder la trace du travail de l'élève est rapprochée d'une gestion améliorée des moments de synthèse), un apprentissage facilité de certains concepts (l'usage conjoint du TBI et des LGD est rapprochée des possibilités offertes de changements de cadres, et de conversion de registres de représentation de concepts enseignés), ou encore des possibilités augmentées de répondre favorablement à une prescription institutionnelle de "travail dans le réel". Ce processus de construction reste long et disqualifie pour l'heure certains schémas orchestratifs ou encore certaines ressources : par exemple, la possibilité de projection de certains savoir-faire au TBI est regardée avec précaution par Bernard, faire des mathématiques ne devant, pour lui, ne pas limiter à la reproduction de mimétisme.




*Une tendance ostensive assumée en réponse à des problèmes spécifiques chez Murielle*




*Des choix didactiques pesant sur la construction du paysage orchestratif chez Bernard.*

## BILAN DE L'ETUDE

Nous résumons dans cette section les principaux résultats mis à jour.

### Des trajectoires d'usage de l'outil qui tiennent compte des écueils potentiels du monstratif.

Si les premières fonctionnalités de l'outil sont repérées comme pouvant favorablement outiller une tendance vers plus de collectif dans la classe, l'inflexion vers un resserrement du spectre des pratiques, investissant les potentialités monstratives de l'outil n'apparait pas un passage obligé. L'arrivée du TBI n'est pas synonyme de l'introduction dans les pratiques d'une faune de logiciels tournée vers la communication du savoir, ceci constitue une première distinction avec la situation anglo-saxonne décrite dans la littérature. Différentes tendances semblent par ailleurs s'installer progressivement : une recherche d'optimisation de la gestion des moments de collectif, une recherche d'inscription de l'outil dans un éventail large de moments de l'étude[9] et un aménagement de plans de travail individuels des élèves qui leurs préservent une activité cognitive en dehors des seuls moments conduit collectivement avec l'outil.

### Des problèmes instrumentaux faisant obstacle à la diversité

Dimension instrumentale et dimension orchestrative apparaissent fortement corrélées[10]. En particulier, le processus migratoire d'anciennes ressources dans ce nouvel environnement, s'opérant dans les premiers temps d'usage, s'accompagne de problèmes instrumentaux à régler (place disponible, gestion de l'écriture, etc...). La coexistence du TBI et du tableau dans la classe et la gestion de leur complémentarité apparait une nécessité pour accompagner ce premier processus. Cette nécessité se heurte cependant à des stratégies d'équipements d'établissement parfois orthogonales (le TBI vient purement et simplement remplacer l'ancien tableau)

### Adaptations spontanées, adaptations ultérieures

Les adaptations spontanées de l'outil apparaissent suivre un mouvement commun consistant en la migration de ressources existantes dans ce nouvel environnement et outillant des moments de l'étude naturalisés (présentation d'un travail, conduite de sa correction, etc...). Au sein de l'institution secondaire, dans laquelle l'usage des LGD et tableurs relève du discours injonctif, et pour des enseignants qui s'y conformeraient, de tels logiciels trouvent un terrain favorable d'accueil au sein du TBI, offrant un contrôle plus aisé au tableau et des possibilités nouvelles d'annotation de ces supports. Les adaptations ultérieures de l'outil apparaissent suivre une trajectoire commune, tout du moins dans les intentions, et consistent, en revisitant des pratiques anciennement installées, de trouver des niches d'usage aux différentes fonctionnalités de l'outil. Il s'agit de tendre vers un élargissement des moments de l'étude impliquant le TBI et une amélioration de leur gestion collective.

### Des schémas orchestratifs qui soulèvent des questions

L'usage conjoint du TBI et des LGD apparait pouvoir accompagner l'étude de problèmes géométriques : leur exploration, la formulation de conjectures ainsi que les nécessaires changements de points de vues, cadres et registres de représentation d'un même problème. Ce sont les possibilités de susciter des questions et développer des activités de mathématisation, de motiver des généralisations ou bien encore d'engager l'étude de problèmes plus complexes qui sont exploitées. Si ces schémas orchestratifs émergeants accompagnent l'entrée dans la classe de problèmes géométriques à certains égards renouvelés, ce mouvement est décrit comme se faisant parfois au détriment de l'étude de ces problèmes qui pouvait exister par ailleurs dans d'autres configurations telles que celles en salle informatique, sur laquelle pèsent diverses contraintes (disponibilité, continuité de l'enseignement, gestion de l'accompagnement des élèves dans l'instrumentation des logiciels, etc...). Ce changement d'habitat des situations, de la salle informatique vers la classe, n'est pas sans questionner les conséquences sur

[9] En particulier, qui ne se résument pas à des activités d'introduction comme le suggéraient certains premiers travaux français.

[10] Nous proposons en annexe 3 un schéma mettant en correspondance trajectoire instrumentale et orchestrative.

l’activité mathématique et instrumentée résiduelle des élèves. L’arrivée du TBI comme levier d’introduction des technologies dans les pratiques est une attente institutionnelle qui gagnerait ainsi à être nuancée.

## Des premières tendances orchestratives qui pèsent sur le contrat de classe

Les premières adaptations spontanées de l’outil rencontrent des problèmes instrumentaux liés à la place disponible offerte par le TBI et à la gestion de l’écriture manuscrite au tableau. Les adaptations ultérieures semblent se tourner vers une certaine spécificité des ressources construites par l’outil. Ceci n’est pas sans questionner le statut de ce nouvel outil dans la classe, qui dès lors, ne semble pas hériter uniquement de celui de lieu de savoir dont disposait le tableau noir (Robert & Vanderbrouck, 2003) et de sa (re)négociation. La question est ici de la gestion conjointe du discours, du geste et de l'écriture dans ce nouvel environnement et plus largement celle du travail sémiotique à l'œuvre en conséquence.

Concernant les potentialités de mémorisation offertes par le TBI, elles n'apparaissent que faiblement outiller la construction d'une mémoire didactique de la classe. La gestion de cette mémoire reste à la charge de l'enseignant et n'apparait pas facilement dévoluable à l'outil. Ces potentialités semblent trouver pour l'heure leur pertinence dans la reprise d'un cours à l'autre mais surtout comme moyen pour l’enseignant de revisiter le travail conduit d’une année sur l’autre dans une perspective d’amélioration.

Dans cette première étude, l’idée, parfois installée dans le domaine des technologies dans l’enseignement, d’une tendance à faire presque exactement les mêmes problèmes et activités qui étaient faits sans technologie et de façon très similaire, apparait à nuancer. En particulier, chez les usagers les plus expérimentés de l’outil, s’affirme une tendance à revisiter leurs pratiques et à investir, à travers les contraintes qui pèsent sur l’outil et les marges de manœuvre dont ils disposent, des niches d’usage du TBI. Et cette tendance n’est pas guidée que par des préoccupations d’ordre technique mais également par des considérations sur l’enseignement de leur discipline.

Enfin, soulignons que si un premier résultat est une tendance vers un renforcement du collectif, et des schémas orchestratifs engageant principalement le collectif classe dans une tâche commune, les modes d'exploitations de ces différents schémas montrent également que, dans ce collectif augmenté, des variantes existent et ne s'accompagnent pas nécessairement d'un appauvrissement du collectif en terme d'enseignement et d'apprentissage. Autrement dit cette tendance n'embarque pas nécessairement une moins-value didactique, et la qualification d'ostensif de ces pratiques est prématuré et à raffiner : l'existence de micro-contrat de participation dans un cours dialogué, un travail joint au sens de l'action conjointe laissant toute sa place aux élèves dans une action conjointe enseignant-élèves sont également à l'œuvre. Les grilles d'analyse construites pour conduire l'étude du paysage orchestratif de l'outil permettent sans équivoque de souligner ce dernier point et constitue nous semble-t-il un premier résultat raffiné des études anglo-saxonnes d'ores et déjà conduites sur le sujet.

# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

DRIJVERS, P. , DOORMAN, M., BOON, P., REED, H., & GRAVEMEIJER, K. (2010). The teacher and the tool : instrumental orchestration in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 75(2),213-234.

RABARDEL, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Houlgate : IUFM de Caen.

RABARDEL P. & PASTRE P. (dirigé par), 2005, Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement, Toulouse : Octarès, 260 p.

ROBERT, A. & F. VANDEBROUCK (2003). Des utilisations du tableau par les professeurs de mathématiques en seconde. *Recherches en didactique des mathématiques* 23(3), 389–424.

SENSEVY, G. & A. MERCIER (2007). Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves. Rennes : PUR.

TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques,* 25(1), 91-138.

# ANNEXES

## *Annexe 1 : exemples de grille de lecture des entretiens*

grille de lecture de l'entretien concernant le descripteur «ressources utilisées dans l'environnement logiciel du TBI» attaché à la dimension instrumentale.

<table>
<tr><th colspan="6">Descripteur relatif aux ressources utilisées dans l'environnement logiciel du TBI</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Ressources utilisées dans l'environnement logiciel du TBI</td><td rowspan="3">Ressources logicielles</td><td colspan="2">logiciels institutionnels</td><td rowspan="3">Potentialités illustratives<br>VS<br>Potentialités de manipulation de contenu</td><td rowspan="3">Intentions portées dans les ressources</td></tr>
<tr><td colspan="2">logiciels "non institutionnels"</td></tr>
<tr><td colspan="2">livres numériques</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ressources "non logicielles"</td><td>issues de la bibliothèque du logiciel TBI</td><td rowspan="3">Nature des ressources : images, animations, vidéos, etc...</td><td rowspan="3">Adaptation de ressources existantes<br>VS<br>Création spécifique dans l'environnement TBI</td><td rowspan="3">Interactions des élèves avec les ressources</td></tr>
<tr><td>issues de banques de données institutionnelles</td></tr>
<tr><td>Autre provenance</td></tr>
</table>

Nous repérons et catégorisons dans un premier temps les ressources utilisées dans l'environnement du TBI. Une première distinction est faite entre les ressources *logicielles* et celles que nous qualifions de *"non logicielles"*[11].
Du côté des ressources *logicielles*, trois sous-catégories sont distinguées a priori :

- les logiciels institutionnels correspondent à ceux dont l'usage est préconisé/mentionné dans les instructions officielles : logiciels de géométrie dynamique, tableurs, émulateur de calculatrice, logiciels de calcul formel, etc...
- les autres logiciels, non institutionnels regroupent des logiciels bureautiques (logiciels de présentation : powerpoint®, etc... - éditeurs de textes : word®, etc...), d'organisation et de présentation d'idées (openmind®, freemind®, etc...)
- les ressources *"livres numériques"*

Les ressources "non logicielles" recouvrent quant à elles, trois sous-catégories identifiées par provenance :

- les ressources fournies dans la bibliothèque du logiciel du tableau par le constructeur
- les ressources "institutionnelles" disponibles dans les banques de données institutionnelles : la banque Educ'base, etc....
- les autres ressources disponibles plus largement sur internet ou d'autres médias qui pourraient être mentionnées par ailleurs.

Nous identifions en particulier, concernant ces ressources *non logicielles*, leur *nature* : images, animations (avec ou sans interaction), vidéos, etc...

Nous examinons ensuite, pour l'ensemble des ressources repérées, si elles sont plutôt orientées vers des potentialités illustratives ou plutôt vers des potentialités de manipulation de contenu. Nous repérons si ces différentes ressources sont des adaptations de ressources existantes ou sont crées spécifiquement pour et/ou dans l'environnement du logiciel du tableau. Nous interrogeons également les intentions portées dans les ressources conçues : d'une part, si leur conception est pensée pour permettre de différencier les supports d'apprentissage et varier les chemins d'accès à une même connaissance, d'autre part, si des interactions des élèves avec la ressource via le logiciel sont aménagées.

Nous repérons enfin les évolutions dans la trajectoire d'usage des interviewés, à la fois dans le choix des ressources (abandon d'un type de ressources particulier, type de ressources sur-exprimé, etc...) ainsi que dans les intentions portées dans les ressources conçues.

[11] Même si cette terminologie et la frontière qu'elle dessine pourront apparaitre fragile d'un point de vue technologique

grille de lecture de l’entretien concernant le descripteur «agencement de l’écosystème numérique» attaché à la dimension orchestrative

<table>
<tr><th colspan="5">Descripteur relatif à l'agencement de l'écosystème numérique</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Agencement de l'écosystème numérique</td><td rowspan="4">présence du TBI et du TN</td><td rowspan="2">usage synchrone</td><td rowspan="2">Gestion des problèmes instrumentaux</td><td>Spécificités des ressources affichées au TBI</td></tr>
<tr><td>Spécificités des ressources affichées au TN</td></tr>
<tr><td rowspan="2">usage asynchrone</td><td rowspan="2">Gestion des problèmes instrumentaux</td><td>Activités et/ou moments de l'étude associés à l'usage du TBI</td></tr>
<tr><td>Activités et/ou moments de l'étude associés à l'usage du TN</td></tr>
<tr><td rowspan="2">présence unique du TBI</td><td colspan="2" rowspan="2">Gestion des problèmes instrumentaux spécifiques<br>(place disponible, permanence de l'affichage, gestion de l'écriture manuscrite..)</td><td>Activités et/ou moments de l'étude privilégiées</td></tr>
<tr><td>Spécificités des ressources affichées</td></tr>
<tr><td rowspan="3">présence de périphériques</td><td colspan="2">périphériques de publication</td><td rowspan="3">Fonctions attribuées<br>(affichage de productions,...)</td></tr>
<tr><td colspan="2">périphériques autonomes</td></tr>
<tr><td colspan="2">périphériques informatifs</td></tr>
</table>

Nous repérons dans un premier temps les éléments constitutifs de l'écosystème présent dans la classe. Nous distinguons trois cas que nous interrogeons chacun spécifiquement :

- Présence du TBI et du tableau noir
- Présence du TBI uniquement
- Présence de périphériques associés au TBI

Concernant la présence exclusive du TBI, nous examinons quelle gestion et quelle réponse sont apportées à d'éventuels problèmes instrumentaux spécifiquement rencontrés dans un tel environnement (place disponible, permanence de l'affichage, gestion de l'écriture sur les ressources projetées à l'écran...). Nous repérons ensuite quels types d'activités et/ou quels moments de l'étude sont privilégiés avec l'outil et interrogeons les spécificités des ressources utilisées

Concernant la présence du TBI et du tableau noir, nous distinguons deux cas :

- l'utilisation conjointe et simultanée du TBI et du tableau noir (usage synchrone)
- l'utilisation distincte du TBI et du tableau noir (usage asynchrone)

Nous identifions dans le cas d'un usage asynchrone, quels types d'activités et/ou quels moments de l'étude sont privilégiés (introduction d'une nouvelle notion, correction, etc... - domaine mathématique concerné, etc...) pour l'un et l'autre des deux outils.

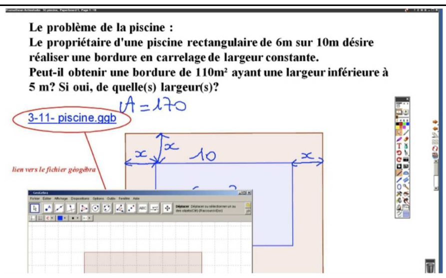
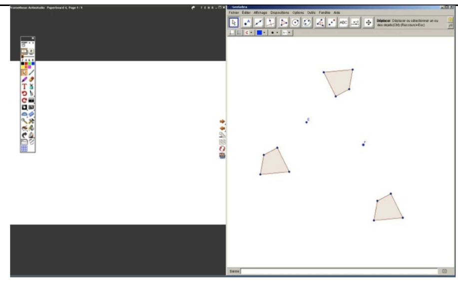
Concernant un usage synchrone, nous repérons dans les types d'activités décrites par les enseignants les spécificités des ressources affichées sur l'un et l'autre des deux supports (types de ressources, etc...) et leur complémentarité (permanence des ressources affichées, etc...)

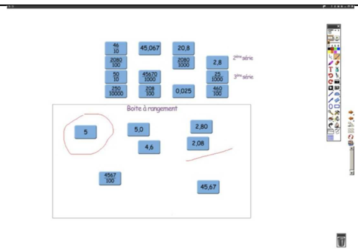
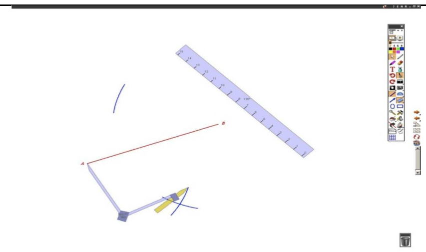
Concernant les périphériques, nous les catégorisons[12] : les périphériques de *publication* permettant la transformation de ressource papier en document numérisé (visualiseur, appareil photo, etc...) - les périphériques *autonomes* (ordinateurs individuels connectés au TBI) - les périphériques *informatifs* (système de boitiers de vote), et repérons les fonctions attribuées par les enseignants à chacun d'eux (affichage de productions d'élèves à l'écran, récupération et affichage devant la classe du travail conduit sur ordinateur par les élèves, etc...)

Nous repérons enfin des évolutions possibles de l'écosystème numérique au fil du temps (nouveaux périphériques,...) et de son agencement (inflexion vers une utilisation exclusive du TBI, développement d'usages complémentaires des deux outils, etc...)

[12] Nous reprenons les trois catégories construites au cours de l'étude de l'objet technique TBI.

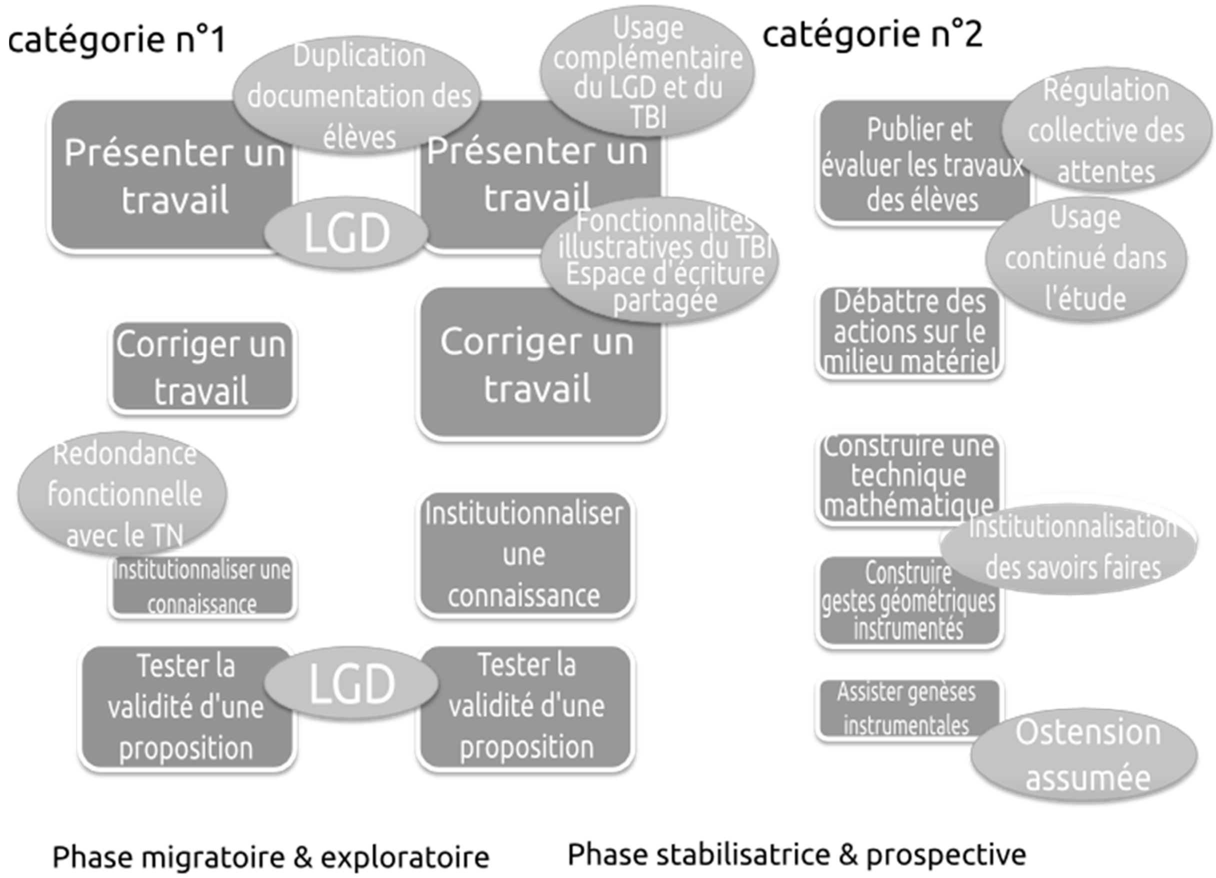
*Annexe 2 : Exemple d'utilisation du quadruplet caractéristique des orchestrations*

<table>
<tr><td colspan="5">Famille n°1 : ressources intégrant un logiciel institutionnel</td></tr>
<tr><td colspan="5">Exemples de représentants de la famille n°1</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">La ressource comprend la donnée de la consigne et le recours à un LGD donnant accès à une représentation dynamique de la situation géométrique étudiée</td><td colspan="2">Le tableau est scindé en deux, d'un côté un LGD et une situation géométrique à l'étude, de l'autre, une page blanche de l'environnement du logiciel du tableau</td></tr>
<tr><td colspan="3">Schémas orchestratifs communs</td><td colspan="2">Schémas orchestratifs de la catégorie n°2</td></tr>
<tr><td>Moment de l'étude</td><td colspan="2">Présenter un travail</td><td>Moment de l'étude</td><td>Corriger un travail</td></tr>
<tr><td>Répartition catégorielle</td><td>Catégorie n°1<br>3/3</td><td>Catégorie n°2<br>3/3</td><td>Répartition catégorielle</td><td>Catégorie n°2<br>3/3</td></tr>
<tr><td>Configuration didactique</td><td colspan="2">Elle comprend l'accès à la ressource projetée à l'écran et aux fonctionnalités de déplacement et d'annotation de l'environnement logiciel du TBI (stylo, surligneur). Le professeur dirige l'étude du tableau, les élèves sont disposés de façon à suivre la présentation.</td><td>Configuration didactique</td><td>Elle s'appuie simultanément sur l'usage d'un LGD et sur l'environnement du logiciel du TBI, en particulier sur la possibilité offerte d'insertion d'images. Le professeur dirige l'étude du tableau. Les élèves sont disposés de façon à voir le TBI.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Famille n°4 : ressources simulant l'action du matériel à disposition</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemples de représentants de la famille n°4</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Constituée d'étiquettes images déplaçables, cette ressource reproduit virtuellement les éléments du milieu matériel mis à disposition des élèves.</td><td>La ressource comprend l'usage des instruments de géométrie virtuelle à disposition dans l'environnement du tableau</td></tr>
<tr><td>Moment de l'étude</td><td>Explorer et débattre collectivement des actions sur le milieu matériel</td></tr>
<tr><td>Répartition catégorie n°2</td><td>2/3</td></tr>
<tr><td>Configuration didactique</td><td>Elle comprend l'accès à la ressource, son contrôle du tableau et des élèves disposant des mêmes éléments que ceux présents dans l'environnement du logiciel.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| *Mode d'exploitation* | Un premier mode d'exploitation consiste en la présentation du milieu à la classe et des moyens d'actions sur celui-ci. Le professeur dirige l'étude. Le second mode d'exploitation consiste à rendre publiques les actions sur le milieu effectuées par les élèves au préalable. Le point de départ est un élève dirigeant le tableau et interagissant avec le milieu. |

*Annexe 3 : Dimensions instrumentale et orchestrative*



Les trois textes suivants font suite à la présentation de Guy Brousseau, Denise Greslard, Marie-Hélène Salin, Yves Matheron et Serge Quilio, autour du thème « L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes, les e*xpériences du COREM et des LéA* ».

# L'ACCES AU MILIEU SCOLAIRE POUR L'ELABORATION ET L'EXPERIMENTATION D'INGENIERIES DIDACTIQUES DE RECHERCHE : CONDITIONS ET CONTRAINTES. LE CENTRE D'OBSERVATION ET DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES (COREM)

Guy **BROUSSEAU**

guy.brousseau@numericable.fr

Denise **GRESLARD**[1]

dgreslard@aol.com

Marie-Hélène **SALIN**

mh.salin@sfr.fr

**Résumé**

Le COREM était un dispositif qui fut créé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de l'Université de Bordeaux en 1972 pour répondre à l'exigence de rapport au milieu scolaire évoqué dans le titre de cette plage du séminaire.

Dans un premier texte, D. Greslard et M.-H. Salin décrivent succinctement les caractéristiques principales de ce dispositif et quelques éléments-clés de son fonctionnement. L'exposé se termine par la présentation de l'état actuel de la conservation des données du COREM et de leur mise à disposition des chercheurs.

Dans un deuxième texte, G. Brousseau revient sur l'origine et l'objectif du projet du COREM puis évoque la situation actuelle de la didactique des mathématiques et la nécessité de travailler à l'unification de son champ.

**Mots clés**

Ingénieries didactiques de recherche, observations de classes, interactions chercheurs et enseignants, déontologie, théorie des situations didactiques, données du COREM.

[1] Nous avons été pendant plus de vingt-cinq ans acteurs au sein de ce dispositif, D. Greslard en tant qu'enseignante puis directrice de l'école élémentaire, M.-H. Salin en tant que chercheur puis responsable du fonctionnement. C'est donc d'une place différente que nous pouvons en parler. Nous avons décrit ce fonctionnement dans d'autres documents : Greslard & Salin (1998) ; Greslard & Salin (2011).

## PRESENTATION DU DISPOSITIF

Le COREM était un “projet” conjoint :

- de l’Université Bordeaux I, d’abord de l’IREM, puis à partir de 1990 du Laboratoire Aquitain de Didactique des Sciences et des Techniques (Ladist) dont relevaient les chercheurs en didactique des Sciences

- de l’Inspection Académique de la Gironde, qui fournissait 9 postes d’enseignants supplémentaires aux écoles Jules Michelet (maternelle et élémentaire), situées près de l’Université, mais dans un quartier d’habitat populaire

### Ses objectifs généraux

Il était conçu pour :

- mener à bien les recherches indispensables à l’avancement de la connaissance des phénomènes d’enseignement des mathématiques,

- concevoir et étudier des situations d’enseignement nouvelles qui permettent une meilleure appropriation de cette discipline par les élèves,

- développer ainsi la constitution d’un corps de connaissances nécessaires à la formation des enseignants.

Collaboraient à son fonctionnement

- les enseignants-chercheurs du LADIST, la plupart formateurs à l’Institut Universitaire de Formation des Maîtres (IUFM),

- les directeurs des écoles, les enseignants et le psychologue scolaire en poste à Michelet,

- des formateurs IUFM du premier degré en tant qu’experts,

- les étudiants en didactique des mathématiques (DEA, thèse).

L’existence du centre a permis la constitution de deux sources de données :

- le recueil d’informations qualitatives et quantitatives sur l’enseignement des mathématiques à l’école primaire sur une longue durée : progressions suivies, fiches de préparation des séquences, travaux des élèves, épreuves d’évaluation et résultats,

- l’observation de classes avec deux modalités :

  - d'une part, des observations qui constituent un moment essentiel des recherches utilisant l'ingénierie didactique comme méthodologie,
  - d'autre part, des observations destinées à dégager et expliquer des phénomènes de didactique, concernant l'enseignement "tel qu'il se pratique".

### Les caractéristiques de l’école Michelet

- L’école maternelle comportait 4 classes, l’école élémentaire 10 classes. Elles accueillaient les enfants du secteur scolaire (ZUP de Talence).

- Les programmes étaient ceux définis par les instructions en vigueur, y compris en mathématiques.

- Les enseignants étaient volontaires. C'était des enseignants ordinaires qui présentaient leur candidature devant une commission comportant des représentants des diverses catégories de personnel et l'inspecteur primaire.

- Les enseignants n'étaient pas des chercheurs. Ils devaient, en revanche, se sentir impliqués dans la recherche.

- Ils travaillaient en équipe (3 enseignants pour 2 classes). Le tiers de leurs heures en présence des élèves était remplacé par le temps COREM, qui comportait quatre types d'activités : formation continue / participation à la recherche / observations / préparation de la semaine par niveau avec l'aide d'un expert (formateur IUFM)

- Les séquences de classe étaient filmées dans une classe-studio aménagée à cet effet, dans un bâtiment dédié au COREM.

## QUELQUES ELEMENTS CLES DU FONCTIONNEMENT DU COREM

Guy Brousseau a écrit plusieurs textes sur ce fonctionnement et les raisons qui ont conduit les auteurs du projet au choix des caractéristiques que nous venons de décrire. Ces textes ont déjà été ou seront mis sur son site (http://guy-brousseau.com/). Dans cet exposé, nous reprenons quelques éléments qui nous paraissent particulièrement importants.

### Pourquoi un tel dispositif ?

La description que nous venons de vous faire montre la complexité du dispositif. Pourquoi ne pas faire plus simple ? On ne peut répondre à cette question sans évoquer les problèmes de déontologie soulevés par le travail du didacticien, comme l'a fait Guy Brousseau aux journées d'inauguration de VISA en 2009.

> L'observation de classes met en contact deux « sociétés » différentes,
>
> - d'une part, celle d'une classe, ou d'une école, avec ses fonctions ses rites et sa culture, explicite et implicite, que l'observateur doit considérer comme inconnues de lui et en partie des acteurs eux-mêmes,
>
> - et d'autre part, celle de la recherche non moins complexe et opaque.
>
> Leurs obligations respectives sont également importantes, impérieuses, techniques, légitimes… et peu conciliables.
>
> Contrairement aux apparences, l'école est une société fragile, aux rites subtils. En tension permanente, elle dépend fortement de ses relations avec l'environnement. Toute intrusion et toute atteinte à son image la met en danger.
>
> Aussi pour le chercheur, la seule approche satisfaisante vis-à-vis de l'enseignement et des élèves devrait être celle de l'anthropologue. (Brousseau, 2009)

C'est souvent une approche de ce type qui est mise en œuvre dans les recherches sur les pratiques des enseignants[2] mais la recherche s'appuyant sur l'ingénierie didactique ne peut

[2] avec une mise au clair de la méthodologie suivie (pour un exemple, voir F.Leutenegger 2000)

s’en contenter. Des interactions beaucoup plus fortes sont nécessaires entre chercheurs et enseignants puisque l’ingénierie didactique vise la production de moyens d’enseignement.

La complexité du fonctionnement du COREM tenait à la volonté des initiateurs du projet de faire en sorte que la vocation pédagogique de l’école ne soit pas altérée par l’existence des recherches, et que celles-ci puissent se dérouler dans les meilleures conditions méthodologiques possibles. Les interactions des chercheurs avec les classes observées étaient institutionnellement réglées, les obligations réciproques des uns et des autres étaient explicitées, indépendamment des personnes, ce qui devait garantir un « contrat de recherche » satisfaisant[3]. Ceci a permis de résoudre beaucoup des problèmes posés par l’intrusion de la recherche dans l’école mais le dispositif complexe et très coûteux, qui a fonctionné de 1972 à 1999, n’a pas été repris ailleurs et a disparu il y a 14 ans.

## Les rapports de l'école et de son environnement

Comme nous venons de le dire, l’école est une société fragile. Le fait que le COREM ait été une institution régie par des règles explicites, tant vis-à-vis des élèves et de leurs familles que vis-à-vis de la hiérarchie de l’éducation Nationale, a été un élément essentiel pour la réussite du dispositif et son maintien pendant 27 ans.

- Les familles avaient l’assurance que le programme officiel serait suivi, et que les apprentissages des élèves seraient régulièrement évalués. Les enseignants, par équipe de niveaux rencontraient les familles toutes les fins de trimestre lors d'une réunion collective suivie d'entretiens individuels. À la fin de chaque année, les élèves passaient les TAS (tests nationaux d'acquisitions scolaires) et les résultats des classes de Michelet étaient analysés avec soin par les enseignants et le responsable du COREM au cours d’un bilan de 3 jours.

- L’IEN participait au recrutement des enseignants, l’accord des syndicats pour une procédure inhabituelle avait été obtenu. L'IEN participait au bilan et il en recevait un rapport écrit.

- Les rapports avec les autres écoles et le collège étaient du même type que ceux d'une école ordinaire

- Au niveau de l’environnement local de l'Education Nationale, la règle de conduite a été de ne jamais se mettre en avant mais de répondre de manière favorable aux demandes faites par le Rectorat (publication de documents), l’Inspection académique (stages pour les IEN du département, réunions pédagogiques menées par les enseignants de Michelet)

## Deux types d’études liées aux deux étapes de la Théorie des Situations Didactiques

Pour mieux comprendre la nature du travail d’observation réalisé au COREM, il semble nécessaire de rappeler que la TSD s’est constituée peu à peu et a donc été largement modifiée au fil des années. Nous devons revenir sur des distinctions importantes à propos du terme « situation didactique », en reprenant les distinctions et les termes que G. Brousseau utilise depuis le début des années 90, distinctions correspondant à deux points de vue différents sur les situations didactiques.

---

[3] Quelques équipes de recherche en didactique des mathématiques ont théorisé la nature de leurs rapports avec les institutions scolaires. C’est le cas de la recherche collaborative québecoise (Desgagné et coll. 2001), ou du modèle italien de la recherche en innovation (Arzarello et Bartolini-Bussi 1998), qui s’appuie sur les interactions entre chercheurs et « enseignants-chercheurs » ou bien encore du contrat de recherche explicité par A. Fluckiger (2004). A notre connaissance, peu d’équipes françaises l’ont fait.

***1- Premier point de vue***

> La situation est l’environnement de l’élève mis en œuvre et manipulé par l’enseignant ou l’éducateur qui la considère comme un outil […] pour enseigner une connaissance déterminée. La didactique étudie et produit ces moyens, en particulier par ses travaux d’ingénierie. (Brousseau 1997, p. 2)

G. Brousseau désigne maintenant l’environnement théorique des situations d’apprentissage par adaptation, construit autour de la notion de situation adidactique, par l’expression : « La théorie des situations mathématiques ».

Le COREM a été conçu comme le lieu de cette mise à l’épreuve de la théorie : l’observation de l’élaboration par les élèves des réponses adaptées, attendues, constitue une preuve de la possibilité génétique d’un apprentissage du savoir considéré. Ce choix initial a eu pour conséquence l’élaboration « d’un contrat d’observation » particulier, passé entre les chercheurs et les enseignants.

***2 - Deuxième point de vue***

> La situation didactique est l’environnement tout entier de l’élève, l’enseignant et le système éducatif lui-même y compris. (Brousseau 1997, p. 2)

L’observation et l’analyse des phénomènes se produisant au COREM de manière régulière, au cours ou à côté même de la mise au point des ingénieries ont permis d’avoir accès à cet environnement et à G. Brousseau de proposer une modélisation de l’enseignement, modélisation que constitue maintenant « la théorie des situations didactiques en mathématiques » stricto sensu.

C’est en grande partie grâce aux questions soulevées par les observations du COREM et par les données recueillies tout au long de l’enseignement des mathématiques que la Théorie des Situations Didactiques (TSD) s’est peu à peu enrichie des concepts de dévolution, d’institutionnalisation, de structuration du milieu puis de mémoire didactique qui permettent de modéliser l’action de l’enseignant au sein de la situation didactique.

Ces deux aspects du rôle du COREM sont présentés ci-dessous, avec un développement plus important du premier, qui correspond plus précisément au contenu de cet exposé.

## Description des interactions chercheurs / enseignants dans leur collaboration à l’étude d’ingénieries didactiques

Comme nous l'avons dit, dans un premier temps, les expérimentations ont permis le développement de la « Théorie des Situations Mathématiques » et l’élaboration de processus d’enseignement couvrant la presque totalité du domaine arithmétique visé à l’école primaire. Jusqu’à la fermeture du COREM, d’autres processus d’enseignement ont été étudiés et mis au point.

***1- Le cas d’une ingénierie courte***

Beaucoup de travaux d’ingénieries sont menés grâce à l’aide d’enseignants volontaires, intéressés par la recherche et ne pouvant s’engager que pour quelques séances. On peut estimer que les interactions entre enseignants et chercheurs, lorsqu’il s’agit de mettre au point des ingénieries « courtes » ne sont pas fondamentalement différentes de ce qui se passait au COREM, c'est-à-dire une collaboration en plusieurs étapes :

- Présentation du projet du chercheur aux enseignants du niveau concerné, des savoirs visés en fin de processus, des problèmes posés aux élèves et de l'éventail des stratégies que l'on pouvait attendre d'eux.

- Préparation de la séance observée.

L'idéal aurait été que l'enseignant puisse, à partir des explications du chercheur, dérouler dans sa tête le scénario de la séance avec suffisamment de précision pour qu'il n'ait pas à s'interroger sur des choix essentiels. Le résultat du travail commun se traduisait par la rédaction de la fiche didactique, c'est-à-dire du descriptif prévisionnel de la séance

- Préparation de l'observation.

L'observation d'une séquence doit permettre au chercheur de répondre à une liste de questions qu'il se pose sur les caractéristiques de la situation, à partir de l'observation de ses effets, attendus et inattendus, lors de la mise en oeuvre de la leçon dans la classe observée puis de revenir sur l'analyse a priori de la situation a-didactique. C'est donc en fonction de ces questions que, assisté des directrices (qui assuraient les prises de vue), il décidait des informations à relever et s'assurait que ce serait possible. Il donnait ses consignes aux observateurs (enseignants de l'école et didacticiens présents) après avoir commenté la fiche didactique de manière suffisamment détaillée pour que ceux-ci comprennent les enjeux de l'observation.

- Déroulement de la séquence et de l'observation.

Le rôle des observateurs était de recueillir de l'information tout en se faisant oublier. Une présence neutre auprès des élèves, une densité suffisamment faible pour ne pas gêner l'enseignant dans ses déplacements, sont nécessaires. Cela a l'air tout simple, ce ne l'est pas.

L'enseignant devait lui aussi pouvoir oublier qu'il était sous le regard du chercheur et ses décisions ne pas être assujetties aux attentes du chercheur (ou à ce qu'il croyait qu'elles étaient) mais au projet d'enseignement.

- Analyse à chaud.

Après le déroulement de la séance observée, un temps essentiel était consacré à une "analyse à chaud", où les différents partenaires essayaient de reconstituer "ce qui s'était passé", en croisant différents "regards" : celui de l'enseignant, et ceux des différents observateurs qui pouvaient se faire une idée complètement différente selon les groupes d'enfants observés. Une première analyse des travaux des élèves permettait d'enrichir la discussion.

C'est l'enseignant qui prenait la parole en premier. Il était important pour lui de pouvoir exprimer comment il avait ressenti la leçon, quels avaient été les moments plus ou moins difficiles et dans quelle mesure il pensait avoir atteint ses objectifs. Au cours des échanges qui suivaient, il était souvent conduit à proposer des explications à certaines de ses décisions instantanées.

Cette analyse à chaud était en général très enrichissante pour le chercheur, même s'il lui restait à confirmer, ou à infirmer, par des analyses plus fines, basées sur les données recueillies, les faits et les hypothèses formulés par les différents partenaires. Le plus souvent possible, l'analyse à chaud était filmée. Cela permettait au chercheur de bénéficier de la grande richesse des échanges.

Cette analyse était souvent difficile pour l'enseignant. Celui-ci devait comprendre que les participants parlaient de son action comme celle d'un acteur pris dans un réseau de contraintes dont une petite partie était constituée de celles fournies par la fiche, et non comme celles de la personne X ou Y. Le fait que ce soit le chercheur qui était le responsable de l'ingénierie contribuait à cette dépersonnalisation. Aussi pendant de nombreuses années, la règle était que l’on n’observait à l’école que des séquences préparées en détail avec des chercheurs prenant la responsabilité d’une ingénierie.

Le fonctionnement décrit peut paraître rigide, il était le résultat d'une réflexion sur les conditions à suivre pour que les enseignants vivent l'observation de leur travail avec les élèves de manière sereine : cette observation s’inscrivait dans un projet de recherche concernant un thème ou un sujet d’études précis. Le contrat de l’enseignant était de mettre en scène un milieu bien déterminé, et de gérer les relations des élèves à ce milieu dans un rapport convenu avec le chercheur. Si l’objectif d’apprentissage n’était pas atteint, c’était d’abord la situation qui était examinée et donc le travail du chercheur qui était en cause : il avait laissé échapper une contrainte, une circonstance, qu’il s’agissait de découvrir, ou de reconnaître. Les distorsions qui pouvaient apparaître entre le projet sur lequel on s'était mis d'accord dans la préparation et sa réalisation n’étaient pas considérées comme des erreurs des enseignants, elles pouvaient être analysées au sein du groupe mixte d’observateurs (enseignants et chercheurs).

D’autre part, les enseignants de Michelet savaient qu’à tout moment ils gardaient la responsabilité de ce qui se passait dans la classe, jusques et y compris de prendre une décision différente de ce qui avait été prévu si ce qui l’avait été ne leur semblait pas compatible avec le projet d’enseignement. Cette règle était un garde-fou devant permettre au maître de garder la maîtrise de sa classe, puisque celui-ci, même en situation d'observation didactique était assujetti aux mêmes contraintes que lors d'une classe ordinaire.

### *2 -La mise à l’épreuve d’un processus d’enseignement long*

La mise à l’épreuve d’un processus d’enseignement se développant sur une longue durée suppose, elle, des conditions d’interaction particulières : la recherche a besoin de conditions comme celles du COREM, qui assurent l’observation répétée sur plusieurs années du processus pour arriver à le mettre au point (l'enseignement des décimaux, celui de la désignation d'objets et de collections à l’école maternelle, par exemple).

Le suivi des apprentissages est essentiel et les enseignants de Michelet y étaient associés largement puisqu’ils disposaient d’une heure et demie par semaine de « participation à la recherche ». Une part importante de ce temps était consacrée à l’analyse des travaux écrits de leurs élèves (ayant pour but la constitution de « pavés », pour des analyses statistiques), qui permettait de suivre les apprentissages, que ce soit avec le chercheur s’ils étaient concernés par sa recherche, ou en équipe de 3 du même niveau, pour l’enseignement « ordinaire ».

### *3 - L’observation de séquences “ ordinaires ”*

En dehors des périodes où des observations liées à des études d’ingénierie étaient réalisées, nous observions chaque semaine des séquences de classe que nous qualifiions « d’ordinaires » à partir du moment où il n’y avait pas eu de préparation spécifique avec un chercheur sur leur mise au point avant l’observation. Les leçons observées pouvaient avoir été élaborées au cours de recherches plus ou moins récentes et avoir été intégrées dans le cursus normal ou relever de contenus jamais étudiés et donc de la responsabilité propre de l’équipe enseignante.

L’observation de telles séquences s’inscrivait dans une démarche de recherche sur les phénomènes d’enseignement concernant les pratiques courantes de classe. L’objectif était de pointer des phénomènes généraux pouvant porter tant sur la conception de la leçon que sur sa mise en œuvre par l’enseignant. Comme l’écrit G. Brousseau (1996) :

> Au-delà des décisions contingentes, bonnes ou mauvaises de l’enseignant, nous cherchons à établir celles qui sont significatives d’un comportement de “ tous ” les professeurs. Il s’agit donc de reconnaître les conditions qui expliquent ces

décisions par les contraintes auxquelles le professeur s'est trouvé soumis. (Brousseau 96 p. 31)

Pour l'observation, étaient de la responsabilité de l'équipe :

- le choix de la séquence, souvent parce qu'elle avait posé problème l'année précédente.
- la rédaction de la fiche didactique
- éventuellement, l'explicitation des questions que l'équipe se posait à son propos.

La demi-heure précédant l'arrivée des élèves était destinée à faire une analyse a priori très succincte de la situation didactique, qui permettait de dégager quelques conjectures ou questions auxquelles l'observation permettrait peut-être de répondre. Le rôle de ce questionnement était essentiel pour la formation des chercheurs et des enseignants observateurs.

Les deux questions qui mobilisaient la réflexion des participants étaient les suivantes :

- la situation dans laquelle les élèves sont placés les conduira-t-elle à développer les comportements attendus, caractéristiques des connaissances visées ?
- sur quels éléments l'enseignant pourra-t-il s'appuyer dans la phase de conclusion (Margolinas 1992) ?

D'autre part, l'école était aussi ouverte à des chercheurs qui, désirant observer le fonctionnement de l'enseignement des mathématiques de manière continue sur une certaine période, réalisaient leurs observations de manière individuelle et légère dans les classes (avec éventuellement enregistrement vidéo ou audio).

En conclusion, ce qui nous paraît peut-être l'essentiel concernant les conditions tant internes qu'externes de fonctionnement du COREM, peut être ainsi résumé :

Pour les chercheurs, la fréquentation du COREM leur permettait de mieux saisir la complexité de la situation didactique « stricto-sensu »[4], par exemple :

- au cours de la préparation des séquences de classe : les questions des enseignants, leurs réticences, témoignent de l'importance qu'ils accordent à ce qui guide leur action, le savoir, puisqu'ils sont les responsables de son avancée dans la classe. Aussi, la négociation enseignants-chercheurs décrite ci-dessus n'était pas toujours facile. Ses difficultés pouvaient témoigner de questions de fond à travailler (Berthelot et Salin 2002 p.129) .

- dans le cadre des analyses à chaud des séquences observées où il s'agissait de mettre en relation les contraintes de la relation didactique avec les décisions du maître, relatives à la préparation ou au déroulement de la séance. C'est dans ce début d'après coup que souvent le chercheur découvrait que telle démarche des élèves ou de l'enseignant ne relèvait pas du contingent mais du nécessaire.

Pour les enseignants, l'essentiel est exprimé dans ce point de vue, partagé par la plupart de ceux qui avaient choisi de travailler à Michelet : ils soulignent que le contrat avec le COREM leur garantissait de pouvoir exercer leur métier au moins comme ils pouvaient le faire dans une école ordinaire. Les règles de fonctionnement étaient écrites, connues, avec une possibilité institutionnelle de dire les conflits, de les réguler. Un enseignant n'était jamais seul dans ses rapports avec les chercheurs. Il faisait partie d'une équipe et même si un seul menait la séquence de classe, les deux autres enseignants du même niveau étaient impliqués dans la préparation. L'existence de ce contrat et la vigilance de l'institution signifiaient que les

[4] Voir Salin M.H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants

personnes qui acceptaient la situation difficile et inhabituelle de l'observation étaient respectées.

## LA CONSERVATION DES DONNEES DU COREM ET L'ETAT ACTUEL DE LEUR MISE A DISPOSITION DES CHERCHEURS

Une des grandes préoccupations de G. Brousseau ces dix dernières années a été la conservation de ces données. Il a trouvé heureusement auprès de plusieurs institutions les soutiens nécessaires pour une conservation « brute », mais qui demanderait, pour être effective, à ce que le travail d'indexation puisse être assuré par des personnes qui ne seraient pas toutes à la retraite et seraient disponibles pour ce genre de tâches.

### Les données papier : le suivi de l'enseignement des mathématiques et des apprentissages des élèves au long de l'année scolaire

À la fin de chaque année scolaire était constituée une boîte bilan contenant des documents papier : les productions individuelles écrites des élèves en mathématiques, les productions collectives, les contrôles aux diverses évaluations avec les exercices proposés et le relevé de chaque élève à chaque item sous forme de pavé, l'analyse statistique de certains de ces résultats, le bilan annuel écrit de l'équipe enseignante, et ceci pour chaque niveau de la petite section d'école maternelle au CM2. De plus, ces boîtes devaient contenir tous les documents papier afférents à une recherche menée sur le niveau[5] : fiches didactiques, travaux d'élèves, notes d'observateurs etc. Les résultats et analyses étaient anonymés pour garantir la confidentialité par rapport aux enfants. Ce corpus extrêmement important et volumineux était archivé sur site et géré par les directeurs(trices). A la fermeture du COREM, il était constitué de 260 boites.

Elles ont été transférées par P. Orus, à l'Université de Castellon, où a été créé le *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau* (CRDM-*GB*).

L'objectif prioritaire du CRDM Guy Brousseau est la promotion des activités en relation avec les observations des processus d'enseignement, d'étude et d'apprentissage des mathématiques. Il s'efforce de stimuler la connaissance de la recherche en didactique des mathématiques, grâce à la conservation et à l'accessibilité des Ressources du COREM, permettant ainsi d'ouvrir de nouvelles voies de recherche dans ce cadre.

Le CRDM met les ressources COREM à la disposition des chercheurs intéressés de 2 manières

- les originaux peuvent être consultés dans une salle de la bibliothèque de l'UJI,

- les documents numérisés au fur et à mesure de leur numérisation, sur le site http://www.imac.uji.es/jornadas.php, à la suite d'une procédure en cours d'établissement.

### Les données vidéos du COREM

Les vidéos produites étaient classées et archivées par les directeurs(trices) et à disposition des chercheurs dans le cadre d'une convention précise.

Les vidéos tournées avant 1986 n'ont pas pu être conservées. À partir de cette date, le support vidéo VHS a permis de multiplier les occasions de vidéo (coût minime, copies et montages facilement réalisables)

[5] Cela n'a pas toujours été le cas pour les travaux d'élèves.

Une partie des 450 vidéos recueillies pendant les quinze dernières années devraient être progressivement mises à disposition par le dispositif VISA, dans la mesure où elles pourront être indexées. Les sujets sont très divers, mais il est possible de faire des regroupements : la même leçon, filmée plusieurs années de suite avec des enseignants différents ; ou un même enseignant filmé dans des leçons différentes.

À partir de 1993, nous avons constitué pour chaque vidéo, un corpus papier indexé contenant une fiche indiquant des éléments techniques, le nom des personnes participant à l'observation, la fiche didactique de la séquence, les notes des observateurs, la chronique de la séquence, les notes prises lors de l'analyse à chaud. Lorsque cela était possible, nous avons reconstitué des corpus partiels pour des vidéos antérieures. Tous ces documents numérisés seront accessibles sur le site VISA, en même temps que la vidéo correspondante.

Nous avons choisi de commencer en priorité par les vidéos des ingénieries, en particulier de celles pour lesquelles des éléments d'information concernant les recherches sur lesquelles elles sont basées sont disponibles. A ce jour, 2 ensembles de vidéos sont accessibles : celles concernant l'enseignement des rationnels et décimaux au CM2, et celles concernant la désignation de collections en grande section d'école maternelle.

Le site de VISA : http://visa.ens-lyon.fr/visa/presentation

Remarque : Le site de Guy Brousseau comporte, sous l'entrée COREM, des documents et diaporamas fournissant de nombreuses informations.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARZARELLO F., BARTOLINI BUSSI M.G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective,. In Kilpatrick J., Serpinska, *Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity* (vol. 2 pp. 243-262).Dordrecht Kluwer Academic Publishers.

BERTHELOT R. ET SALIN M-H (2005), Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie in Salin M.H., Clanché P. et Sarrazy B. éds, *Sur la théorie des situations didactiques* La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU, G., (1978), L'Observation des activités didactiques *Revue française de pédagogie, n° 45*, 130-140

BROUSSEAU, G. (1996) Cours 2 : Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique. In Noirfalise R. et Perrin-Glorian M. J. (eds) *Actes de la huitième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* .pp. 16-30 IREM de Clermont-Ferrand

BROUSSEAU G. (1997) La théorie des situations didactiques *site : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf*

BROUSSEAU G. (1998). Le Centre d'observation de l'IREM de Bordeaux Annexe p. 359-364 *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage

BROUSSEAU G. (2008) Notes on the observation of classroom practices, *Contribution to TSG24, ICME 11 (Monterrey, 2008)*, Translation by Virginia Warfield (University of Washington), disponible sur le site d'ICME, http://tsg.icme11.org/document/get/315

BROUSSEAU G. (2009) Sur un corpus de didactique *Journées inaugurales VISA* http://visa.ens-lyon.fr/visa/reseau/seminaires/journees-inaugurales-14-et-15-mai-2009-1/conference-de-guy-brousseau-diaporama

DESGAGNE S., BEDNARZ N., LEBUIS P., POIRIER L. ET COUTURE C. (2001) « L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation » *Revue des sciences de l'éducation, vol. 27, n° 1*, p. 33-64.

FLÜCKIGER A. (2004) Analyse Didactique et Schème :*Recherches en didactique des mathématiques 24/2.3* pp. 269-304

GRESLARD D., SALIN M-H., (1998), La collaboration entre chercheurs et enseignants dans un dispositif original d'observation de classes :le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM), texte de la conférence parue dans *« Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques », Actes de la 50 ième Rencontre de la CIEAM,* Neuchâtel 2-7 Août 1998(p. 24-38)

GRESLARD D., SALIN M-H. (2011), La collaboration entre chercheurs et enseignants au COREM, une composante essentielle de la mise à l'épreuve d'une ingénierie didactique, in Margolinas & coll. *En amont et en aval des ingénieries didactiques*( vol 2 pp. 263-282)

LEUTENEGGER F. (2000) Construction d'une « clinique » pour le didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 20/2* pp 209-250

MARGOLINAS C. (1992) Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques,* 12/1.p.113-158

SALIN M.-H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants, in Lemoyne G. et Conne F., *Le cognitif en didactique des mathématiques,* Les Presses de l'Université de Montréal p.327 - 353

# LE COREM ET L'ETUDE SCIENTIFIQUE DES SITUATIONS MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUES

Guy **BROUSSEAU**

guy.brousseau@numericable.fr

http://www.guy-brousseau.com

1. Le projet du COREM a été une réponse (1967) à la demande d'André Lichnerowicz (1964)[1] : « Quelles sont les conditions limites d'une expérience en enseignement des mathématiques ? ». Sa réalisation a été l'œuvre d'un collectif de près de deux cent personnes, soutenues sans fracas par un nombre difficile à préciser de responsables administratifs, de savants, d'éducateurs et de parents pendant 30 ans.

Ces conditions relevaient de chapitres très divers : conditions administratives, scolaires, éducatives, sociales, financières, et surtout conditions scientifiques : types de recherches (fondamentales, appliquées, développement), interactions avec l'enseignement et l'apprentissage…, fondements et méthodes,.

Les parties les plus délicates concernaient les interactions des chercheurs d'abord avec les élèves et les enseignants, ensuite avec les milieux scientifiques, enfin avec la société elle-même. La façon dont nous avons résolu ou non ces problèmes pourrait encore aujourd'hui être décrite. Le projet a été présenté en 1968. L'école Jules Michelet a été dédiée à sa réalisation en septembre 1972[2], après deux années d'essais. Un projet similaire a été mis en œuvre par François Colmez à Antony (1970- 1980).

2. Le COREM a été conçu avec les mêmes méthodes et les mêmes principes que ceux que nous utilisions dans nos projets de *situations mathématiques* pour les élèves. Il s'agissait d'imaginer un dispositif qui rende « nécessaires » la conception, la formulation et la preuve de connaissances de Didactique des mathématiques, et qui contraigne les enseignants et les chercheurs à mettre continuellement en balance deux dispositifs, l'un nouveau et prometteur et l'autre classique et sûr. Ces connaissances apparaissaient dans des conditions générales qui, par ailleurs, assuraient que dans tous les cas l'enseignement, lui, serait un succès. Car à chaque étape d'un plan d'expérience A, était associé un plan B de sauvegarde auquel le professeur pouvait décider, seul, d'avoir recours s'il le jugeait nécessaire. Les discussions avaient lieu avant ou après les leçons. *Deux déontologies s'y affrontaient*, que je recommande à votre réflexion : celle de l'enseignement et celle de la recherche sur l'enseignement. Aucune recherche sur l'éducation ne devrait pouvoir s'en exonérer.

Contrairement à nos élèves, qui avaient l'assurance que quelqu'un avait balisé le chemin et que la solution et le succès existaient in fine, nous ne trouvions, dans les connaissances proposées par les Sciences de l'époque, que des ressources à soumettre comme les nôtres à l'épreuve du terrain. Le COREM, notre « Didactron » générait une Didactique des

[1] Je crois que Lichnerowicz m'a proposé ce sujet en réponse à mes critiques, à l'énumération des erreurs et des dangers que j'apercevais dans ce qui se préparait à l'époque et que je trouvais être des improvisations dangereuses et maladroites. Mon incroyable prétention ne l'a pas découragé mais il m'a chargé du paquet.

[2] grâce aux efforts de Michel Daubet, à l'époque l'inspecteur de la circonscription de Talence

Mathématiques hardie, provisoire mais dialectique, cumulative et progressivement de moins en moins incertaine. Le pragmatisme et l'imagination ont joué un rôle important dans la mise à l'épreuve ou dans la mise à distance des idées reçues. Nos travaux remettaient en cause un mode, cinq fois millénaire, de transmission de la culture fondée d'abord sur l'étude de textes…

3. La création de la didactique exigeait des établissements spécifiques originaux et surtout bien protégés contre les dérives et contre les réactions prématurées du milieu. La reproduction de nos expériences dans des lieux moins bien équipés et protégés aurait provoqué des réactions létales de la part des institutions savantes et du public. Le COREM avec l'IREM de Bordeaux a lutté dès le début contre les méprises, les maladresses et les excès induits autour de la réforme qui nous a fait naître. Nous n'avons pu que prévoir des dérives de toutes sortes et observer aussi précisément que possible leurs effets.

4. Pour d'excellentes raisons mathématiques, logiques, épistémologiques et parfois empiriques, nous avons été conduits rapidement à substituer aux concepts classiques, des concepts nouveaux avec un usage et un vocabulaire approprié aux nombreux phénomènes que nous devions étudier, conjointement et longuement, avant de pouvoir les communiquer. Les ruptures avec les approches classiques étaient trop nombreuses et trop profondes. Le public, comme les réformateurs, attendaient des IREM une mise en développement rapide, soutenue par des argumentations simples et par des innovations compatibles avec les connaissances disponibles chez les enseignants, augmentées de celles que fournissaient les mathématiciens. Il demandait d'y inclure les apports nouveaux dans des disciplines comme la pédagogie, la linguistique, l'épistémologie, la psychologie…, et acceptables et surtout gratifiant pour le public et en particulier pour les parents d'élèves… et pour les mathématiciens (!).

Or nos résultats les plus convaincants étaient obtenus dans des conditions tellement spécifiques qu'il était impossible de les faire connaître et surtout de les faire reproduire dans des lieux non protégés. Il n'était donc pas question d'encourager la réplication directe de nos expériences dans les conditions de l'époque, tant que des structures spécifiques, appropriées à des recherches expérimentales en Didactique des mathématiques, n'existeraient pas et tant qu'une culture Didactique appropriée ne se serait pas un peu répandue dans la population. Nous n'avons pas pu connaître, ni surtout su répandre assez vite cette culture, trop étrange par ses ambitions, ses méthodes et son éthique.

5. Aujourd'hui nous observons le retour en force des conceptions classiques, appuyées sur des médias modernes friands de conceptions simplistes et brutales de l'apprentissage. Ce retour montre bien les obstacles créés par la « didactique du texte » et par son corollaire : la suite « enseignement (définition, théorème, preuve) suivie d'épreuves (exercices et applications) », surtout adapté à une approche individuelle compétitive et coercitive de l'éducation. Ce dogme est intangible parce qu'il régit les importants et délicats équilibres entre les différentes disciplines et la société, à propos de l'enseignement. Cette culture constitue un obstacle épistémologique majeur à l'émergence d'une *Science Didactique pour laquelle la connaissance peut apparaître dans des circonstances favorables, se développer et précéder une mise en forme canonique effectuée par les élèves*. J'appelle de mes vœux une réelle coopération scientifique de ces communautés à propos de ce problème fondamental pour nos sociétés, non pas pour dicter ensemble ce qu'il faut faire mais pour comprendre comment fonctionne réellement l'acculturation des élèves à leur société.

6. J'insiste sur ce point pour répondre à ceux qui nous ont reproché ce qu'ils appelaient « la fermeture » de la Théorie des Situations Didactiques, voire une certaine rigidité dans sa conception, sans en comprendre l'objet ni les causes ; et aussi à ceux qui, suivant une tendance perverse de notre époque, voudraient attribuer la responsabilité de réponses nécessaires dans une situation, à des vertus ou à des vices de ses acteurs. Au contraire, nous

avons souvent diffusé trop prématurément des textes ambitieux mais inachevés et parfois énigmatiques, pour qui n'avait sous les yeux, ni la préparation, ni la loupe nécessaire.

7. L'héritage matériel, méthodologique, conceptuel et scientifique du COREM est considérable. Mais les approches de la Didactique des mathématiques sont nombreuses et leur connexion avec les Théories des situations (TSM et TSD) mériteraient d'être approfondies. J'aurais aimé contribuer à unifier un peu le champ de la didactique. En particulier, la théorie des champs conceptuels fait une place aux situations, mais nous n'avons pas saisi cette opportunité pour montrer et préciser leurs rapports. La théorie anthropologique du didactique formalise le traitement des connaissances mathématiques dans les systèmes sociaux. Elle refond ainsi l'analyse de la transposition didactique et lui fournit un cadre théorique et une ingénierie remarquables, mais ses rapports avec la théorie des situations ne sont pas précisés. Il serait utile de les reprendre et de les confronter, analogies et conflits, avec l'ensemble des approches (Théorie des champs conceptuels, Théorie de l'action conjointe, etc.)

8. En conclusion, les questionnements et les apports scientifiques du COREM sont incontestables mais les conditions indispensables pour assurer, d'abord leur vérification, puis l'exploitation multidisciplinaire de ses observations n'étaient pas encore réunies. Tout ce qui n'a pas été conclu et décrit, tout ce qui était connu et reconnu par une communauté et qui n'a pas été écrit n'est plus accessible qu'à travers les traces que nous laissons. Vous trouverez celles-ci et pour un temps encore, dans la mémoire de ses acteurs et dans les lieux énumérés ci-après… Le COREM serait-il donc mort sans successeur ? Non car Serge Quilio, Yves Matheron et leurs collaborateurs ont relevé à leur tour le défi. À eux la parole !

# L'ACCES AU MILIEU SCOLAIRE POUR L'ELABORATION ET L'EXPERIMENTATION D'INGENIERIES DIDACTIQUES DE RECHERCHE : CONDITIONS ET CONTRAINTES
# LE DISPOSITIF DES LÉA (LIEUX D'ÉDUCATION ASSOCIES A L'IFÉ)

Yves **MATHERON**

IFE-ENS de Lyon

yves.matheron@ens-lyon.fr

Serge **QUILIO**

ESPE de l'académie de Nice

serge.quilio@unice.fr

**Résumé**

Les ingénieries didactiques sont nées en mathématiques dans le courant des années 1970, puis se sont développées au cours de la décennie suivante durant laquelle le concept a migré vers d'autres disciplines. Se démarquant des « recherches-actions », elles visaient la production et l'observation de phénomènes afin de construire une théorie des « systèmes didactiques » ; terme souvent synonyme de « classe » (Artigue, 2011), sortes d'isolats étroitement pilotés et contrôlés par des didacticiens. Il s'agit aujourd'hui de s'affronter à une toute autre question : « Comment créer les conditions épistémologiquement optimales d'enseignement d'un savoir dans un nombre significatif de classes ? » (Mercier, 2008).

Suivre cette voie engage à l'étude des conditions et contraintes venues de l'extérieur des systèmes didactiques et de leurs voisinages (système éducatif, société, civilisation), qui déterminent la manière dont les savoirs y sont enseignés et étudiés. Cette orientation entre en phase avec le changement de paradigme scolaire qui se fait jour : passer d'une visite des œuvres à un questionnement du monde (Chevallard, 2007) par la promotion d'une démarche de problématisation (Fabre, 2009) et de recherche engageant les élèves. Les LéA (Lieux d'éducation Associés à l'IFE), qui visent à instruire une question portée par les acteurs d'un établissement dédié à l'éducation, constituent un terrain pour des recherches de type clinique (Ginzburg, 1986 & Leutenegger, 2009) répondant à l'étude de ce changement de paradigme.

**Mots clés**

Ingénieries didactiques, lieux d'éducation associés à l'IFé, méthodologie clinique.

## LES LEA : BREVE DESCRIPTION

Lorsqu'en 2011 il a fallu refonder un institut de recherche en éducation après la dissolution de l'INRP, et qu'a été créé un institut intégré dans l'ENS de Lyon sous la dénomination d'Institut Français de l'Education (IFé), s'est posée la question de la forme à donner aux rapports des chercheurs de ce nouvel institut à leurs terrains de recherche. Du temps de l'INRP, plusieurs centaines d'enseignants, souvent dispersés sur le territoire national, étaient associées aux équipes de l'institut. La fondation de l'IFé fournissait une occasion de s'interroger sur la pertinence de ce dispositif.

Un modèle précédemment expérimenté à Marseille à partir de 2009 par Serge Quilio, sous la direction d'Alain Mercier – il s'agit de l'école primaire St Charles I dont nous parlons dans la suite de cet article –, a alors été adapté pour jeter l'une des bases sur lesquelles refonder l'association des acteurs de terrain aux recherches menées par l'IFé. Un des principes retenus a consisté à ancrer la recherche dans un lieu dédié à l'éducation, donc un lieu géographiquement circonscrit, en engageant certains des membres de cette structure éducative dans un projet défini entre eux et le chercheur.

Un LéA (Lieu d'éducation Associé à l'Institut Français de l'Education) se constitue ainsi autour d'une question portée par les acteurs d'un établissement dont la fonction principale relève de l'éducation. Il s'agit, majoritairement, d'un établissement d'enseignement primaire ou secondaire, mais cela peut aussi être un musée, un CHU, une école de danse, un réseau d'écoles autour d'un collège, etc. Un LéA est donc un lieu qui réunit un collectif d'acteurs autour d'un projet de recherche piloté par un ou plusieurs membres d'un laboratoire de recherche en éducation. Si l'origine de la question émane du terrain, elle est néanmoins travaillée par un chercheur qui devient le correspondant IFé. Le traitement de la question répond à une double finalité. Une partie porte une dimension « développement » et intéresse directement les acteurs de l'établissement LéA ; par « développement », il faut aussi bien entendre la résolution du problème initialement porté par les acteurs du LéA que, le plus souvent, leur développement professionnel. Une autre partie vient nourrir la recherche menée par le chercheur et son laboratoire. En 2013-2014, existaient 31 LéA dont les acteurs de terrain disposaient de quelques moyens attribués par la DGESCO sous forme de HSE - vacations. L'IFé, ou les équipes de recherche associées, assument la responsabilité financière du volet propre à la recherche, portant sur le matériel et le service des chercheurs engagés dans ce travail.

Le suivi du dispositif LÉA est assuré à l'IFé par un comité scientifique et un comité d'organisation. Les comités se réunissent plusieurs fois par an à l'IFÉ et des réunions des représentants de LéA se tiennent une à deux fois par an[1].

## SUR LES INGENIERIES DIDACTIQUES

La XV$^{e}$ école d'été de l'ARDM, qui s'est tenue en 2009, a été entièrement consacrée au seul thème des ingénieries didactiques. Nous ne revenons pas sur l'ensemble des travaux très riches qui y furent menés, et dont bon nombre visait la refondation de la notion. Retenons seulement dans ce court texte quelques-uns des extraits de certaines des contributions consignées dans les actes[2]. Michèle Artigue, dès l'introduction, dresse un historique du concept, de son évolution et des difficultés rencontrées. Elle formule « un principe d'incertitude entre *reproductibilité interne* et *reproductibilité externe*, c'est-à-dire entre reproductibilité préservant la dynamique externe de la trajectoire ou histoire de classe, et une reproductibilité préservant la signification des connaissances mathématiques mises en œuvre. Ceci signifie, en d'autres termes, écrit-elle, qu'une exigence forte de reproductibilité externe ne peut être satisfaite qu'en sacrifiant d'autant la reproductibilité interne qui est, en fait, visée. » Pour diverses raisons tenant aux conditions et contraintes propres au système éducatif tel qu'il est – épistémologie spontanée des enseignants et leur formation, changements de contrat didactique dans lequel les élèves ont des difficultés à entrer, « dérives » liées aux interactions professeur-élèves, organisations matérielle et temporelle de l'enseignement au sein du système, etc. – l'expérience de la reproductibilité, voire de la passation sous contrôle,

[1] Pour une information plus complète : http://ife.ens-lyon.fr/lea
[2] *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, La Pensée sauvage éditions

a montré que l'on se heurte soit à la difficulté de conserver la valeur épistémique portée par l'ingénierie (reproductibilité interne), soit à une difficulté dans le fonctionnement du système didactique à la faire vivre telle quelle (reproductibilité externe). C'est effectivement, nous semble-t-il, le bilan que l'on peut tirer de la mise en œuvre d'ingénieries didactiques dans une optique portée notamment par une intention de développement, à travers des implantations locales au sein du système. Cette incertitude nous apparaît déjà présente lorsqu'on observe certaines séances des ingénieries passées au COREM. Elles voient Guy Brousseau « reprendre la main » et piloter la classe face à des difficultés didactiques que ne parvient pas à surmonter la maîtresse, afin de maintenir l'adidacticité de la situation.

Lorsqu'on remonte à l'origine du concept d'ingénierie didactique, on trouve une forte volonté de démarcation par rapport à ce qui prévalait alors sous le terme de « recherche-action ». Elle passe notamment par le rejet de l'idéologie de l'innovation et la nécessité de produire des connaissances sur le système didactique en agissant pour cela sur lui. Une telle action s'appuie sur des connaissances préétablies, et on se réfère alors au concept bachelardien de « phénoménotechnique ». En retour, elle permet la mise à l'épreuve des constructions théoriques. A l'opposé des méthodologies « externes » de type questionnaires, entretiens, tests, etc. Yves Chevallard propose en 1982 et en citant l'exemple de Freud qui à la fois soigne et construit la psychanalyse, l'usage d'une méthodologie de type clinique. Cette proposition sera reprise et développée par Francia Leutenegger dans sa thèse en 1999, et utilisée depuis lors (Leutenegger, 2009).

Dès le début des années 1980, alors que l'ingénierie didactique se donne pour objet la construction de connaissances scientifiques sur le système didactique, pointe déjà une dimension développementale. Yves Chevallard, dans un document de travail pour la II$^{e}$ école d'été et daté de juin 1982, pose le problème « des rapports de la recherche en didactique et de l'action sur le système d'enseignement ». Il indique deux problèmes au moins, propres au système d'enseignement, sur lesquels la didactique scientifique peut, à cette époque, agir : « […] 2. La didactique peut aujourd'hui contribuer à apporter des améliorations réelles à <u>certains</u> types d'action <u>déjà connus et mis en œuvre</u> (e.g. la formation des enseignants), soit en améliorant les anciennes formules, soit en proposant de nouvelles modalités ; et peut aussi proposer de <u>nouveaux types d'action</u> (le travail sur <u>les élèves en échec électif</u> par exemple) ». Dans ce dernier exemple, peut-être s'agissait-il d'une allusion au « cas de Gaël » étudié par Guy Brousseau.

Une trentaine d'années plus tard, dans les actes de la XV$^{e}$ école d'été de didactique des mathématiques, Marie-Jeanne Perrin-Glorian revient pour les articuler sur les deux fonctions assignées aux ingénieries didactiques : « Pour ma part, je m'intéresserai aux deux *[ingénierie de production et développement et ingénierie phénoménotechnique]* dans la mesure où l'ingénierie phénoménotechnique produit des situations de classe qui diffusent dans l'enseignement ordinaire et où l'ingénierie de développement et de production peut ne pas viser uniquement un enseignement mais s'intégrer à une recherche qui étudie aussi les conditions de diffusion de cette production et son utilisation en formation des maîtres. »

D'une part, en effet, et de manière peut-être inattendue, des ingénieries initialement conçues pour la recherche se retrouvent désormais dans des manuels commerciaux, édités et diffusés en direction des élèves et de leurs professeurs : on pense par exemple à l'agrandissement du puzzle, à des propositions extraites de thèses (situations de dénombrement issues de la thèse de Maryza Krysinska pour introduire à la modélisation algébrique) ou encore à des documents d'IREM. Signe d'une transposition institutionnelle peu contrôlée et de l'impact des conditions et contraintes sous lesquelles se déroule l'enseignement des mathématiques au sein du système scolaire, ces appropriations et transformations d'ingénieries didactiques par les auteurs de manuels et les professeurs qui les utilisent, se font quasiment toutes au détriment des qualités épistémiques et didactiques dont elles étaient initialement pourvues.

D’autre part, certains travaux de thèse s’appuient sur des matériaux empiriques recueillis à partir de propositions d’enseignement testées dans le système par des enseignants non initiés à la théorisation didactique. Au fil des ans, une certaine porosité s’est ainsi parfois installée au sein de l’hypothétique frontière entre ingénierie de recherche et ingénierie de développement.

## UNE DIMENSION COLLABORATIVE : RECHERCHE SUR LE TERRAIN ASSOCIEE A FORMATION ET DEVELOPPEMENT PROFESSIONNELS

Une trentaine d’années après que Yves Chevallard a fourni quelques exemples illustrant les actions possibles sur le système éducatif, à partir de résultats de recherches en didactique, en tenant compte de « la porosité » qui vient d’être évoquée et de la volonté, portée par un certain nombre de professeurs, d’amélioration de l’enseignement des mathématiques, il est possible de reprendre à nouveaux frais la question des conditions et contraintes de diffusion et de réception des ingénieries didactiques au sein du système. Cette étude ne peut plus se limiter à la seule observation de séances en classe, même si elles nous informent sur la viabilité d’une ingénierie dans un isolat du système. Il faut aussi observer les professeurs, recueillir ce qu’ils disent avant, après et hors passation des ingénieries, recueillir les traces des influences du système sur la partie du système observée, notamment du point de vue de ce qui s’y joue relativement à l’organisation de l’étude d’un savoir, étudier la variabilité inter-classes et inter-professeurs.

### Mobiliser des forces souhaitant améliorer l’enseignement à partir des connaissances produites en didactique : développement

Michèle Artigue mentionne, dans les actes de la XV$^{e}$ Ecole d’été (*op. cit*.) et tout en soulignant que la tâche n’en est pas pour autant aisée, que « notre communauté a l’habitude, depuis plus de 20 ans, de combiner de façon productive les approches et concepts de la TSD avec ceux de la TAD ». C’est cette voie qui a été suivie au sein des deux LéA évoqués dans ce texte. Fort heureusement, il existe toujours, au sein du système, des enseignants des premier et second degrés, prêts à rechercher des changements dans la manière dont les mathématiques sont enseignées, afin d’améliorer leur apprentissage par les élèves ainsi que leur rapport à l’étude scolaire de cette discipline.

Dans cette partie du texte, nous évoquons un des LéA, un collège, dans lequel trois professeurs de mathématiques enseignent une grande partie du programme sous forme d’Activités et de Parcours d’Etude et de Recherche (AER et PER). Ils sont conçus à partir d’une analyse de l’organisation mathématique à enseigner, de choix raisonnés de transposition didactique, d’une réflexion sur les divers moments de l’organisation didactique qui en permet l’étude et par lesquels on tente d’engager la classe. Ces AER et PER sont produites au sein d’un partenariat entre chercheurs et professeurs, mais ce sont les chercheurs qui en assurent le contrôle épistémologique et didactique. Certaines des séances sont filmées et des moments de régulation réunissant chercheurs et professeurs, eux aussi filmés, se tiennent à intervalles réguliers. Ces deux types de films constituent une grande partie des matériaux empiriques utiles à la recherche. Ils sont complétés par des tests auprès d’élèves afin d’évaluer l’impact d’un enseignement combinant étude et recherche dirigées par le professeur. Le collège, devenu LéA pour trois années, est constitué de 36 classes et les effectifs avoisinent tous 30 élèves par classe. Par niveau, les AER et PER sont passés dans quatre classes, tandis que quatre autres, enseignées par d’autres professeurs selon les formes traditionnelles en vigueur, essentiellement l’ostension déguisée à partir d’activités trouvées dans les manuels, servent de classes témoins. Les cohortes d’élèves des classes où sont passés AER et PER sont suivies de la 5$^{e}$ à la 3$^{e}$. Les trois « professeurs expérimentateurs » enseignent l’année suivante dans une classe « LéA » différente de celle qui était la leur l’année précédente.

La logique qui préside à ce type d'AER et PER ne suit pas nécessairement celle sur laquelle sont bâties les ingénieries de recherche dont le soubassement théorique est celui, bien connu, de la Théorie des Situations Didactiques. La raison tient au fait que leurs passations dans le système « standard », et non dans une école dédiée à l'observation pour la recherche, supposeraient une formation préalable des professeurs à la didactique et des moyens que ne fournit plus l'Education Nationale. La profession ne dispose actuellement pas des connaissances de base élaborées par une quarantaine d'années de recherche en didactique et les professeurs engagés dans ce travail ne souhaitent pas nécessairement s'y former. Ils sont néanmoins « recrutés » en tant que volontaires pour expérimenter des propositions qui pourraient améliorer enseignement et apprentissage. C'est, en dehors du cas des trois professeurs de ce collège, celui de professeurs de mathématiques de deux autres collèges des environs qui expérimentent ce type d'enseignement depuis la rentrée 2014. De fait, ces professeurs paient de leur personne un engagement dans le travail qui va bien au-delà de ce que les faibles moyens financiers que l'Education Nationale leur alloue sont capables de prendre en compte. Il ne s'agit donc pas d'une organisation en situations adidactiques d'action, de formulation et de validation, avec milieux adidactiques, telles qu'on peut par exemple les trouver dans *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* de Nadine et Guy Brousseau et dans les films du COREM. Une telle construction *a priori*, bâtie sur une situation fondamentale, se révèle, comme on sait, le plus souvent délicate, et le pilotage de telles situations adidactiques demanderait tout à la fois des conditions d'organisation du système dont on ne peut actuellement disposer, et des professeurs qui, pour l'instant, n'y sont pas préparés.

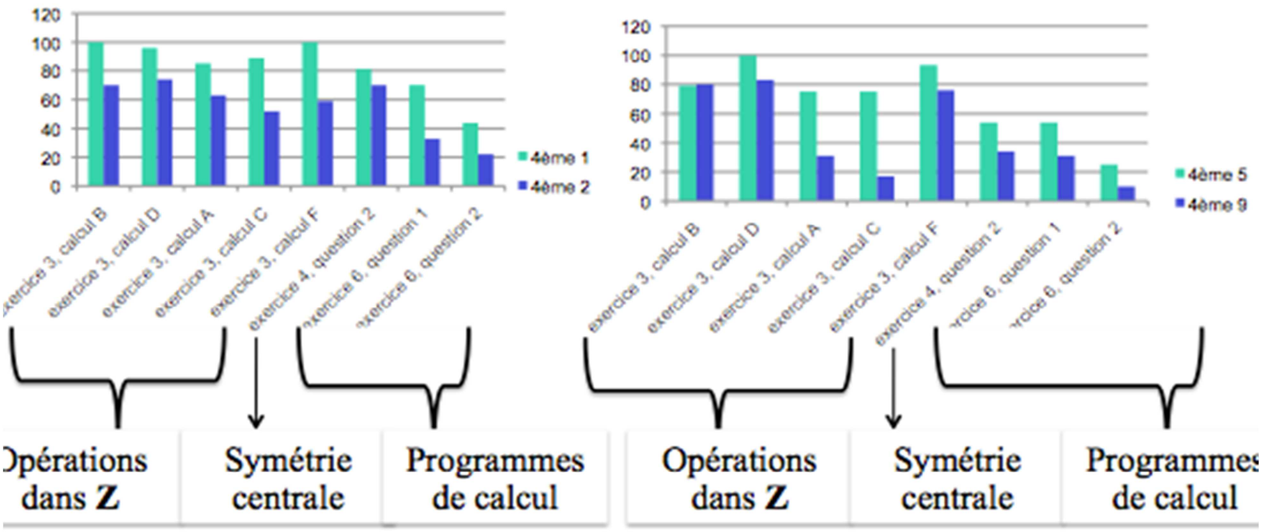
Au sein de nos ingénieries, une question dévolue aux élèves est mise à l'étude, dont l'analyse *a priori* a permis d'identifier quelles mathématiques du programme elle peut générer ; on retrouve en ce point l'idée de situation fondamentale. Les moments par lesquels passera cette étude sont eux aussi analysés *a priori*. Une telle question génératrice, relativement large, se décline, à travers son attaque par les élèves, en sous-questions dont la recherche de réponses mobilise une dialectique des milieux et des médias. Le professeur peut jouer le rôle de média, compte tenu de la faiblesse des médias pour la recherche consultables dans une classe lors d'une séance de 55 min. ; ce qui n'exclut pas que cette recherche se poursuive dans un temps extérieur à la classe, celui-ci n'étant pas uniquement consacré au travail de la technique à partir d'exercices. Dans ce type d'étude des mathématiques par la recherche, existent des moments adidactiques, mais aussi des moments d'enseignement de réponses fournies par le professeur pourvu que les questions aient été, auparavant, effectivement rencontrées et recherchées par les élèves.

On part donc de ce que les conditions et contraintes systémiques autorisent, de ce qu'on suppose possible de la part des professeurs, de ce qu'ils ont construit à partir de leur expérience professionnelle et de ce qu'ils pourraient en faire. Il s'agit ainsi de travailler dans ce qu'on pourrait désigner du terme de « Zone Proximale de Développement Professionnel », celle-ci s'enrichissant des échanges lors des moments de régulation avec les chercheurs. Les professeurs qui enseignent de cette manière nous disent trouver désormais insatisfaisant l'enseignement qui était le leur auparavant, et qu'ils continuent de pratiquer sur les parties du programme non couvertes par les AER et PER que nous avons conçus. Ce type de remarques semble à la fois montrer l'efficacité d'un accompagnement professionnel qui pourrait être élargi si le système voulait s'en donner les moyens, mais aussi que la conception d'AER et PER nécessite une implication fondamentale et indispensable des didacticiens : les conditions dans lesquelles est plongée la profession ne la rendent pas en mesure d'en concevoir et d'en évaluer les effets autrement que de manière subjective, dans le but de les développer.

## Quels résultats en termes d’amélioration des apprentissages ?

Nous donnons ci-dessous quelques résultats de l’expérience en cours en nous centrant sur les élèves qui ont suivi ce type d’étude des mathématiques en classe de 5$^{e}$. Un pré-test est passé par tous les élèves de l’établissement à l’entrée en classe de 4$^{e}$, au mois de septembre. Comme indiqué dans les lignes précédentes, nous comparons des classes expérimentales « LéA » et des classes « standard » sur des secteurs du programme de la classe de 5$^{e}$. Ces parties du programme sont celles qui ont été enseignées dans les classes LéA sous forme d’AER et de PER : les nombres relatifs, la symétrie centrale, l’entrée dans l’algèbre (programmes de calcul) à partir de la production d’écritures littérales.
Nous avons apparié des classes de niveau scolaire comparable. Ainsi les ex 5$^{e}$ 1 et 5$^{e}$ 2 sont-elles deux classes internationales de bon niveau dans lesquelles 27 élèves ont pu être soumis au test. Les ex 5$^{e}$ 5 et 5$^{e}$ 9 sont par contre de niveau moyen à faible, dans lesquelles 28 et 29 élèves respectivement ont passé le test. Pour sa conception, nous avons repris des items des évaluations nationales proposées par la DEPP pour la classe de 5$^{e}$. Ils concernent les trois secteurs des mathématiques du programme évoqués ci-dessus, et enseignés sous forme d’AER et PER dans les classes LéA.

Les diagrammes en bâtons ci-dessous, produits par Karine Drousset dont la thèse est en cours, indiquent le pourcentage des élèves qui, dans chacune de ces quatre classes, ont obtenu le code 1 pour chaque item : c’est-à-dire le pourcentage de ceux qui ont réussi le travail demandé par l’item. En vert et pour les bâtons situés à gauche, les classes LéA de 4$^{e}$ 1 et 4$^{e}$ 5, en bleu et pour les bâtons situés à droite les classes témoins de 4$^{e}$ 2 et 4$^{e}$ 9.




Les items évalués étaient les suivants :

- pour les nombres relatifs, les calculs suivants : A = -6 – (-5) = ; B = 7 + (-4) = ; C = 8 – (-3) = ; D = -10 + 3 = ; E = -1 – 5 = ; F = -3 + 5 – 4 =
- placer le symétrique d’un point par rapport à un autre sur une figure où les deux sont donnés
- pour les programmes de calcul, écrire sous forme d’expression algébrique un programme de calcul écrit en français, et comparer deux programmes de calcul

Comme on peut le constater, les pourcentages de réussite sont, pour chaque item, supérieurs (ou égal dans un cas) à ceux des classes témoins. Il faut, on le comprendra, prendre avec prudence des résultats qui n’ont aucune valeur statistique, même s’ils sont vus comme très encourageants par les professeurs. Y a-t-il un effet classes LéA enseignées sous forme d’AER et PER, et si oui, à quoi est-il dû ? Est-ce un effet du hasard ? Est-ce lié à la personne des professeurs, à leur engagement dans les PER, ce biais ne pouvant être éliminé tout comme il ne pourrait d'ailleurs l'être à plus grande échelle ? Est-ce dû à l'accompagnement des professeurs par les chercheurs dans la mise en œuvre des PER ou aux ingénieries PER proprement dites ?

Ces résultats sont donc à relativiser car l'échantillon est petit et des paramètres ne sont pas isolés. L'unité statistique étant la classe, il faudrait disposer, pour tenter de valider ces résultats et ne les rendre imputables qu'à l'engagement des professeurs dans les AER et PER ainsi conçus, d'un nombre beaucoup plus grand de classes participant à l'expérimentation, et sous les mêmes conditions d'accompagnement pour tous les professeurs ; ce qui est actuellement impossible compte tenu de la faiblesse des moyens humains et financiers dont nous disposons.

## QUESTIONS DE RECHERCHE ET INDICES RECUEILLIS A PARTIR D'UNE METHODOLOGIE DE TYPE CLINIQUE

### Saisir le plongement du didactique dans le social et certaines de ses conséquences

L'échelle des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002) modélise les « lieux » à partir desquels s'établissent certaines des conditions et des contraintes sous lesquelles se déroulent les processus didactiques. Ils influent sur le savoir tel qu'il est à l'issue des processus de transposition didactique : les déterminants des organisations de savoir. Ils influent aussi sur l'organisation sous laquelle se déroule son étude : les déterminants des organisations didactiques, c'est-à-dire la mésogénèse (Chevallard, 1992), la chronogénèse et la topogénèse (Chevallard, 1985).

Nous avons pointé, avec Robert Noirfalise (Matheron & Noirfalise, 2011), quelques-unes des conditions et contraintes venues des niveaux qu'on peut qualifier de sur-didactiques : ceux de la civilisation, de la société, de l'école et de la pédagogie. Parmi beaucoup d'autres dont on ne peut dresser une liste exhaustive mais que l'on pourrait regrouper derrière le terme bien commode de « forme scolaire », nous signalions une certaine idéologie constructiviste qui voudrait que tout vienne « de la tête de l'élève » – élève n'étant pas forcément un terme générique mais se référant plutôt à chaque individu singulier –, et qu'on pourrait qualifier, en suivant l'expression utilisée par Robert Noirfalise, « d'élève aux mains nues », ne disposant pas de médias mais ayant pour seules ressources que ses propres connaissances antérieures.

A l'inverse de ce qu'un certain discours institutionnel dit attendre « d'élèves aux mains nues », c'est-à-dire qu'ils « construisent le (ou leur !) savoir », une attitude partagée, conséquence d'un contrat didactique prédominant, relève de la docilité didactique de l'élève. L'esprit critique est peu sollicité car peu de questions sont mises à l'étude : une fois résolu l'enchaînement des diverses étapes sous lesquelles vivent la majorité des activités proposées dans les manuels et les classes, le travail de l'élève s'arrête en ce point. Il a rempli la part du contrat qui lui incombe. Au professeur de dire le vrai en tant que dépositaire du savoir, sans forcément que la raison de l'engagement de l'élève dans l'activité qui lui a été proposée ait effectivement été rencontrée. Puis l'élève attendra docilement que le professeur indique le type d'exercices qu'il devra savoir résoudre.

La séquentialisation du temps scolaire en séances de 55 min induit une forme de clôture de la recherche, lorsque celle-ci existe. Un problème posé en classe « doit » être résolu dans les minutes qui suivent. On peut s'interroger sur les raisons et les discours qui justifient une telle pratique professorale. Les problèmes posés sont alors clos, rédigés en questions enchaînées, sans ouverture sur d'autres questions, et ce qui les motive (leur raison d'être) est peu visible. Le *topos* des élèves est étroitement balisé car l'inattendu venu des élèves risque de faire « déborder » de l'heure. L'enseignement ne peut guère aller plus loin que celui du thème dont l'étude s'achève lorsque le capital horaire est épuisé. L'enseignement du thème est alors réalisé par l'agrégation de quelques sujets traités en autant d'heures de classe. Les thèmes sont enseignés par blocs plutôt étanches ; construire leur lien reste à la charge des élèves.

Dans le cours qu'il donne lors de la XV$^{e}$ école d'été, les actes constituant une référence de premier plan pour qui souhaite travailler la notion d'ingénierie didactique, Yves Chevallard met l'accent, parmi d'autres, sur deux problématiques en didactique. La *problématique de base* est définie de la manière suivante : « Etant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quels ensembles de conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer dans son équipement praxéologique telle entité praxéologique désignée ? » L'autre problématique dite *possibiliste* consiste à traiter la question suivante : « Etant donné un certain ensemble de conditions et de contraintes auxquelles telle institution ou telle personne est soumise, à quels systèmes praxéologiques est-il possible que cette institution ou cette personne accède ? » Yves Chevallard les qualifie de *duales*. Ne pourrait-on les considérer plutôt comme complémentaires pour ce qui concerne les ingénieries de recherche et développement, dans la mesure où ce qui est en jeu est l'étude du système (problématique possibiliste relative aux praxéologies didactiques possibles sous certaines conditions et contraintes existantes), associée à une visée transformatrice (problématique de base relative aux conditions à mettre en place pour que vivent certaines praxéologies didactiques sous certaines contraintes non modifiées) ?

Dans ce dernier cas, les résultats de la recherche touchent plus particulièrement à ce qui relève du politique. Tout en étudiant le système tel qu'il est, il s'agit alors de mettre à l'ordre du jour certaines questions de développement, non pas à partir de désidératas noosphériens toujours changeants car relevant d'influences idéologiques (qu'elles soient de nature politicienne, assises sur la croyance en l'innovation ou en l'idée dominante du moment), mais à partir de résultats scientifiquement établis. Pour ce qui nous concerne, de telles questions se déclinent de la manière suivante.

Est-il possible de faire *vivre localement*, dans le système tel qu'il est, un enseignement des mathématiques bâti autour de PER ? A quelles conditions didactiques ? Quels en sont les effets en termes de rapport des élèves aux mathématiques, et de rapport des professeurs à leur enseignement ? Qu'apprend-on ainsi sur le fonctionnement du système, sur le métier de professeur ? À quelles conditions, éventuellement à créer, ce type d'enseignement peut-il *être étendu* ? Est-ce envisageable, souhaitable ? A quelles contraintes se heurte-t-il ? Des phénomènes *d'obsolescence* étudiés antérieurement par Michèle Artigue (1988) se (re)produisent-ils dans des ingénieries plus ouvertes telles que les PER ? Et alors, de quelle nature sont-ils ?

## Au chevet du système didactique : des institutions pour l'observation

La méthodologie suivie pour observer et analyser les effets des conditions et contraintes sous lesquelles vivent les praxéologies didactiques au sein du système peut être rapprochée de celle développée au sein d'une approche clinique, ou encore de celle dite du « paradigme indiciaire » développée par Carlo Ginzburg (1986). Dans la perspective méthodologique que nous avons choisie, il s'agit de recueillir des traces qui, confrontées à un cadre théorique, celui de la didactique, vont se constituer en indices permettant le recueil d'informations sur le système didactique. Elles font à leur tour système, tout en gardant à l'esprit que l'administration de la preuve est toujours incertaine dans le domaine des sciences humaines. Néanmoins, le « cas de Gaël », cas que des personnes étrangères à la didactique et aux sciences humaines pourraient voir comme seulement singulier, ne constitue-t-il pas un exemple prototypique et fécond de « la pensée par cas », pour tout un pan de la théorisation didactique relative à l'élaboration de la notion de contrat didactique ?

Dans un chapitre de l'ouvrage collectif *L'interprétation des indices. Enquête sur le paradigme indiciaire de Carlo Ginzburg* (2007), cet auteur met l'accent sur l'importance de l'anomalie : « ce qui a du sens en revanche, c'est d'évoquer des anomalies ou des écarts par rapport à une certaine perspective. Dans un essai récent, […], j'ai tenté d'illustrer les potentialités cognitives de l'anomalie dans des secteurs différents. L'hypothèse du paradigme indiciaire m'a aidé à introduire ce thème, auquel je tiens beaucoup, dans une perspective historique. »

Transposé de la micro-histoire, qui est le champ d'étude de Ginzburg, à l'étude didactique du système, il s'agit de créer des perturbations, des anomalies donc, afin d'en faire, par contraste, émerger le fonctionnement « ordinaire ». Dans cette partie de ce texte, il s'agit de recueils d'indices permettant d'accéder à certaines des dimensions des praxéologies didactiques en mathématiques au sein du système éducatif secondaire. Les séances en classe, et plus particulièrement les séances de régulation, constituent des institutions dédiées à l'observation de notre objet d'étude. On emprunte ici au travail de thèse en cours de Karine Drousset pour donner deux exemples relatifs aux dimensions technologiques des praxéologies professorales.

Ci-dessous, deux extraits recueillis à des moments différents permettent d'illustrer le même exemple.
P évoque une élève aidée par son père et qui a appliqué la réciproque du théorème de Thalès. En classe, elle a dit à P : « j'ai fait quelque chose mais je n'ai pas bien compris. J'ai dit que *AB* sur *AE* est égal à … P : On arrête là ! »
Un autre extrait est relatif à la discussion d'une proposition émise par l'un des chercheurs. « Chercheur : si on autorisait ces élèves à aller voir le théorème Pythagore ailleurs… P' et P : non, ça ne me plaît pas du tout… P'' : autant leur donner directement P : tu leur donnes toi, c'est pareil… P : non, leur demander de trouver une relation entre les longueurs d'un triangle rectangle, c'est comme trouver un prof particulier… »

À travers ces deux extraits transparaissent deux contraintes relevant de la position de professeur dans le système didactique. D'une part, il ne peut guère exister d'autre dispositif d'aide à l'étude que celui sous le contrôle du professeur de la classe. Ceci peut être interpréter comme le signe d'une assez grande résistance à ce qui peut venir de l'extérieur du système didactique. En conséquence, si un parent ne peut jouer le rôle de média, qu'en sera-t-il d'un élève pour la classe ? D'autre part, comment envisager une modification dans la topogénèse du savoir et, partant, dans la mésogénèse, dans la mesure où seraient introduits par d'autres que le professeur (des élèves, des parents, des médias) des éléments d'un milieu qu'il ne contrôle pas ?

Dans un autre exemple, un des professeurs relate un épisode en classe. « P : en même temps, la symétrie orthogonale revenait par l'intermédiaire du pliage. A ce moment-là, on peut parler en termes de mathématiques. Mais tout le monde était capable de s'occuper de ça, et tout le monde avait envie parce que c'était évident qu'on allait y arriver. » Ce que décrit ce professeur peut être interpréter comme indice d'un habitus rétrocognitif : on ne peut engager les élèves dans une tâche mathématique que s'ils ont une forte probabilité de la réussir parce qu'ils possèdent des connaissances antérieures qui lui sont relatives. Comment alors engager les élèves et le système dans un changement vers un paradigme scolaire procognitif, qui verrait les élèves plongés dans un univers cognitif *a priori* étranger à leurs connaissances antérieures, autrement dit, dans l'enquête ?

# INGENIERIES MATHEMATIQUES COLLABORATIVES A L'ECOLE ELEMENTAIRE

## Objet du LéA Saint Charles à Marseille et directions de recherche

L'accent mis par les programmes sur « la connaissance des nombres et le calcul », du CP au CE1, et l'importance de l'acquisition des mécanismes liés à leur compréhension font de ces apprentissages l'une des priorités du système d'enseignement, dans la cadre du socle commun de compétences. C'est sur ces questions que le LéA Saint Charles est mobilisé.

Nous avons depuis quatre ans repris certaines des ingénieries développées dans les années 1980-1990 par Guy Brousseau et l'équipe du COREM (Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), et nous les avons transformées pour correspondre aux demandes sociales actuelles, qui portent en particulier sur l'apprentissage des algorithmes de calcul. Ces algorithmes sont fondés sur la numération décimale de position, qui est un système de représentation des nombres permettant un travail numérique sans retour à l'expérience, mais en référence à celle-ci : un modèle qui ne doit pas devenir une abstraction. L'enseignement que nous proposons est ainsi supposé donner aux élèves une expérience personnelle du monde modélisé comme condition de l'enseignement de ce modèle. Cet enseignement est aujourd'hui en place et nous cherchons maintenant les conditions de sa diffusion, donc de sa reproductibilité.

L'ensemble du programme du primaire concernant l'apprentissage du nombre au CP, dans le cadre du projet DGESCO ACE (Arithmétique et Compréhension à l'Ecole) et des algorithmes élémentaires de calcul (addition, soustraction, multiplication, division) est actuellement expérimenté dans toutes les classes de l'école.

L'enjeu est tout d'abord de montrer que les solutions retenues dans ces ingénieries résistent à leur mise en œuvre dans des conditions diverses : l'École Saint Charles I est une école en zone violence de centre-ville, puis de montrer qu'elles produisent les apprentissages déclarés par avance et qu'elles ne produisent pas, « en conditions normales d'utilisation », de résultats aberrants.

## Les manières de l'étude portées par les ingénieries mises en œuvre ont un rapport avec les types de savoir en jeu

Le rapport entre types de savoir en jeu et manières de les étudier fait l'objet des thèses en cours de Mireille Morellato et Alain Yaiche. Ce principe énonce sous une forme moins élaborée ce qu'a défini Yves Chevallard (2002) en termes de « niveaux de codétermination didactique ». En introduisant la notion de situations dans les ingénieries mises en œuvre, on comprend que les types de situations déterminent les formes épistémologiques des savoirs enseignés et appris. La manière dont les types de situations peuvent exister, leur écologie, c'est justement ce que les niveaux de détermination désignent, et nous tentons d'en donner une analyse. Notre travail collaboratif avec les professeurs vise à permettre l'existence de nouvelles manières d'étude pour que des formes épistémologiques nouvelles vivent, tout en évitant certains réflexes professoraux contre-productifs. Ces derniers engendrent une épistémologie à la fois autoritaire et empiriste dont nous savons qu'elle ne permet pas aux élèves, même aux meilleurs d'entre eux, de s'engager dans un rapport un peu solide aux mathématiques et de manière autonome.

## L'enjeu de ces recherches menées collaborativement avec les professeurs

Ainsi, comme le didacticien qui observe les élèves au travail, le professeur doit pouvoir observer, non seulement les apprentissages que l'enseignement a rendus possibles, mais encore les problèmes que les élèves rencontrent et que le professeur doit identifier pour que leur résolution appartienne à la classe.

Cela nécessite d'organiser l'apprentissage des professeurs à l'observation leurs élèves, et suppose à la fois :

- une réflexion *épistémologique,* c'est-à-dire portant sur les savoirs scolaires, ceux qu'ils enseignent et ceux dont les élèves ont besoin pour apprendre,
- une réflexion *didactique,* c'est-à-dire portant sur le curriculum que les élèves sont en train de produire pour eux-mêmes et sur les propriétés de cette organisation de savoir,
- une réflexion *anthropologique*, c'est-à-dire portant sur les savoirs qui circulent en dehors de l'école et sur leur articulation avec les savoirs scolaires qui, si elle existe, fondera la force des savoirs scolaires en assurant de leur pertinence…

Cela suppose bien sûr que, pour les professeurs de l'école, il soit clair que « le programme » définit quelque chose qu'ils ont à produire : *un plan d'études* qui organisera leur enseignement. Cela suppose *aussi* que les professeurs ne travaillent pas seuls ces questions, mais qu'ils bénéficient de l'appui bienveillant des chercheurs des disciplines observant les rapports sociaux aux savoirs, des chercheurs sur les savoirs d'enseignement, et plus généralement de la société entière.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARTIGUE M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 9(3), 281-308.

ARTIGUE M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

CAMOS V. & BARROUILLET P. (2006). *La cognition mathématique chez l'enfant*. Marseille : Solal Editeurs.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU N. & BROUSSEAU G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

CHEVALLARD Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique.* Document de l'IREM d'Aix-Marseille, (51 p.)

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2e édition 1991.

CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 12(1), 73 –112.

CHEVALLARD Y. (2002). Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère) – du 21 au 30 août 2001* (pp. 3-32). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

CHEVALLARD Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP, 471*, pp. 439-461.

CHEVALLARD Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

FABRE M. (2009). *Philosophie et pédagogie du problème*. Paris : Vrin.

GINZBURG C. (1986). *Mythes emblèmes traces. Morphologie et histoire.* Lagrasse : Editions

Verdier, 2e édition 2010.
GINZBURG C. (2007). Réflexions sur une hypothèse vingt-cinq ans après. In D. Thouard (Éd.), *L'interprétation des indices. Enquête sur le paradigme indiciaire avec Carlo Ginzburg* (pp. 37-56). Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion.
LEUTENEGGER F. (2009). *Le temps d'instruire, approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique.* Berne : Peter Lang.
MATHERON Y. & NOIRFALISE R. (2011). Du développement vers la recherche : quelques résultats, issus du projet (CD)AMPERES, relatifs à la mise en œuvre de PER dans le système d'enseignement secondaire. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Éds), *Un panorama de la TAD, An overview of ATD* (pp. 57-76). Bellaterra (Barcelona), Espagne : Publicaciones del Centre de Recerca Matemàtica.
MERCIER A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Education & Didactique,* 2(3), 7 – 40.
PERRIN-GLORIAN M-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée sauvage éditions.
QUILIO S., & MERCIER A. (2012). Une phase du jeu du trésor dans une zone de discrimination positive : la mise en œuvre d'un collectif de pensée en moyenne section de maternelle dans la réalisation d'un code pour la désignation d'une collection d'objets. Consulté à l'adresse https://plone.unige.ch/aref2010/symposiums-courts/coordinateurs-en-q/variabilite-et-conditions-de-realisation-d2019une-ingenierie-dans-des-institutions-scolaires-ordinaires-le-cas-du-jeu-du-tresor-en-maternelle/Une%20phase%20du%20jeu%20du%20tresor.pdf

# REPERCUSSIONS DES DIFFICULTES LANGAGIERES DES ELEVES SUR L'ACTIVITE MATHEMATIQUE EN CLASSE. LE CAS DES ELEVES MIGRANTS

Karine **MILLON-FAURE**

EA ADEF 4671 Aix-Marseille Université, ENS de Lyon, IFE, 13248, Marseille, France.

karine.MILLON-FAURE@univ-amu.fr

**Résumé**

Afin de déterminer les répercussions des difficultés langagières des élèves migrants sur leur activité mathématique et sur le comportement de leur enseignant, nous nous sommes intéressés à une évaluation externe et à une séance d'enseignement. Ces observations nous ont montré la nécessité de maîtriser certaines compétences langagières spécifiques à l'activité mathématique pour réussir dans cette discipline. Or l'acquisition de ces compétences langagières n'est corrélée ni aux années de scolarisation en France, ni à la maîtrise de la langue usuelle. Par ailleurs, nous avons constaté que les adaptations que ces lacunes provoquaient n'étaient pas toujours bénéfiques : l'enseignant que nous avons observé avait en effet tendance à éviter l'utilisation des termes spécifiques aux mathématiques et ce comportement (nous parlerons de *refoulement didactique*) a eu de graves répercussions sur l'activité mathématique de la classe. Ceci nous a amené à concevoir un enseignement qui visait l'accélération de l'acquisition de ces compétences langagières afin que les élèves migrants puissent rapidement profiter pleinement des cours de mathématiques ordinaires.

**Mots clés**

Compétences langagières spécifiques à l'activité mathématique, refoulement didactique, élèves migrants, évaluation externe, séance d'enseignement au collège.

## INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans cette communication aux répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe. Pour étudier cette problématique, nous nous centrons sur l'étude d'une population bien spécifique : les élèves migrants. Nous désignons sous cette expression les élèves issus de pays non francophones et scolarisés en France depuis moins de six ans. Ce type d'élèves présentant des difficultés langagières particulièrement marquées, leur observation pourra permettre la mise en évidence de phénomènes didactiques susceptibles de se produire dans des classes ordinaires mais de manière moins perceptible. Dans un premier temps, nous évoquons dans cet article certaines recherches antérieures qui en se basant sur des analyses statistiques, mettent en évidence le lien qui peut exister entre les compétences langagières des élèves et leur réussite en mathématiques. En nous appuyant sur la théorie de l'action conjointe, nous cherchons alors à approfondir ces résultats en nous interrogeant sur l'influence éventuelle de l'enseignant sur ce rapport des élèves au savoir. Ces considérations nous conduisent à étudier dans un second temps, deux moments de l'activité mathématiques en classe : une évaluation de mathématiques en classe de 4e et une séance d'enseignement portant sur la réactivation des concepts de "face", "arête" et "sommet" en classe de 6e. En comparant des classes d'accueil pour élèves migrants et des classes ordinaires, nous cherchons à déterminer parmi les spécificités décelées dans les classes d'accueil, celles qui peuvent être imputables aux difficultés langagières de ce public. A partir des réflexions que ces analyses ont pu susciter, nous proposons enfin un dispositif susceptible de remédier à ces difficultés.

## I. APPUIS THEORIQUES

### a) Quelques recherches antérieures

En 1999, en s'appuyant sur une étude statistique, Wang et Goldschmidt prouvent que les élèves issus de l'immigration réussissent moins bien en mathématiques et abandonnent plus vite leurs études. Plusieurs facteurs peuvent expliquer ce constat (Civil, 2008). Citons notamment la situation sociale, économique et culturelle, souvent délicate chez les migrants (Millon-Fauré, 2011, pp.23-30) ainsi que les difficultés pour réinvestir les savoirs acquis dans le pays d'origine à cause notamment des spécificités dans les mathématiques enseignées (Girodet, 1996) ou des différences dans les méthodes d'enseignement (Lahire, 1995). Toutefois, Wang et Goldschmidt (1999) précisent qu'à niveau de langue fixé, le niveau en mathématiques des élèves migrants et non migrants est similaire, ce qui place les difficultés langagières en tête des facteurs qui peuvent entraver l'activité de ces élèves. De plus, Hofstetter (2003) montre que les étudiants réussissent mieux lorsque la langue de rédaction du test correspond à la langue d'enseignement des savoirs, qu'il s'agisse ou non de la langue maternelle. Cette dernière étude semble montrer que les compétences langagières nécessaires à l'activité mathématique s'acquièrent essentiellement en classe.

D'autres études se sont intéressées à la nature des compétences langagières nécessaires à la réussite scolaire. Ainsi Skutnabb-Kangas & Toukomaa (1976) et Spolsky & Shohamy (1999) mettent en évidence l'importance de la maîtrise de la langue de scolarisation pour réussir à l'école et montrent que plusieurs années séparent, chez les élèves migrants, la maîtrise de la langue usuelle et de la langue de scolarisation. Des résultats similaires avaient été mis en évidence par Cummins dès 1979. Ses observations l'avaient amené à distinguer deux types de compétences langagières (Cummins, 1979 a et b ; Cummins, 2000) :

- les BICS (basic interpersonal communicative skills) qui sont les compétences langagières mises en jeu pour communiquer dans la vie de tous les jours. Il suffirait de deux à trois ans à un enfant en immersion dans un pays d'accueil pour pouvoir soutenir une conversation courante dans la langue seconde.

- les CALP (cognitive academic language proficiency) correspondant aux compétences langagières nécessaires à la réussite scolaire. D'après lui, il faut environ cinq à sept ans pour maîtriser les CALP et donc pour pouvoir suivre convenablement les enseignements du pays d'accueil. Avant cela, un élève migrant pourra être gêné dans ses apprentissages scolaires par des difficultés langagières, quelle que soit son aisance pour s'exprimer dans la langue seconde.

Nous pouvons toutefois noter que ces recherches portent sur l'ensemble des disciplines scolaires : la situation est-elle la même si l'on se restreint aux mathématiques ? L'acquisition des compétences langagières nécessaires aux seules activités mathématiques nécessite-elle également un temps aussi long ? Dans cette communication, nous cherchons à approfondir cette problématique spécifiquement pour cette discipline scolaire. Nous voulons d'une part mieux comprendre les répercussions des difficultés langagières des élèves sur leur activité mathématique, d'autre part regarder la vitesse d'acquisition des compétences langagières nécessaires à cette activité. Pour cela, nous avons étudié des évaluations réalisées par des élèves migrants peu francophones de manière quantitative (en effectuant une analyse statistique sur les notes obtenues) et qualitative (en analysant les productions des élèves). Nous avons complété ces résultats par des questionnaires menés auprès de ces élèves afin de mieux comprendre les différences observées.

### b) La théorie de l'action conjointe (Sensevy & Mercier, 2007)

Une seconde approche nous semble nécessaire : même si cette problématique porte sur le rapport de l'élève au savoir, il nous paraît important de considérer le système didactique (formé de manière indissociable par l'enseignant, les apprenants et l'enjeu du savoir) dans sa globalité afin de tenir compte de l'influence que l'enseignant peut avoir sur ce rapport. C'est la raison pour laquelle nous nous appuierons sur la théorie de l'action conjointe, développée par Sensevy et Mercier (Sensevy & Mercier, 2007), qui insiste sur la nécessité d'étudier dans un même temps l'activité de l'enseignant et celle des élèves pour comprendre les processus d'enseignement et d'apprentissage en œuvre dans la classe : « Toute activité d'une instance (le professeur ou les élèves) ne trouve l'intégralité de son sens qu'à travers l'autre instance, l'une et l'autre rendues solidaires par le savoir en travail. » (Sensevy, 2007, p.2). Considérer « l'action didactique »[1] comme une action conjointe, conditionnée par la relation entre les actants, nous amène à accorder une attention particulière aux interactions entre enseignants et élèves, considérées comme des « transactions » (c'est-à-dire comme des manifestations de l'action collaborative menée par les co-agents). Dans cet article, nous nous restreindrons à l'étude des interactions verbales dans la classe, c'est-à-dire à l'analyse du discours de l'enseignant et des élèves durant un cours. Par ailleurs, la théorie de l'action conjointe, rejoignant sur ce point les ergonomes, considère l'activité comme adressée, c'est-à-dire comme conditionnée non seulement par l'action présente, mais également par des déterminants extérieurs à celle-ci. Ces considérations soulèvent quelques questions concernant notre problématique. Les difficultés langagières des élèves pourraient-elles être considérées comme l'un de ces déterminants de l'activité de l'enseignant et des élèves ? La connaissance de cette spécificité de son public induit-t-elle des modifications dans le comportement de l'enseignant ? Quelles sont les conséquences de ces adaptations éventuelles sur le rapport des élèves au savoir mathématique ?

Nous cherchons des éléments de réponse à ces questions à partir de l'analyse du discours de l'enseignant et des élèves durant une séance d'enseignement. Pour cela, nous comparons lors d'une même tâche, les interactions langagières dans une classe ordinaire et dans une classe accueillant des élèves migrants. Nous regardons le lexique utilisé et nous nous demandons si certaines des différences observées ne résultent pas des spécificités du public de la classe d'accueil. Nous nous interrogeons également sur l'influence que ces différences peuvent avoir sur l'activité des élèves. Nous faisons en effet l'hypothèse que l'activité des élèves en classe conditionne leurs possibilités d'apprentissage.

## II. COMPARAISON D'UNE EVALUATION AUPRES D'ELEVES MIGRANTS ET

[1] Nous entendons ici 'action' dans son sens le plus général (le fait d'agir), sans établir de distinction réelle entre action, activité, pratique etc… Par « action didactique », nous désignons donc « ce que les individus font dans des lieux (des institutions) où l'on enseigne et où l'on apprend » (Sensevy, 2007, p.6)

**D'ELEVES ORDINAIRES**

## 1) Méthodologie

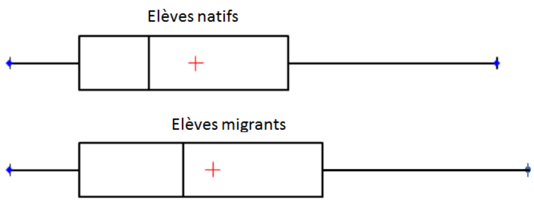
Nous avons cherché dans un premier temps à étudier les répercussions des difficultés langagières des élèves peu francophones sur leurs productions lors d'une évaluation en mathématiques. Pour cela, nous avons organisé une même évaluation dans des classes de quatrièmes ordinaires et dans des classes d'accueil pour élèves migrants de même niveau scolaire. Nous avons mis en place une évaluation externe, c'est-à-dire une évaluation pour laquelle le sujet n'avait pas été conçu par les enseignants des classes considérées. Pour construire ce sujet (présenté en annexe), nous nous sommes servis d'un des énoncés rédigés, lors de l'expérimentation Evaluation Externe (Millon-Fauré, 2013b), par des didacticiens à partir des points du programme officiel de quatrième jugés fondamentaux par des enseignants de collège associés à cette expérimentation. En organisant cette évaluation en fin d'année scolaire, nous nous sommes assurés que, dans toutes les classes observées, les savoirs mathématiques mis en jeu avaient été enseignés, quelle que soit la forme qu'aient prise ces enseignements dans les diverses classes. Nous avons proposé cet énoncé dans quinze classes de 4$^{e}$ (parmi lesquelles trois classes d'accueil uniquement composées d'élèves migrants et huit classes comprenant quelques élèves migrants) répartis dans six collèges (quatre collèges ZEP et deux collèges ordinaires). Cela correspondait à une population de 324 élèves, dont 43 élèves migrants.

Nous avons alors comparé les classes accueillant des élèves migrants et les classes ordinaires durant les différentes phases de l'évaluation (la conception de l'énoncé, la passation de l'épreuve, la correction des copies), mais nous n'aborderons dans cette communication que l'étude des productions des élèves. Nous avons tout d'abord procédé à une analyse quantitative, en effectuant une analyse statistique des notes obtenues pour l'ensemble du travail, mais également dans les différents exercices. Nous avons ensuite réalisé une étude qualitative en comparant les productions des élèves migrants et natifs lors d'exercices où la mise en jeu de compétences langagières était particulièrement flagrante à savoir, pour cette évaluation, les exercices de géométrie qui nécessitaient la compréhension d'un texte relativement conséquent et la rédaction de démonstrations.

## 2) Analyse des productions des élèves

L'analyse statistique des notes n'a pas révélé de particularités importantes chez les élèves migrants : la moyenne de leurs notes était sensiblement la même que celle des élèves natifs. Aucune relation de corrélation n'a pu être mise en évidence entre les notes obtenues à cette évaluation et les années de résidence en France ou la maîtrise de la langue usuelle. Ainsi certains élèves migrants a priori complètement francophones ont obtenu une très mauvaise note alors que d'autres élèves ayant de réelles difficultés à soutenir une conversation usuelle dans notre langue, ont par contre brillamment réussi cette épreuve. La meilleure note donnée à cette évaluation, toutes classes et tous collèges confondus, a d'ailleurs été obtenue par une jeune vietnamienne arrivée en France moins de deux ans auparavant sans parler un mot de français.

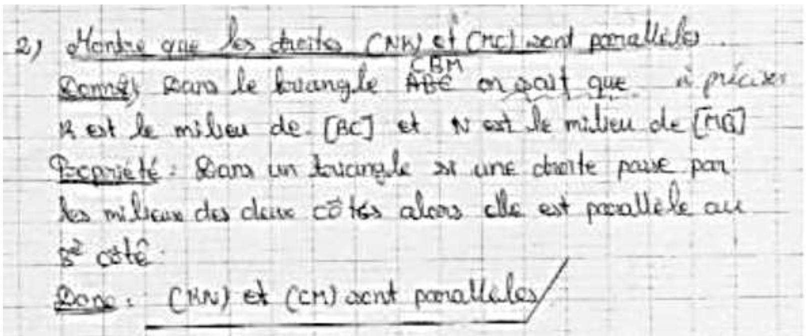
Une analyse plus approfondie des distributions de notes nous montre toutefois que les résultats obtenus par les élèves migrants sont un peu plus dispersés que ceux obtenus chez les élèves natifs :




*1. Graphique indiquant la répartition des notes chez les élèves natifs et migrants*

Par ailleurs la comparaison, pour chaque élève, de la réussite aux différents exercices permet de constater que les élèves natifs ont un peu mieux réussis les exercices de géométrie que de calcul alors que la tendance s'inverse chez les élèves migrants. Essayons de comprendre cette dernière observation. Un examen de l'activité langagière nécessaire d'une part à la compréhension de l'énoncé et d'autre part à la production d'une réponse montre que les compétences langagières en jeu sont beaucoup plus importantes pour les exercices de géométrie que pour les exercices de calcul (voir le sujet en annexe). Il est donc possible que les difficultés langagières des élèves migrants aient pu entraver leur activité mathématique, notamment dans les exercices de géométrie.

Pourtant, certains élèves peu francophones ont réussi à surmonter cet obstacle. Regardons par exemple la démonstration produite par l'une de ces élèves à la deuxième question de l'exercice 2 : *'En considérant le triangle MBC, prouver que les droites (NK) et (MC) sont parallèles.'*




*2. Réponse d'une élève peu francophone à la question 2 de l'exercice 2*

Comment cette élève quasiment non francophone, a-t-elle réussi à produire un tel texte ? En y regardant de plus près, on s'aperçoit que les termes les plus importants de la question semblent être 'prouver' et 'parallèles', ce qui, au vu du programme de quatrième, oriente vers une démonstration mettant en jeu le théorème des milieux. La première partie de la phrase ('en considérant le triangle MBC), particulièrement délicate à comprendre à cause de l'utilisation du verbe 'considérer', qui plus est au gérondif, ne constituait qu'une simple aide. Si l'on regarde à présent la rédaction produite, on note tout d'abord la reprise de la question où le verbe 'prouver' a été remplacé par un synonyme, 'montrer', ce qui atteste d'une certaine compréhension de ce terme. Les trois catégories 'Données', 'Propriété', 'Donc', correspondent au schéma type choisi par l'enseignant de la classe pour rédiger toutes les démonstrations. 'K est le milieu de [BC]' est une reprise exacte de l'énoncé. 'N est le milieu de [MB]' est par contre une information tirée de l'égalité MN=NB, ce qui traduit une bonne compréhension du terme 'milieu'. La formulation choisie pour la propriété correspond exactement à celle copiée dans le cours et apprise durant l'année. Quant à la conclusion, il s'agit d'une reprise de la question posée. Certes, à cela s'ajoute le choix pertinent des informations extraites de l'énoncé ou du cours. Mais il semble que la rédaction de cette démonstration nécessite une activité langagière moins riche que ce que l'on n'aurait pu le penser au premier abord et qui comprend essentiellement la compréhension des termes 'prouver', 'parallèle' et 'milieu'. En examinant les autres productions des élèves peu francophones ayant réussi cette évaluation, nous aboutissons à des observations concordantes. Ceci nous amène à penser que les compétences langagières indispensables pour comprendre cet énoncé et y répondre étaient relativement réduites et que certains élèves migrants les possédaient.

## 3) Conception de questionnaires et analyse des résultats

L'objectif de cette étape est de d'étudier le rapport des élèves migrants observés aux compétences langagières nécessaires pour comprendre l'énoncé de cette évaluation. Nous entendons par compréhension de l'énoncé la capacité des élèves à cerner le type de tâche attendue, sans pour autant être forcément en mesure de l'effectuer. L'observation des copies ne pouvait donc pas nous éclairer sur ce point, une erreur ou une absence de réponse pouvant tout aussi bien être imputable à une incompréhension de la question qu'à des lacunes sur le plan mathématique. C'est la raison pour laquelle, nous avons procédé à des entretiens complémentaires durant lesquels nous avons interrogé les élèves sur certains des termes du lexique mathématique employés dans l'énoncé. Certes, la compréhension de chaque mot d'un texte ne suffit pas à garantir la compréhension globale, mais nous avons fait l'hypothèse que la compréhension des termes que nous avions choisis était indispensable pour saisir la nature des tâches attendues. Nous reviendrons sur cette hypothèse par la suite.

Voici les questions qui ont été posées :

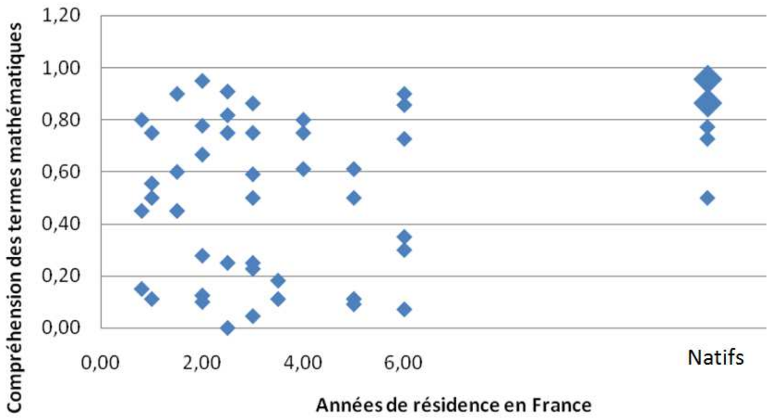
*1 : que veut dire 'développer' ?*
*2 : que veut dire 'factoriser' ?*
*3 : que veut dire 'sous forme simplifiée' ?*
*4 : que veut dire 'segment/droite' ?*
*5 : que veut dire 'milieu' ?*
*6 : que veut dire 'prouver' ?*
*7 : qu'utilise-t-on pour prouver ?*
*8 : que veut dire 'parallèle' ?*
*9 : que veut dire 'triangle rectangle'?*
*10: que veut dire 'triangle isocèle' ?*
*11 : que veut dire 'triangle équilatéral' ?*

Nous n'attendions pas des élèves une définition des termes proposés, mais simplement la preuve que le concept sous-jacent était acquis. Nous avons vivement incité les élèves à utiliser tous les systèmes sémiotiques à leur disposition (langage, geste, schéma …) pour 'formuler' l'idée évoquée par le terme donné. Tous les élèves migrants participant à cette expérimentation ont été interrogés, ainsi que plusieurs élèves natifs.

Il nous a ensuite fallu, à partir de ces informations, estimer la compréhension de chaque élève. Pour chaque item, nous avons donc affecté une des trois 'notes' suivantes : 0 en cas d'absence de réponse ou de réponse totalement erronée ; 0,5 lorsque des éléments exacts mais incomplets apparaissaient ; 1 lorsque les principales caractéristiques étaient données, sans prêter aucune attention aux éventuelles maladresses d'expression. A partir de là, nous avons tenté d'effectuer un traitement statistique de ces données.

Avant d'exposer les résultats obtenus, revenons rapidement sur notre hypothèse selon laquelle les termes que nous avons choisis sont indispensables pour accéder à la tâche attendue. Alors que nous n'avions observé aucun lien entre la maîtrise de la langue usuelle et les notes obtenues à l'évaluation, l'analyse statistique des résultats de ce questionnaire montre cette fois une relation proche de la relation de corrélation entre la compréhension de ces termes et la distribution de notes. Plus exactement, un bon taux de réussite à notre questionnaire apparaît comme une condition nécessaire pour réussir cette évaluation. Notre questionnaire semble donc un outil pertinent pour évaluer certaines compétences langagières indispensables à l'activité mathématique attendue dans cette évaluation.

Regardons à présent la distribution des taux de réussite obtenus à ce questionnaire  en fonction des années de résidence en France :




*3. Graphique indiquant la réussite au questionnaire en fonction des années de résidence en France*

Ce graphique montre une bien plus grande hétérogénéité dans les résultats obtenus chez les élèves migrants par rapport aux élèves natifs. Il nous permet également de constater que chez les élèves migrants, il n'y a pas eu d'amélioration perceptible avec les années de résidence en France : la distribution des résultats au bout de deux ans est par exemple quasiment identique à celle obtenue au bout de six ans. Aucune relation de corrélation n'a pu être établie entre ces deux paramètres. De même, il n'existe aucune relation de corrélation entre la réussite à ce questionnaire et la maîtrise de la langue usuelle. Ainsi lors de nos entretiens, certains élèves qui s'exprimaient en français aussi bien que des élèves natifs, butaient sur les termes, même les plus élémentaires, du lexique mathématique. A contrario, certains élèves incapables de soutenir une conversation usuelle associaient les concepts adéquats à la plupart des termes de ce même lexique.

## 4) Bilan de cette première expérimentation

Si les recherches précédemment évoquées montraient déjà l'impact que les difficultés langagières des élèves migrants pouvaient avoir sur leur activité mathématique, notre expérimentation apporte quelques nuances à ces propos : dans l'évaluation que nous avons mise en place, nous avons pu constater une plus grande hétérogénéité dans les notes obtenues par les élèves migrants par rapport à celles des élèves ordinaires. Or ce phénomène n'est pas corrélé à leur maîtrise de la langue usuelle. Nous rejoignons ici le point de vue de Cummins selon lequel les compétences langagières nécessaire à la réussite scolaire (les CALP), diffèreraient de celles mises en jeu lors d'une conversation usuelle (les BICS). Nous avons en effet pu trouver un répertoire de quelques termes dont la compréhension s'avérait nécessaire pour réussir notre évaluation, mais dont la maîtrise n'était pas liée à la maîtrise de la langue usuelle.

Toutefois, nous avons noté que la compréhension de ces termes ne dépendait pas du temps de résidence en France ou de la maîtrise de la langue usuelle, alors que selon Cummins il fallait environ deux fois plus de temps pour acquérir les CALP que les BICS. Cette divergence peut s'expliquer par le fait que Cummins regardait les compétences langagières nécessaires à la réussite dans l'ensemble des disciplines scolaires, alors que nous nous sommes focalisés sur les mathématiques. Par ailleurs, les compétences langagières mise en jeu dans l'activité mathématique ne se résument certainement pas à la compréhension de quelques mots d'un lexique spécifique. Mais nous émettons l'hypothèse selon laquelle les compétences langagières indispensables à la réussite dans cette discipline, tout au moins au collège, comprendrait essentiellement la maîtrise d'une quantité réduite de termes et expressions spécifiques. En effet, nous avons pu observer que les notes de notre évaluation étaient quasiment corrélées à la compréhension d'une dizaine de termes. Par ailleurs, lorsque nous avons analysé les productions (et notamment les démonstrations de géométrie) des élèves peu francophones qui avaient obtenu de bons résultats, il nous a semblé que la compréhension de quelques termes seulement leur avait été suffisante. Même si ce résultat mériterait des recherches supplémentaires pour être confirmé, il nous paraît donc probable que les compétences langagières indispensables pour réussir une évaluation mathématique au collège soient relativement réduites. Toutefois, nos résultats tendent à montrer que si certains élèves migrants réussissent à les acquérir très rapidement, d'autres n'y parviennent pas, même après plusieurs années de scolarisation. Ceci nous amène à nous intéresser aux séances d'enseignement : quelles sont les répercussions des difficultés langagières des élèves sur le déroulement du cours ? Comment les enseignants des classes d'accueil réagissent-ils à cette spécificité de leur public ?

## III. Comparaison d'une seance d'enseignement aupres d'eleves migrants et d'eleves ordinaires

### 1) Méthodologie

Il s'agit cette fois d'analyser les répercussions des difficultés langagières des élèves sur leur propre comportement et sur celui de leur professeur durant un autre temps de l'activité mathématique en classe : une séance d'enseignement. Pour cela, nous avons comparé deux classes :

la classe de 6e1 qui est une classe d'accueil, exclusivement composée d'élèves migrants. Depuis plusieurs années, leur professeur de mathématiques, M.T, n'enseigne que dans des classes à profil spécifique et notamment dans des classes d'accueil.

La classe de 6e6 qui est une classe ordinaire encadrée par Mme M qui a toujours exercé dans ce type de classe.

Pour faciliter la comparaison, nous avons demandé aux deux enseignants de choisir une même séance. Ils ont opté pour la première leçon de la séquence portant sur la géométrie dans l'espace et ont effectué une préparation commune. Nous n'étudions ici que la première activité proposée aux élèves durant cette séance. Celui-ci consistait à demander à chaque binôme de décrire un solide afin que leurs camarades puissent le reconnaître dans une collection de solides simples. L'objectif de cette activité était de motiver l'utilisation des termes 'face', 'arête' et 'sommet' déjà rencontrés à l'école primaire. Ainsi l'activité que les enseignants ont choisi sans même connaître le sujet de notre recherche impliquait une activité langagière plus importante que la moyenne des séances d'enseignement (même si de nombreuses activités de géométrie, surtout en début de collège, nécessitent la compréhension et la manipulation de plusieurs termes du lexique spécifique aux mathématiques : description de figures planes, suivi ou conception d'un programme de construction…). Ce paramètre a pu intensifier les répercussions des difficultés langagières des élèves que nous avons pu observer.

Nous avons filmé ces séances, puis nous avons analysé les enregistrements. Nous nous sommes tout particulièrement intéressés aux discours de l'enseignant et des élèves, notamment aux *ostensifs* et *non ostensifs* (Bosch & Chevallard ; 1999).

> Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, " montrer, présenter avec insistance " – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. […]. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces " objets " qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou

montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés. (Bosch & Chevallard, 1999, p.86).

Ainsi les ostensifs sont indispensables à la désignation des non ostensifs qui eux-mêmes règlent le fonctionnement des ostensifs. Toutefois cette relation ostensifs / non ostensifs n'est pas bijective : plusieurs ostensifs peuvent correspondre au même non ostensif (par exemple les mots 'cercle' et 'rond') et réciproquement un ostensif peut désigner des non ostensifs différents en fonction du contexte dans lequel il est évoqué (par exemple le terme 'rayon' dans un cours de mathématiques ou dans un grand magasin).

Dans cette communication, nous ne regardons que les ostensifs langagiers que nous supposons plus sensibles aux répercussions des difficultés langagières que les autres ostensifs. Nous nous focalisons sur le non ostensif 'solide' et nous nous intéressons aux ostensifs utilisés par les enseignants et les élèves dans chacune des classes. Dans cette optique, nous avons repéré les occurrences de chaque terme et nous les avons regroupées en deux catégories :

- les termes spécifiques ('solide', 'volume', 'forme de l'espace'…) pour lesquels la correspondance ostensif / non ostensif apparaît clairement.
- les termes génériques ('objet', 'truc'…) pour lesquels cette relation est beaucoup plus ambigüe.

## 2) Les ostensifs langagiers utilisés pour désigner le non ostensif 'solide'

Nous constatons que, dans la classe d'accueil, sur les 96 allusions qui sont faites au non ostensif 'solide', enseignant et élèves ont employé 97% des fois un terme générique : 96% des fois le terme 'objet' et 1 % des fois le terme 'truc'. L'utilisation de ces termes laisse planer une ambigüité sur le non ostensif associé et ce d'autant plus que durant cette séance, le terme 'objet' est également utilisé une fois pour désigner une figure plane et le terme 'truc' deux fois pour désigner un mémo du cahier.

Dans la classe ordinaire, sur les 79 allusions au non ostensif 'solide', seuls 5% figurent dans la catégorie des termes génériques. L'utilisation de ces termes est cantonnée au début de la séance, lorsque l'enseignant présente une définition du terme 'solide' :

> P : jusqu'à présent les figures qu'on avait vu /c'était des rectangles, des triangles, des carrés donc des choses qui étaient plates on pouvait facilement les dessiner au tableau ou sur une feuille parce que c'était très plat d'accord donc on avait l'habitude de voir ces figures là et aujourd'hui on va voir des **objet**s qui au contraire sont beaucoup plus difficiles à dessiner parce qu'ils ne sont plus plats ils ont une épaisseur **[ ]** d'accord ils ont
>
> E : Un volume.
>
> P : un volume comme tu dis c'est vrai donc on va voir des **objet**s comme ça qui // des **objet**s comme ça qui effectivement ont une épaisseur ou un volume hein et qu'on va appeler les **solide**s.

Une fois cette définition posée, enseignant et élèves n'utilisent que le terme 'solide'.

Dans la classe d'accueil, nous constatons donc que l'enseignant a choisi d'employer des termes génériques au lieu du terme du lexique spécifique aux mathématiques employé dans la classe ordinaire. Ce phénomène ne se restreint pas au cas du non ostensif 'solide'. A plusieurs reprises, l'enseignant évite, contrairement à sa collègue de la classe ordinaire, d'introduire dans le milieu les termes les plus adéquats.

Cet évitement du lexique spécifique aux mathématiques aura plusieurs conséquences sur l'activité mathématique de la classe. Tout d'abord, cela entraine un abandon de toutes exigences de précision : à partir du moment où l'enseignant se permet l'usage de termes génériques, il ne peut plus exiger de ses élèves l'emploi de termes adéquats. Ceci interroge quant à la nécessité de mémoriser les termes du lexique spécifique aux mathématiques, alors même que l'objectif de cette séance était de motiver l'utilisation des termes 'face', 'arête' et 'sommet'. Par ailleurs, la connaissance des termes spécifiques aux mathématiques s'avère indispensable pour communiquer en dehors de la classe : l'institutionnalisation des savoirs s'accompagne normalement d'une décontextualisation et d'une dépersonnalisation qui conduit à la production d'un énoncé compréhensible par des personnes extérieures. Les élèves de cette classe d'accueil, peu habitués à entendre et utiliser le lexique spécifique aux mathématiques, risquent également d'avoir du mal à comprendre les énoncés extraits d'un manuel, d'évaluations nationales ou du discours d'un autre enseignant, notamment lors du passage dans une classe supérieure.

Concernant le non ostensif 'solide', un autre problème, plus grave encore, se greffe à ceux-là. Non seulement l'enseignant n'utilise pas le terme du lexique spécifique aux mathématiques, mais il choisit comme ostensif un terme générique, ce qui rend impossible la spécification des solides et notamment leur distinction avec les figures planes. Ceci complique son discours, ce qui pourrait expliquer pourquoi l'enseignant se cantonne à l'explication des techniques sans chercher à apporter d'éléments technologiques ou même théoriques. Par ailleurs, cette assimilation entre solides et figures planes entraine l'apparition de quiproquos entre l'enseignant et les élèves, dont voici un exemple :

> P *(à E qui n'arrive pas à décrire un pavé droit)* : T'm'as dit y'a combien de rectangle t'à-l'heure t'avais dit
>
> *E : Quatre*
>
> P : Marque-le bè tu m'dis tu m'dis l'objet a quatre rectangle par exemple [ ]
>
> *E : Non j'ai compris mais quand j'écris j'sais pas*
>
> P : Bè t'peux mar marque moi juste quatre rectangles c'est tout [ ]
>
> *E : Faut pas le dire*
>
> P : Mais si il faut le dire et après
>
> *E : Non j'dis pas qu'c'est un rectangle*

Si l'élève refuse d'utiliser le terme 'rectangle' dans sa description, c'est parce qu'elle s'imagine qu'il s'agit là du nom de son solide (elle dit d'ailleurs '*Non j'dis pas qu'**c'est un rectangle**')* et qu'il lui a été demandé de décrire ce solide sans le nommer. Mais l'enseignant qui ne perçoit pas la cause de cette méprise, ne parvient pas à la dissiper. Cinq autres quiproquos de cette nature apparaissent durant la séance. Le fait de s'interdire l'usage des termes 'rectangle' pour la description d'un pavé droit ou 'carré' pour la description d'un cube complique la tâche attendue, ce qui explique certainement en partie le manque d'investissement des élèves de la classe d'accueil. Ces derniers travaillent peu et sollicitent énormément l'enseignant qui, constatant que le temps didactique n'avance pas, se sent obligé de prendre en charge une partie de la tâche théoriquement dévolue aux élèves.

Enfin, l'assimilation entre solides et figures planes complique également l'institutionnalisation des savoirs. L'énoncé que l'enseignant propose à la classe comme définition d''arête' est même erroné. Il présente en effet ce terme comme un synonyme du mot 'côté' sans pouvoir préciser la distinction dans leur champ d'application respectif. Si 'arête' est juste « un autre mot pour dire côté », on peut se demander quelle pourrait être la nécessité de retenir ces deux termes.

### 3) Interprétations de ces résultats

Nous avons constaté que l'enseignant de la classe d'accueil évitait l'utilisation des termes du lexique spécifique aux mathématiques, comme par exemple le mot 'solide', et nous avons pu observer les répercussions que ce phénomène avait sur l'activité mathématique des élèves à court et à long terme. Ce phénomène ne relève pas de la réticence didactique (Brousseau, 1998) dans la mesure où l'enseignant n'attend pas des élèves qu'ils construisent eux-mêmes les savoirs dissimulés. Nous parlerons de *refoulement didactique*.

Quelles peuvent être les causes de ce *refoulement didactique* ? On peut d'une part penser qu'il s'agit d'une adaptation de l'enseignant aux spécificités des ses élèves, et notamment à leurs difficultés langagières. En effet, introduire un terme nouveau dans le milieu nécessite le recours à une définition ou tout de moins à des explications. Or lorsque la langue commune à la classe est extrêmement pauvre, ceci peut s'avérer délicat et terriblement chronophage, ce qui doit inciter l'enseignant à n'utiliser que des termes connus de ses élèves. Par ailleurs, cette activité visait déjà l'introduction de trois termes nouveaux ('face', 'arête', 'sommet'), ce qui a pu paraître suffisant à l'enseignant. Dans la classe ordinaire, au contraire, les élèves connaissaient ce lexique : il ne s'agissait là que d'une réactivation. Toutefois ce *refoulement didactique* peut également être uniquement dû à la personnalité de cet enseignant : peut-être celui-ci se préoccupe-t-il peu de la précision de son discours ou de celui de ses élèves.

Pour déterminer laquelle de ces deux explications est la plus pertinente, nous avons décidé de renouveler cette expérimentation en demandant au même enseignant de présenter la même séance dans une classe de sixième ordinaire. Comme cet enseignant n'encadrait que des classes à profil spécifique, nous lui avons confié, pour une heure, une classe qui n'était pas la sienne. Lors de cette séance, nous avons constaté une nette diminution des manifestations de refoulement didactique. Ainsi la classe utilise 49% des fois un terme spécifique pour désigner le non ostensif 'solide'. Ceci nous amène à penser que ce phénomène était en grande partie dû à une adaptation de l'enseignant aux difficultés langagières de ses élèves. Nous obtenons alors un cercle vicieux. Comme ses élèves présentent des difficultés langagières, l'enseignant évite d'utiliser les termes spécifiques aux mathématiques qui sont employés dans les classes ordinaires. Les élèves migrants ne peuvent donc pas mémoriser les termes théoriquement attendus si bien que le fossé avec les élèves ordinaires continue de se creuser ce qui poussera l'enseignant, lors d'une prochaine activité, à restreindre à nouveau l'activité langagière attendue…

Ainsi, concernant notre problématique, nous voyons que les difficultés langagières impactent le comportement de l'enseignant et que les adaptations provoquées réduisent parfois les possibilités d'action des élèves en matière d'activité mathématique.

## IV. MISE EN PLACE D'UN MODULE DE REMEDIATION

Nous avons pu observer dans quelle mesure les difficultés langagières des élèves migrants pouvaient entraver leur activité mathématique. Il convient à présent de se demander s'il est possible d'améliorer la situation.

### 1) Motivations et hypothèse de travail

Nos expérimentations ont mis en évidence la nécessité pour les élèves de maîtriser certaines compétences langagières pour réaliser l'activité mathématique en classe, que ce soit au cours d'une évaluation ou d'une séance d'enseignement. Ces compétences, distinctes de celles utilisées lors d'une conversation usuelle, s'avèrent délicates à acquérir, si bien que ni les années de scolarisation en France ni la maîtrise de la langue usuelle ne garantissent leur apprentissage. Toutefois, certains élèves migrants parviennent très rapidement à assimiler ces compétences langagières, parfois même avant d'avoir acquis celles mises en jeu dans une conversation usuelle. Ceci nous amène à formuler l'hypothèse selon laquelle il est possible de concevoir un enseignement pour les élèves migrants permettant d'accélérer l'acquisition des compétences langagières nécessaires à l'activité mathématique.

## 2) Description du module « MathFle »

Pour concevoir un tel enseignement, nous nous sommes appuyés sur les travaux effectués en didactique du Français Langue Seconde, notamment par Davin (2005), et nous avons tenté d'adapter les principes développés pour l'enseignement de la langue de scolarisation au cas spécifique des mathématiques. Ceci nous a conduit à mettre en exergue quatre principes susceptibles de permettre l'acquisition des compétences langagières spécifiques aux mathématiques :

- même si nous ne visons pas directement des savoirs disciplinaires, il convient de proposer aux élèves des activités présentant **un réel enjeu mathématique apparent**. Ceci favorise d'une part l'investissement des élèves dans la tâche et cela permet d'autre part aux élèves d'assimiler l'écologie d'une notion en même temps que son appellation. Par conséquent, nous cherchons à présenter des problématiques comparables à celles utilisées dans les classes ordinaires.
- Toutefois, sous cet enjeu mathématique apparent doit se cacher **un enjeu langagier sous-jacent**. Ainsi, les activités choisies doivent nécessiter, pour atteindre l'objectif mathématique, le recours à une certaine activité langagière mettant en jeu les compétences langagières ciblées. Les interactions élèves / enseignants ou entre pairs doivent notamment être encouragées.
- Il convient de s'assurer que **l'activité langagière mise en jeu se révèle accessible** pour le public visé. L'analyse *a priori* doit donc notamment prendre en compte, les compétences langagières nécessaires à la réalisation de chaque activité. D'éventuelles activités préparatoires, susceptibles de permettre la réactivation de certaines compétences langagières, peuvent par exemple être mises en place pour éviter que ce type d'obstacle ne vienne ensuite paralyser l'activité des élèves.
- Enfin, nous préconisons **un ralentissement du temps didactique** par rapport aux classes ordinaires. La mise en place de telles activités s'avère forcément plus longue à réaliser avec des élèves migrants qu'avec des élèves ordinaires, notamment en raison de l'activité langagière visée et encouragée. Par ailleurs, tous les termes du lexique spécifique aux mathématiques, même les plus simples, nécessitent plusieurs rencontres avant d'être assimilés par ces élèves, ce qui ralentit forcément la progression.

Ces principes s'avèrent difficilement compatibles avec les enjeux des cours de mathématiques ordinaires. C'est pourquoi nous avons souhaité compléter les cours de mathématiques par un module dont l'objectif résiderait dans l'accélération de l'acquisition des compétences langagières visées. C'est ainsi qu'est né, en septembre 2008, le module 'MathFle' (Millon-Fauré, 2013 a) sous la forme d'une heure d'enseignement hebdomadaire proposée à tous les élèves migrants d'un collège marseillais, quel que soit leur niveau scolaire.

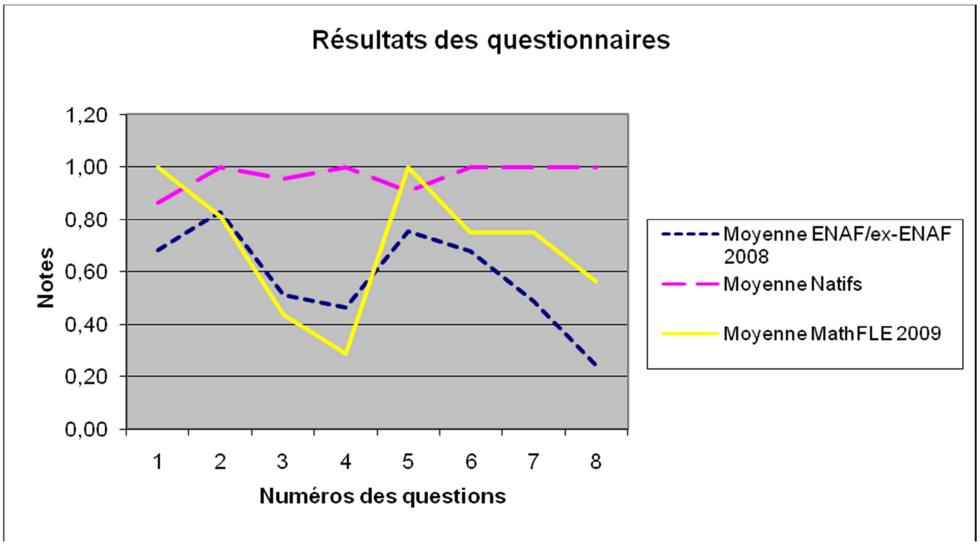
## 3) Tentatives d'évaluation de ce dispositif

L'évaluation d'un dispositif d'enseignement est toujours délicate. Toutefois, nous voulions interroger les effets qu'avait pu produire ce module. Nous avons donc procédé en plusieurs étapes :

Nous avons tout d'abord analysé une des séances d'enseignement afin de déterminer si, d'une part, les principes préconisés avaient pu être mis en application et, d'autre part, si cela avait permis le travail des compétences langagières ciblées. L'étude de cette séance qui portait sur la recherche d'un lieu de points, a montré que sur ces deux aspects, le bilan était satisfaisant : les élèves ont notamment été amenés à formuler des conjectures, puis à argumenter en s'appuyant sur certaines subtilités de définitions mathématiques (comme par exemple la distinction entre un triangle équilatéral et isocèle).

Nous nous sommes ensuite intéressés au témoignage de l'enseignante du module qui avait pu constater les progrès de ses élèves concernant l'acquisition des pratiques langagières spécifiques à l'activité mathématique, et notamment sur le plan de la maîtrise du lexique mathématique. Par ailleurs, la comparaison de la connaissance du lexique spécifique aux mathématiques chez quelques élèves migrants appartenant à une même classe mais dont la moitié seulement avait pu bénéficier du module MathFle a permis de mettre en évidence les bénéfices que cet enseignement avait procurés.

Enfin, nous avons cherché à procéder à une évaluation un peu plus « quantitative » (même si le très faible effectif du module – à peine douze élèves - interdisait toute étude statistique). Nous avons donc proposé aux élèves qui avaient suivi cet enseignement certaines questions du questionnaire conçu lors de l'évaluation externe de la première partie et nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux relevés chez les élèves migrants n'ayant pas suivi le module :




*4. Graphique indiquant la réussite au questionnaire en fonction des items*

La comparaison des courbes en trait plein (élèves migrants ayant suivis le module MathFle) et en petits pointillés (élèves migrants n'ayant pas suivi le module) nous amène immédiatement à nous intéresser aux items 3 et 4 que les élèves du module MathFle ont nettement moins bien réussis que leurs camarades. Il s'agissait d'items portant sur la compréhension du terme 'prouver'. Or, le module MathFle regroupe des élèves de tout niveau scolaire et, cette année-là, plus de la moitié de son effectif fréquentait des classes de 6$^{e}$ et de 5$^{e}$ qui n'avaient donc pas travaillé la démonstration dans les cours de mathématiques ordinaires. Il apparaît clairement que l'enseignement du module n'a pas suffi à ces élèves pour construire ces concepts (ce qui n'a rien de surprenant puisque ce module visait l'acquisition non pas de savoirs mathématiques proprement dits mais de compétences langagières). La première année, au contraire, tous les élèves interrogés étaient issus de classes de 4$^{e}$ et avaient par conséquent maintes fois rencontré ce type de tâches. Pour tous les autres items, nous observons que les élèves migrants ayant suivi le module ont obtenu de meilleurs résultats que leurs camarades n’en ayant pas bénéficié, et pour deux items, ils obtinrent même de meilleurs résultats que les élèves natifs !

Ceci nous amène à estimer que nous avons bien répondu à notre hypothèse de départ : le module MathFle a effectivement permis d’accélérer l’acquisition de certaines compétences langagières indispensables à l’activité mathématique (notamment la maîtrise du lexique).

## CONCLUSION

Cette analyse a montré que la réalisation d’une tâche mathématique nécessitait une certaine activité langagière et donc la mobilisation de compétences langagières. Nous avons observé que des lacunes dans ce domaine perturbaient l’activité mathématique des élèves et pouvaient provoquer chez l’enseignant des adaptations risquant d’accentuer encore le phénomène : percevant les difficultés que son public rencontre lors d’une activité langagière, l’enseignant tend à la réduire mais ce *refoulement didactique* prive ses élèves des moyens de réaliser la tâche qu’il leur demande.

Les compétences langagières nécessaires à l’activité mathématique qui comprennent, sans pour autant s’y réduire, la maîtrise du lexique spécifique à cette discipline, se distinguent des compétences mises en jeu dans la langue usuelle si bien qu’elles ne peuvent s’acquérir qu’à l’école. L’hétérogénéité dans la maîtrise de ces compétences chez les élèves migrants, quel que soit le nombre d’année de scolarisation en France, montre que les cours de mathématiques ordinaires ne garantissent pas leur acquisition. Ceci nous a amenés à réfléchir à un enseignement complémentaire sous la forme d’un module dont l’enjeu porterait uniquement sur les compétences langagières nécessaires à l’activité mathématique. Les résultats observés s’avèrent encourageants et nous prouvent qu’il est effectivement possible d’accélérer l’acquisition de ces compétences.

Nous reconnaissons toutefois les limites de notre expérimentation : ces observations concernent un faible effectif d’élèves, uniquement parmi la population des élèves migrants et pour la seule discipline scolaire des mathématiques. Qu’en est-il ailleurs ? Cette question ouvre de nouvelles perspectives de recherche. Il serait notamment pertinent d’aller observer d’autres séances de mathématiques dans des classes d’accueil afin de pointer d’éventuelles adaptations des enseignants aux difficultés langagières de leurs élèves et de les comparer à nos analyses. Par ailleurs, l’étude de la population des élèves migrants devait constituer un dispositif grossissant permettant de saisir certains phénomènes didactiques peu perceptibles ailleurs. Il convient donc d’aller à présent observer des élèves ordinaires pour voir si les difficultés langagières de certains peuvent entraver leur activité mathématique, et si l’on peut également mettre en évidence des manifestations de *refoulement didactique* chez les enseignants. On pourrait tout d’abord regarder des classes d’établissements ZEP où la langue commune aux professeurs et aux élèves s’est révélée particulièrement pauvre, ce qui pourrait provoquer des phénomènes comparables à ceux observés en classe d’accueil.

Si les recherches décrites ci-dessus nous montrent que des phénomènes similaires aux observations rapportées dans cette communication peuvent se reproduire ailleurs, il serait intéressant de s’interroger sur des possibilités de remédiation. Nous avons constaté que l’enseignement dispensé dans le module MathFle avait permis d’accélérer l’acquisition de certaines compétences langagières nécessaires à l’activité mathématique chez les élèves migrants. Un tel dispositif pourrait-il être efficace pour des élèves ordinaires présentant ce type de difficultés ? D’autre part, il serait souhaitable de sensibiliser les enseignants au rôle que joue l’activité langagière dans les processus d’enseignement et d’apprentissage de leur discipline, et de leur donner les outils leur permettant d’appréhender les compétences langagières mises en jeu dans les activités qu’ils proposent.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(1/3)*, 77-123.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : la pensée sauvage.

CIVIL M. (2008). Mathematics teaching and learning students: a look at the key themes from recent research. *11th International Congress of Mathematics Education (ICME) Survey Team 5 : Mathematics Education in Multicultural and Multilingual Environments*. Monterrey, Mexico.

CUMMINS J. (1979a). Linguistic interdependence and the educational development of bilingual children. *Review of Educational Research, 49*, 222-251.

CUMMINS J. (1979b). Cognitive/academic language proficiency, linguistic interdependence, the optimum age question, and some other matters. *Working Papers on Bilingualism, 19*, 197-205.

CUMMINS J. (2000). *Language, Power, and Pedagogy*. Buffalo, NY: Multilingual Matters.

DAVIN F. (2005). *Didactique du français langue seconde en France. Le cas de la discipline 'français' enseignée au collège.* Thèse soutenue à Aix-Marseille.

GIRODET M-A. (1996). *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes de calcul.* CREDIF Essais.

HOFSTETTER C. (2003). Contextual and Mathematics accommodation test effects for English-language learners. *Applied measurement in education, 16(2)*, 159–188.

LAHIRE B. (1995). *Tableaux de familles.* Gallimard. Edition du Seuil.

MILLON-FAURE K. (2011). *Répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématiques en classe : le cas des élèves migrants.* Thèse soutenue à Aix-Marseille.

MILLON-FAURE K. (2013 a). Enseigner les compétences langagières indispensables à l'activité mathématique. *Repère Irem, 90*, 49-64.

MILLON-FAURE K. (2013 b). Étape du processus de la négociation didactique et mesure du niveau des élèves : des fonctions concurrentes de l'évaluation. *Carrefour de l'éducation, 36*, 149-166.

SENSEVY G. & MERCIER A.(2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et de l'élève.* Paideia. Presses Universitaires de Rennes.

SENSEVY G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G.Sensevy & A.Mercier (Ed.). *Agir ensemble ; L'action didactique conjointe du professeur et de l'élève* (pp.13-45). Rennes : P.U.R.

SKUTNABB-KANGAS T. & TOUKOMAA P. (1976). Teaching migrant children's mother tongue and learning the language of the host country in the context of the sociocultural situation of the migrant family. Helsinki: *The Finnish National Commission for UNESCO.*

SPOLSKY B. & SHOHAMY E. (1999). *The languages of Israel: Policy, ideology and practice*. Clevedon: Multilingual Matters.

WANG J. AND GOLDSCHMIDT P. (1999) Opportunity to learn, language proficiency and migrant status effects on mathematics achievement. *The journal of educational research, 93(2)*,101-111.

## ANNEXE : ÉNONCE DE L'EVALUATION

**Exercice n°1** *(sur 7 points)* **:**

1) Développer et réduire

   A = 7 ($a$ – 1) – 4$a$ B = 9 + 2 ($c$ – 1) C = 7$d$ + 2 (4$d$ – 1) – 4 (7$d$ – 2) + 15$d$

2) Factoriser D = 3$a^2$ - 5$a$
3) Calculer et donner le résultat sous forme simplifiée

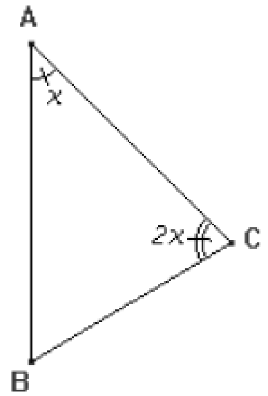
   $E = \frac{1}{5} \times \frac{15}{2} + \frac{3}{4}$ $F = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3$

**Exercice n°2** *(sur 5 points)* **:**

ABC est un triangle tel que AB = 6cm, AC = 4 cm et BC = 3 cm. K est le milieu du segment [BC]; M et N sont les points du segment [AB] tels que AM = MN = NB. Les droites (CM) et (AK) se coupent au point L.

1) Faire un dessin
2) En considérant le triangle MBC, prouver que les droites (NK) et (MC) sont parallèles.
3) Prouver que L est le milieu du segment [AK]

**Exercice n°3** *(sur 8 points)* **:**




On considère la figure suivante :

1) **Dans cette question (et elle seule)**, on a $x$ = 15°. Trouver les mesures des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
2) Trouver la mesure de l'angle $\hat{B}$ en fonction de $x$.
3) Pour quelle valeur de $x$ le triangle est-il rectangle en $C$ ? Tracer le triangle correspondant.
4) Pour quelle valeur de $x$ le triangle est-il rectangle en $B$ ? Tracer le triangle correspondant.
5) Le triangle peut-il être rectangle en $A$ ? Pourquoi ?
6) Pour quelles valeurs de $x$ le triangle ABC est-il isocèle ? (envisager tous les cas). Dessiner le triangle correspondant à chaque valeur de $x$ obtenue.

# L'ORDINAIRE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, PRATIQUES ENSEIGNANTES ET LEURS EFFETS SUR LES APPRENTISSAGES DES ELEVES

Lalina **COULANGE**

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux, E3D-LACES 4140

lalina.coulange@espe-aquitaine.fr

*Texte post-communication non transmis par l'auteur*

**Résumé annonçant la présentation**

Je fais l'hypothèse que la compréhension de l'ordinaire de l'enseignement et plus spécifiquement des pratiques enseignantes est une étape cruciale à des fins d'amélioration des apprentissages des élèves en mathématiques. L'étape peut sembler longue puisqu'il s'agit presque de la totalité des travaux synthétisés dans ma note de synthèse. Je reste toutefois convaincue de sa nécessité tant la complexité des phénomènes didactiques dans l'ordinaire des pratiques enseignantes et de leurs effets sur les apprentissages est grande. Mes recherches m'ont permis d'aborder plusieurs angles d'attaques liées à cette thématique : le rôle des situations, des savoirs, de l'exercice du métier de professeur ou de la différenciation dans les apprentissages, et ce, en lien avec différents domaines d'étude (dont celui de l'algèbre élémentaire) et dans divers contextes scolaires. Mes travaux m'ont conduite à mettre en œuvre des approches théoriques variées en didactique et plus récemment, en sociologie de l'éducation, dont il m'a tenu à cœur de montrer les complémentarités. Ce faisant, je crois avoir contribué à élucider la nature des relations, très dialectiques dans le fond, entre les savoirs mathématiques à enseigner et les pratiques « ordinaires » des professeurs. Le premier temps de mon exposé se centrera sur mes recherches sur l'ordinaire de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Le deuxième temps se centrera sur les travaux que j'ai conduits sur les pratiques enseignantes dans des contextes spécifiques et sur la différenciation dans les apprentissages des élèves. Ces deux temps de ma présentation me permettront d'illustrer deux mouvements complémentaires dans les recherches lié à la dialectique précitée : des savoirs mathématiques à enseigner aux pratiques enseignantes et inversement. En conclusion de mon exposé, j'avancerai de nouvelles perspectives de recherche en didactique des mathématiques que je qualifie d'« au plus près des pratiques enseignantes et de l'activité des élèves » afin de poursuivre le mouvement d'étude engagé.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

COULANGE L. (2012), *L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*, Note de synthèse en vue de soutenir une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7. Disponible sur Thèse En Ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00801863

COULANGE L. (2012), Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 32.3,* 361-408, La Pensée Sauvage

COULANGE L., DROUHARD J-P., DORIER J-L., ROBERT A. (Eds) (2012), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives, Recherches en didactique des mathématiques Hors série (350 p),* La Pensée Sauvage.

COULANGE L., ROCHEIX J.-Y. (2013), La construction des inégalités scolaires : approches sociologique et didactique, Séminaire National de Didactique des Mathématiques, *in* Coppé S., Haspekian M. (Eds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2012, 31-52,* IREM Paris 7 et ARDM.

# MODELISATION DE L'ACTIVITE DE DEFINITION EN MATHEMATIQUES ET DE SA DIALECTIQUE AVEC LA PREUVE ÉTUDE EPISTEMOLOGIQUE ET ENJEUX DIDACTIQUES

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université Paris-Est Créteil

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR-EA 4434)

cecile.obperso@gmail.com

**Résumé**

Ce travail s'inscrit dans la lignée de nos précédents travaux sur les définitions en mathématiques. L'enjeu était de parvenir à une modélisation épistémologique complète de l'activité de définition, avec une explicitation de la dialectique entre définition et preuve ; et cela, bien sûr, dans une perspective didactique, en vu de concevoir, analyser et transmettre de situations de construction de définitions.

Dans ce texte, un rapide panorama de l'ensemble des travaux de recherche traitant de l'activité de définition, travaux souvent disjoints et sollicitant des cadres théoriques très différents, permettra de souligner les manques (épistémologique et didactique) sur la question. La modélisation de référence de l'activité de définition, suivant quatre composantes que nous présenterons ici de manière synthétique, s'appuie sur des expérimentations et entretiens avec des mathématiciens.

Les perspectives de recherche de ce travail se situeront à trois niveaux : épistémologique, théorique, et didactique. En arrière-fond de cette recherche, nous retrouverons une question maintenant d'actualité dans notre communauté : celle de l'enseignement des mathématiques discrètes et de sa didactique.

**Mots clés**

Épistémologie, didactique des mathématiques, activité de définition, preuve, mathématiciens, mathématiques discrètes

## PROLOGUE – QUE PEUT ETRE UNE ACTIVITE DE DEFINITION ?

Pour introduire le questionnement sur les définitions en mathématiques et la façon dont celles-ci sont produites dans la sphère savante, nous allons utiliser un exemple en géométrie. Cet exemple nous permettra de souligner un processus propre à l'activité mathématique que nous appellerons par la suite « activité de définition ».

### La convexité : un concept doté de fortes potentialités mathématiques et didactiques

Nous utiliserons ici les apports historiques de Berger (2009, chapitre VII) et les problématiques qu'il propose pour montrer l'importance de la convexité et de ses définitions. Le concept de convexité, transdisciplinaire a été, selon Berger (2009), peu défini jusqu'à Minkowski (XIX-XXème). En effet, les problèmes précédant cette période étaient trop

difficiles pour l'époque, les outils pas assez puissants. La demande de définition du concept de convexité est alors devenue forte du côté de l'analyse harmonique (prise en compte de la dimension infinie), du calcul des probabilités, et de la programmation linéaire, avec des implications en géométrie (nouvelles caractérisations des ellipses) et en théorie des nombres, mais pas seulement (en physique également, dans la seconde moitié du XXème).
Il est possible d'engager une recherche sur le concept de convexité, simple d'apparence et de première approche, et de définir des opérations sur les convexes. Trois types de considérations de la convexité sont proposés par Berger (2009) :

- la section d'un convexe par un sous-espace affine (c'est encore un convexe) : cette étude génère de multiples résultats, difficultés et surprises, même pour les convexes les plus simples ;
- les symétrisations (de Steiner, de Schwarz), qui préservent la convexité et qui permettent d'appréhender des questionnements en physique ;
- l'addition de Minkowski : on essaie ici de faire de l'algèbre sur les convexes en définissant la somme de deux convexes d'un même espace affine, somme qui semble avoir un effet « régularisant », mais qui cache, elle aussi, de nombreux phénomènes.

De ces directions de travail et de différentes problématiques proposées dans Berger (2009), la question en fait transversale de la « méchanceté » d'un convexe ressort : elle revient à juger du défaut d'être rond. À partir de la caractérisation de la « méchanceté d'un convexe », les mathématiciens ont travaillé principalement sur quatre critères (ellipse de John Loewner, rapport aréolaire, inégalité isopérimétrique inverse, produit aréolaire) selon le processus de recherche suivant, processus impliquant clairement une activité de définition : définir différemment des degrés de méchanceté d'un convexe, réutiliser des résultats connus, mobiliser la dualité, changer de dimension, et générer de nouveaux problèmes.
Il ressort de ce rapide historique impliquant le concept de convexité des intérêts reconnus par les mathématiciens (simplicité et puissance du concept de convexité, applications en mathématiques et en physique), et des perspectives similaires en didactique : le concept est en effet facile d'accès (au moins au niveau des représentations que l'on peut en proposer), les énoncés sont simples à présenter. De plus, ceux-ci soulèvent des questions encore non résolues en mathématiques, impliquent de nouveaux concepts à définir, ainsi que des preuves problématiques qui elles-mêmes reposent des questions de définitions de concepts déjà connus.

## 1. INTRODUCTION ET QUESTIONNEMENTS

### 1.1. Contexte général de la recherche

Le travail présenté ici est dans la continuité de nos précédents travaux sur la définition en mathématiques (Ouvrier-Buffet, 2003), avec un arrière-plan épistémologique inscrit dans les mathématiques discrètes, et dans les SiRC (Situations de Recherche pour la Classe - Grenier & Payan, 2003). Dans ce cadre impliquant didacticiens et mathématiciens discrets, notre recherche s'est intéressée plus particulièrement à un élément de l'activité mathématique : la construction de définitions, activité pratiquée et reconnue par les mathématiciens. L'idée directrice était d'accéder à la formation de concepts via la construction de définitions. Il s'agissait ainsi de baliser la construction de concepts par différents « niveaux » de définition et d'étudier le processus consistant à faire évoluer ce que nous pourrions appeler des définitions intermédiaires. Cette recherche a également pris une forte orientation du côté de l'articulation entre le processus de preuve et celui de définition. Ce travail nous permet aujourd'hui de proposer une nouvelle voie d'entrée sur la construction de concepts dans l'enseignement.

L’accès au concept transversal de définition et à l’activité heuristique de construction de définitions dans la pratique du chercheur s’est avéré complexe car le processus de génération de concepts et de définitions appartient à la sphère privée du mathématicien. Dorénavant, nous entendrons par « activité de définition » tout processus impliquant la construction de définitions, de l’amorce de la résolution d’un problème à la construction formelle de théories. Nous parlerons ainsi d’activité de définition et de situations de construction de définitions : il sera toujours question d’une construction réelle de définitions.

## 1.2. Intérêts et apports de l’étude de l’activité de définition

Placer les définitions au centre d’une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve s’est révélé pertinent et productif à deux niveaux (au moins).

- Le premier niveau est bien sûr d’ordre épistémologique : la construction de définitions est l’une des composantes de l’activité du chercheur. Certains chercheurs se sont penchés sur la caractérisation des heuristiques et attitudes des mathématiciens (par exemple : Burton, 2004 ; Carlson & Bloom, 2005 ; Gardes, 2013 ; Schoenfeld, 1985 ; Weber, 2008). Tous soulignent la difficulté à faire émerger les implicites de la pratique des mathématiciens. Aucun de ces travaux ne porte sur une modélisation effective du processus de définition, ni sur l’explicitation de la dialectique entre l’élaboration d’une preuve et la génération de définitions. Il y avait donc un réel enjeu dans l’explicitation de l’activité de définition, au niveau épistémologique.

- Le second niveau est d’ordre didactique : le processus de définition a été très peu investigué en tant que tel dans la communauté didactique internationale. L’étude même de l’activité de définition occupe en fait une place discrète, mais récurrente dans les travaux internationaux, depuis les années 90 : déjà soulignée par Mariotti & Fischbein en 1997, elle apparaît aujourd’hui dans des travaux plus récents comme une ouverture pour appréhender les concepts mathématiques, dans une nouvelle perspective d’enseignement. Nous avons réalisé une synthèse critique des travaux existants, synthèse qui n’existait pas encore à ce jour dans la littérature internationale (Ouvrier-Buffet, 2013 ; partie II). Nous avons ainsi mis en évidence les invariants dans ces études relatifs aux concepts mathématiques retenus et aux types de situations expérimentées, mais aussi les éléments pertinents pour enrichir la modélisation que nous proposons de l’activité de définition, notamment au niveau des cadres théoriques et méthodologies didactiques. Nos travaux épistémologiques et nos analyses didactiques ont permis de modéliser l’activité heuristique de définition en mathématiques et de montrer l’efficacité de cette modélisation à trois niveaux : elle permet en effet de concevoir des situations impliquant la construction de définitions, de présenter une analyse *a priori* orientée sur l’activité de définition et la construction de concepts, de baliser et d’analyser le processus de formation de concept des étudiants et ainsi d’anticiper la gestion de situations impliquant une telle activité de construction de définitions. Les expérimentations ont été essentiellement conduites avec des étudiants de première année d’université, et ouvrent de réelles perspectives pour l’enseignement des mathématiques dans le supérieur, mais aussi pour le secondaire et la formation des enseignants.

## 1.3. Questionnements épistémologique et didactique, méthodologie

L’enjeu a été de parvenir à une modélisation prenant ses sources au niveau épistémologique, mettant en évidence la dialectique entre l’activité de définition et l’activité de preuve, et cela dans une perspective didactique (conception, analyse et transmission de situations de définition). À cette fin, nous avons exploité et articulé deux axes : un axe de recherche au niveau épistémologique et un axe de recherche au niveau didactique.

**Au niveau épistémologique**, la question de recherche était la suivante : comment modéliser

l'activité mathématique de définition au sein de l'activité mathématique ?
Plusieurs points d'appui ont servi notre étude et nous avons exploré différents axes de travail. Nous avons tout d'abord analysé et modélisé le travail de Lakatos (1961, 1976) : celui-ci propose en effet une explicitation de la démarche de recherche en mathématiques, avec un focus sur le processus de définition et de formation de concepts. Ce travail épistémologique, basé sur deux exemples de réécriture historique de construction de concepts, devait être étudié de manière spécifique afin de mettre en évidence et enrichir la description de l'activité de définition en mathématiques proposée par Lakatos (1961, 1976).
Nous avons montré dans (Ouvrier-Buffet, 2013) que l'outil théorique des conceptions (celui de Balacheff, 1995) permettait de structurer, enrichir et rendre opérationnels les apports de Lakatos. Nous avons ainsi modélisé ce que nous avons appelé la conception lakatosienne (Lakatos étant le représentant principal de cette conception). Les autres référents épistémologiques retenus dans nos travaux, pour accéder à un spectre complet de l'activité de définition, sont Aristote (dimension langagière et logicienne) et Popper (dimension axiomatique et construction de théories). Nous reviendrons ci-après (§3.3) sur ces trois conceptions qui représentent la première composante de notre modélisation de l'activité de définition.
Nous avons également relié l'activité de définition au processus de preuve. La dialectique définition-preuve est difficile à caractériser dans la pratique d'une recherche en mathématiques. Une analyse de l'activité des chercheurs via des entretiens a été conduite pour approfondir cet aspect et l'intégrer dans notre modélisation de l'activité de définition. Les résultats de ce travail seront présentés au paragraphe 3.4 via la deuxième composante, à savoir les quatre moments de l'activité de définition.
Par ailleurs, nous avons cherché à caractériser les types de situations mathématiques et les types de concepts « se prêtant mieux » à une activité de définition et à décrire les processus définissants possibles. Les types de problèmes permettant une activité de définition ont fait l'objet d'une recherche spécifique (Ouvrier-Buffet, 2013 ; partie III) et seront listés au paragraphe 3.5, constituant la troisième composante de notre modélisation.

**Au niveau didactique**, une double question de recherche découlant naturellement de l'étude épistémologique était la suivante : comment rendre notre modélisation épistémologique appropriée (choix, portée, limites) pour un usage didactique et quelles sont les nouvelles perspectives didactiques apportées par cette modélisation ?
Au niveau de la modélisation théorique, il a été nécessaire de considérer le niveau des µ conceptions (Balacheff & Margolinas, 2005) et une redéfinition des problèmes. Nous reviendrons sur ces aspects théoriques ci-après. Nous avons dû adapter ces éléments théoriques pour l'étude du concept de définition, dont la transversalité posait problème. Les résultats expérimentaux existants, montrant en particulier la faisabilité de la mise en œuvre de situations impliquant une activité de définition (à différents niveaux de l'enseignement et de la formation des enseignants), ont également servi pour une validation extrinsèque de la modélisation. La pertinence de la modélisation théorique a été éprouvée au niveau expérimental (voir par exemple Ouvrier-Buffet, 2011) et a démontré l'intérêt de l'enrichissement nécessaire du modèle (Ouvrier-Buffet, 2012) développé dans (Ouvrier-Buffet, 2013 ; partie III). La quatrième composante de notre modélisation présente une méthodologie pour concevoir et analyser des situations impliquant une activité de définition : elle sera présentée au paragraphe 3.6.

## 2. PANORAMA CRITIQUE DES TRAVAUX EXISTANTS SUR L'ACTIVITE DE DEFINITION

L'un des apports de notre recherche réside dans ce panorama. Il existe en effet des études disjointes impliquant l'activité de définition en mathématiques, mobilisant des cadres théoriques différents. Il était donc normal de s'interroger sur la portée de ses cadres et sur les interrelations possibles. Nous en reprenons ici les principaux résultats, sans revenir sur la description même des cadres théoriques. Le panorama complet est présenté dans la note de synthèse (Ouvrier-Buffet, 2013), ainsi que la mise en évidence des interrelations entre les travaux existants.

### 2.1. Trois types de recherche

Notre analyse critique a permis de souligner des points de convergence et a mis en évidence trois types de recherches :

1) Des reprises récurrentes du travail épistémologique de Lakatos (1976) qui apparaît comme prédominant. Dans ces travaux cependant, aucune modélisation ni critique de l'utilisation didactique de Lakatos n'ont été conduites. Nous avons donc pris en charge ce travail.

2) Une dimension cognitive découlant des travaux de Freudenthal (1973) et de Vinner (1991).

3) Une modélisation épistémologique de conceptions sur la construction de définitions à usage didactique (l'ensemble de nos travaux).

Dans les travaux de type 1) et 2), les aspects philosophiques et épistémologiques sont parfois présents mais rarement, et ils convergent essentiellement vers la vision de Lakatos. De plus, la conception, l'analyse, la reproductibilité, et donc la gestion, des situations impliquant une activité de définition en classe (niveau primaire, secondaire ou supérieur) ne sont pas prises en charge ou lorsqu'elles le sont, cela reste très vague. C'est à ces deux aspects en particulier, à savoir la modélisation épistémologique de l'activité de définition et sa transposition didactique, que notre travail de recherche sur l'activité de définition a apporté des réponses.

### 2.2. Spécificités des expérimentations conduites

Dans l'ensemble des travaux internationaux (à l'exception des nôtres), les conditions expérimentales sont toujours très spécifiques. Il s'agit d'expérimentations pilotées par les chercheurs eux-mêmes, avec des effectifs restreints (de 2 à 15 élèves voire 25 étudiants), parfois même avec des élèves surdoués. Le travail de recherche des étudiants est toujours un travail en groupe avec des supposées institutionnalisations pilotées par le gestionnaire de la situation (ces institutionnalisations ne sont pas décrites ni questionnées, mais leur existence transparait dans les articles présentant les travaux). Lorsqu'une activité de définition des étudiants est décrite, les leviers qu'utilise(nt) le(s) gestionnaire(s) de la situation et qui permettent une évolution des processus des étudiants ne sont pas explicités.
Si nous nous intéressons maintenant aux spécificités des situations et concepts utilisés dans ces expérimentations, nous pouvons noter que :

- les types de situations impliquant une activité de définition sont de deux types : il s'agit principalement de redéfinition de concepts familiers ou de changement de cadre de concepts déjà connus des étudiants ;
- les concepts mathématiques utilisés dans les expérimentations sont hors curricula ou déjà partiellement connus des étudiants ;
- le matériel à la disposition des étudiants peut aussi inclure un manuel comprenant des éléments qui vont être utiles au processus des étudiants, voire des définitions de départ.

Ces caractéristiques, tant au niveau des dispositifs et de la gestion que des situations et

concepts retenus, posent de manière forte la question de l'implémentation de situations impliquant une activité de définition en classe, quel que soit le niveau, et de la gestion de celles-ci.
Notre modélisation de l'activité de définition permet de rendre explicite le processus de définition et d'apporter un nouvel éclairage sur les travaux existants afin de montrer leur reproductibilité.

## 2.3. Apports de nos travaux en regard des précédents

Pour compléter ce panorama, rappelons ici brièvement les résultats apportés par nos travaux (Ouvrier-Buffet, 2003 ; 2006 ; 2011). Nous avons mis en évidence différents types de définitions qui s'articulent dans le processus de construction de définitions en mathématiques et entrent en dialectique avec le processus de preuve : les « définitions-en-acte », les « zéro-définitions », et les « *proof-generated definitions* », mais aussi ce que nous avons identifié et nommé « définitions formalisées » et « définitions théoriques » (voir les composantes 1 et 2 de notre modélisation ci-après). Les zéro-définitions et *proof-generated definitions* sont empruntées au travail de Lakatos. Quant aux définitions-en-acte, nous avons démontré leur existence et la nécessité de les considérer et de les définir précisément afin d'accéder à une caractérisation complète du processus de définition. Les définitions formalisées et définitions théoriques viennent compléter notre modélisation, et sont d'un autre ordre que les précédentes, nous y reviendrons ci-dessous.
Par ailleurs, notre modélisation du processus de définition a révélé son opérationnalité didactique, à trois niveaux :

- la conception et l'analyse a *priori* de situations impliquant une activité de définition, et, avec elles, l'analyse des processus définissants possibles ;
- la caractérisation des différents processus de définitions des étudiants, rendus observables par les éléments constitutifs de notre modélisation ;
- et la gestion de situations impliquant une activité de définition : en effet, notre modélisation met en évidence des leviers à la disposition du gestionnaire de la situation qui lui permette de proposer des rétroactions lors de blocages avérés. Les rétroactions sont de différents niveaux et sont décrites dans les opérateurs et contrôles des conceptions de notre modélisation.

Nos expérimentations ont porté principalement sur l'étude de concepts discrets et problèmes issus des mathématiques discrètes, au niveau du supérieur (première année d'université), donc hors curricula. Nous avons bénéficié de faibles effectifs (une dizaine ou une vingtaine d'étudiants travaillant en groupes). L'une des caractéristiques principale des concepts et problèmes que nous avons utilisés réside dans leur accessibilité par leurs représentations et leur exploration. Par ailleurs, certains des concepts que nous avons utilisés sont encore en construction dans la recherche mathématique (objets géométriques discrets ; problème de Frobenius), ce qui permet de créer des conditions où étudiants et gestionnaire de la situation disposent d'un même bagage conceptuel face à une situation impliquant un « nouveau » concept.
Les types de situations utilisées dans nos expérimentations étaient principalement des situations de classification, la preuve étant un lieu de validation des définitions construites (il n'était pas question de viser l'émergence d'un lemme caché à la Lakatos). Nous avons également investi de manière exploratoire les niveaux primaires et secondaire en travaillant sur une situation de classification sur la convexité (en primaire) et sur le concept d'arbre (dans le secondaire), avec les mêmes types de résultats qu'au niveau supérieur quant à l'efficience des outils didactiques que nous avons élaborés, à l'implication des élèves dans l'activité et à leur capacité à prendre la responsabilité de rédiger des définitions.

## 2.4. Des concepts « favorables » à une activité de définition

Dans les travaux impliquant une activité de définition, ou plus souvent de redéfinition de concepts, les concepts considérés étaient :

- soit nouveaux (et peu enseignés dans les curricula actuels) mais accessibles et permettant de générer facilement un premier *concept image* ;
- soit déjà familiers des étudiants et revisités, éventuellement dans un autre cadre mathématique.

Il est important de préciser ici les différentes caractéristiques des concepts que nous pouvons considérer comme de « bons candidats » à une activité de définition. Ce sont des concepts :

- possédant plusieurs définitions équivalentes, définitions pouvant être formulées dans des systèmes de représentations symboliques différents ;
    - dont l'accessibilité via des représentations et/ou l'exploration de problèmes est avérée ;
- appartenant à différents champs des mathématiques (c'est le cas des objets appartenant à différentes géométries) : il est vrai que la transposition des objets d'un champ à un autre implique une activité de définition, mais aussi de changement d'axiomatique et donc nécessite une exploration du nouveau concept, parfois en s'affranchissant de connaissances antérieures afin d'avoir un regard neuf sur le concept ;
- pour lesquels il est aisé de générer des questionnements naturels (c'est le cas lors de l'exploration de problèmes combinatoires ou lors de l'essai de transposition d'une axiomatique géométrique au cas de la géométrie discrète par exemple) ;
    - pour lesquels l'enseignant se retrouve dans la même position de chercheur que l'étudiant.

Les concepts issus des mathématiques discrètes impliqués dans des problèmes de combinatoire, d'arithmétique, de théorie des graphes, de géométrie discrète, de géométrie combinatoire, vérifient ces différentes conditions et se prêtent particulièrement à une activité de définition (cela a été démontré dans Ouvrier-Buffet, 2006 et 2011).

# 3. Modelisation de l'activite de definition en mathematiques et enjeux didactiques : un modele suivant 4 composantes

## 3.1. Présentation succincte de la modélisation

Nous avons donc modélisé l'activité de définition selon quatre composantes :

- La première concerne les trois conceptions épistémologiques de l'activité de définition, enrichies et validées par les travaux en didactique et des entretiens avec des mathématiciens. Les conceptions sont présentées ci-après sous forme de tableaux, avec le modèle cK¢. Il s'agit des conceptions lakatosienne, aristotélicienne, et poppérienne.
- La deuxième composante est une meilleure définition des problèmes, permettant également de générer de nouveaux problèmes impliquant une activité de définition (avec appui sur le concept de « problèmes » issu de la théorie de la complexité).
- Nous y ajoutons une troisième composante qui s'attache à décrire quatre moments de travail sur la définition (issu des entretiens avec les mathématiciens) : cette composante intègre en particulier le niveau « en-acte » qui n'est pas présent dans la modélisation via les conceptions mais où certains opérateurs et contrôles peuvent déjà intervenir. Ces moments ne sont pas hiérarchiques mais coexistent et interagissent. Ils sont éclairés par les conceptions et montrent que celles-ci s'articulent et coexistent dans l'activité de définition.

- La quatrième et dernière composante est une méthodologie pour concevoir et analyser des situations impliquant une activité de définition.

## 3.2. Le choix d'un modèle permettant de rendre compte des conceptions des mathématiciens

Nous considérons que l'idée générale sous-jacente à l'utilisation d'un modèle pour les conceptions est triple. Il s'agit de traduire la pluralité des « points de vue » sur un concept mathématique, mais aussi l'adaptation de tel ou tel point de vue pour résoudre différents problèmes et la définition des éléments opératoires permettant la résolution de ces problèmes. Cela implique de s'interroger sur le fonctionnement des conceptions, sur les problèmes, outils, et signifiants qui les différencient, mais aussi sur la façon dont elles peuvent permettre d'interpréter des erreurs et misconceptions. Il s'agit également, de manière plus globale, de parvenir à différencier un savoir mathématique, un savoir à transmettre, un savoir effectivement transmis. Ces éléments ont guidé notre choix d'un outil théorique permettant de circonscrire l'activité de définition.

### *3.2.1. Les conceptions au sens de Balacheff : le modèle cK¢*

Balacheff (1995), s'inscrivant dans la théorie des situations de Brousseau (1986), considère le système [Sujet <> Milieu] et qu'une conception est une propriété émergente des interactions au sein de ce système. Une conception est alors définie comme une « modélisation cognitive rendant compte des régularités des conduites d'un sujet relativement à un cadre. » (Balacheff, 1995, p. 228). Nous avons donc retenu le modèle de conception de Balacheff (repris dans Balacheff & Margolinas, 2005) qui s'appuie sur la notion de concept de Vergnaud (1991) et l'enrichit avec les structures de contrôles (qui se sont avérées nécessaires lors de l'exploration de conceptions dans des EIAH). Deux niveaux d'invariants interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur un problème et les structures de contrôle (∑) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs. Une dialectique forte existe entre opérateurs et contrôles, et c'est là l'un des intérêts de ce type de modélisation qui se révèle particulièrement adaptée pour modéliser un processus dynamique tel celui de construction de définition et décrire ses observables. Une conception est alors décrite par un quadruplet (P, R, L, ∑) où :

- P est un ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire ; P décrit le domaine de validité de la conception.
- R est un ensemble d'opérateurs. Ceux-ci permettent la transformation des problèmes. Ils sont attestés par des productions et des comportements du sujet.
- L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R. À l'image du modèle proposé par Vergnaud, les éléments de L sont langagiers ou non.
- ∑ est une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception. Les contrôles sont des outils de décision sur la légitimité de l'usage d'un opérateur et sur l'état du problème (résolu ou non).

### *3.2.2. Conceptions de référence et savoir savant*

Il est nécessaire de considérer des conceptions « de référence » qui font autorité, impliquant les savoirs de référence. La conception Cµ a été introduite par Balacheff (1995) comme plus générale que toutes les autres conceptions (son existence est un postulat) : Cµ est la conception de référence pour un µ-objet (µ est l'univers de référence composé de l'ensemble des concepts mathématiques). Ainsi, pour chaque concept, une conception Cµ domine, et c'est celle-ci qui sera caractérisable et accessible lorsque nous cherchons à modéliser un savoir savant. La complexité de notre recherche a été d'accéder au concept de définition qui n’appartient pas à un savoir savant unique et explicite mais à une pratique de mathématicien relevant en grande partie de sa sphère privée. L’avantage de théoriser par les µ-conceptions réside dans le fait qu’il s’agit en fait d’instances d’un concept. Cet éclairage théorique nous a permis de focaliser également sur la définition des problèmes (dans le couple sujet/problèmes), jusqu’alors insatisfaisante, et de poursuivre les questionnements relatifs aux perturbations [Sujet <> Milieu].

#### *3.2.3. Les objectifs de la modélisation de conceptions par le modèle cK¢*

Il s’agissait d’utiliser ce modèle pour structurer l’exposé d’un nombre minimal de µ-conceptions, significatives relativement aux différents niveaux de préoccupations sur la définition (que ce soit des aspects relatifs à la dénomination, à la preuve, à la construction de théories etc.). L’explicitation des opérateurs et des contrôles de ces conceptions nous a permis de mettre en valeur les composantes importantes dans tout processus de construction de définitions, et d’apporter un cadre à visée didactique, en vu de l’analyse de procédures de différents sujets (étudiants, enseignants, mais aussi mathématiciens). Rappelons que l’une des difficultés reconnues du modèle cK¢ est la définition de l’ensemble des problèmes caractérisant une conception. Nous pouvons aussi remarquer qu’il est tout aussi difficile d’accéder à une situation fondamentale. En ce qui concerne les concepts, ce que développe Vergnaud est également sujet au même genre de difficulté. La question de la définition des problèmes a été reprise, pour aller au-delà de ces situations, et représente l’une des originalités de notre travail.

### 3.3. Composante 1 de notre modélisation – Trois conceptions pour modéliser l’activité de définition

#### *3.3.1. Pourquoi Aristote, Popper, et Lakatos ?*

L’étude de ces trois conceptions nous a apporté effectivement une complémentarité sur le concept de définition : la conception aristotélicienne développe des composantes logiques et langagières (étude du discours), celle de Popper propose une théorie de la théorie (étude théorique), et la conception lakatosienne s’intéresse à la construction de définitions parallèlement à la construction de concepts (étude heuristique). Ces choix sont aussi étayés par une étude des typologies des définitions présentée dans Ouvrier-Buffet (2007). La présentation synthétique des conceptions qui suit est reprise et argumentée plus en détail dans (Ouvrier-Buffet, 2013).

#### *3.3.2. Conception aristotélicienne*

Aristote présente essentiellement le processus dit de définition par *genre et différences spécifiques*. Nous avons décrit sa conception pour les dimensions logique et langagière qu’elle renferme, mais aussi pour la problématique de « résistance aux contradicteurs » que propose Aristote dans sa présentation des définitions (Aristote, 1965). La caractérisation de cette conception a été réalisée à partir des textes d’Aristote (Aristote, 1965 & 1970). Concernant la question de l’existence, Aristote considère qu’elle n’a pas à être prise en charge dans la définition, mais que la question se posera. Il s’agit en fait d’éviter des contradictions en s’assurant de l’existence. Nous avons ainsi intégré la question de l’existence de l’objet défini à la conception aristotélicienne (Poincaré par exemple précise lui aussi que la définition comprend un axiome qui affirme l’existence de l’objet) au niveau des contrôles.

| **Problèmes (P) :**<br>Classification (l'exemple de la géométrie est donné), et plus généralement : tout problème où une délimitation (au sein d'un même *genre* par exemple) est possible.<br>**Systèmes de représentation (L) :**<br>- Langage et règles du discours<br>- Logique<br>- Systèmes de représentations propres au(x) concept(s) en jeu | |
|---|---|
| **Opérateurs (R)** | **Contrôles (∑)** |
| $\mathbf{R}_1^{\mathbf{A}}$ : procéder par *genre et différences spécifiques* (cela revient à rechercher des invariants au sein d'une classe).<br>$\mathbf{R}_2^{\mathbf{A}}$ : supprimer toute redondance.<br>$\mathbf{R}_3^{\mathbf{A}}$ : supprimer toute régression à l'infini.<br>$\mathbf{R}_4^{\mathbf{A}}$ : prouver l'équivalence entre définitions.<br>$\mathbf{R}_5^{\mathbf{A}}$ : formuler une définition esthétique (simple quant au langage). | - **Pôle « Logique »** : proscrire les cercles vicieux, les termes antérieurs doivent être définis. Une définition est une condition nécessaire et suffisante. L'unicité du concept défini doit être vérifiée.<br>- **Pôle « Langage et logique »** : proscrire les redondances et régressions à l'infini (d'où l'existence de termes primitifs) ; pas de métaphores ni homonymes.<br>- **Pôle « Essentialisme »** : interroger l'existence des concepts définis. |

*Tableau 1 – Conception aristotélicienne*

### *3.3.3. Conception poppérienne*

| **Problèmes (P) :** choix entre théories concurrentes<br>**Systèmes de représentation (L) :** relatifs aux théories et concepts en jeu | |
|---|---|
| **Opérateurs (R)** | **Contrôles (∑)** |
| $\mathbf{R}_1^{\mathbf{P}}$ : génération de contre-exemples (processus de réfutations).<br>$\mathbf{R}_2^{\mathbf{P}}$ : ne rien dériver d'une définition car une définition est un raccourci de langage.<br>$\mathbf{R}_3^{\mathbf{P}}$ : réduire le nombre de postulats et voir si la théorie explique davantage de choses au regard de telle ou telle définition.<br>$\mathbf{R}_4^{\mathbf{P}}$ : construire une axiomatique locale (composée de définitions, axiomes, propositions)<br>$\mathbf{R}_{\mathbf{4bis}}^{\mathbf{P}}$ : mettre à l'épreuve une axiomatique locale. | - **Pôle « heuristique »** : Résistance aux réfutations<br>- **Pôle « théorique »** : « Une théorie $t_2$ dépasse une théorie $t_1$ lorsque :<br>1) $t_2$ formule des assertions plus précises que ne le fait $t_1$, et celles-ci résistent à des tests plus précis.<br>2) $t_2$ prend en compte et explique davantage de faits que $t_1$.<br>3) $t_2$ décrit ou explique les faits de manière plus détaillée que $t_1$.<br>4) $t_2$ a subi avec succès des tests où $t_1$ avait échoué.<br>5) $t_2$ a permis de nouveaux tests expérimentaux qui n'avaient pas été envisagés avant que cette théorie n'ait été conçue, et a subi ces tests avec succès.<br>6) $t_2$ a permis d'unifier ou de relier divers problèmes qui étaient jusque-là sans rapport. » (Popper, 1985, p. 344)<br>- **Pôle « méta »** : Contrôle appelé « savoir métascientifique » par Popper : « Celui-ci est visiblement de nature intuitive, et prétend que nous savons ce que doit être une bonne théorie scientifique, avant même qu'on ait procédé à des tests. » (Popper, 1985, p. 322). |

*Tableau 2 – Conception poppérienne*

Popper se distingue par son rejet de l'essentialisme aristotélicien. Il s'inscrit dans le courant du nominalisme méthodologique qui « entreprend de décrire comment la chose se comporte selon les circonstances, et plus particulièrement, de déterminer si ce comportement obéit à des règles constantes. » (Popper, 1962, p. 34). Les définitions ne sont pas centrales dans sa problématique, mais sa recherche d'une méthodologie scientifique est complémentaire à ce que l'on trouve dans *Preuves & Réfutations* de Lakatos. L'apport principal de Popper pour la description des conceptions réside dans des opérateurs centrés sur la construction d'une théorie scientifique et dans les structures de contrôles.

### *3.3.4. Conception lakatosienne*

<table>
<tr><td colspan="2">Problèmes (P) : - Problèmes intramathématiques (recherche du domaine de validité d'une conjecture, détermination de la validité d'une preuve)<br>- Classification<br>Système de représentations (L) : - Représentations du (ou des) concept(s) mathématique(s) en jeu<br>- Systèmes de représentation interne aux mathématiques<br>- Systèmes de représentation en jeu lors d'un changement de cadre (il peut s'agir d'un changement de représentation symbolique)</td></tr>
<tr><th>Opérateurs (R)</th><th>Contrôles (∑)</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{R}_1^{\mathbf{L}}$ : générer des exemples et contre-exemples (conséquences sur la définition produite)<br>$\mathbf{R}_{1.1}^{\mathbf{L}}$ : exclure de la définition une classe d'objets contenant les contre-exemples (monster-barring).<br>$\mathbf{R}_{1.2}^{\mathbf{L}}$ : exclure de la définition une classe d'objets qui est la classe des contre-exemples (exception-barring).<br>$\mathbf{R}_{1.3}^{\mathbf{L}}$ : réinterpréter les termes de la définition pour que les contre-exemples n'en soient plus (monster-adjustement).<br>$\mathbf{R}_{1.4}^{\mathbf{L}}$ : défendre la définition en l'étendant (en incluant une nouvelle classe d'objets) - généraliser la conjecture (monster-including).<br>$\mathbf{R}_2^{\mathbf{L}}$ : rédiger une zéro-définition.<br>$\mathbf{R}_3^{\mathbf{L}}$ : utiliser une définition dans une preuve (mise à l'épreuve de la définition, retour sur la nature des contre-exemples).<br>$\mathbf{R}_4^{\mathbf{L}}$ : changer de cadre.<br>$\mathbf{R}_5^{\mathbf{L}}$ : formuler un nouveau problème. Cet opérateur est très vaste et peut comprendre :<br>- générer des exemples et/ou des contre-exemples (recherche d'un processus pour une génération systématisée) ;<br>- questionner la validation et la portée de faits expérimentaux ; étudier des cas limites ;<br>- formuler un lemme ;<br>- formuler une nouvelle conjecture, interroger sa validité et sa généralisation (voir ci-dessous);<br>- structurer une stratégie (de preuve ou de définition ou de recherche d'algorithme ou autre), interroger sa validité et sa généralisation ;<br>- structurer un plan de preuve ;<br>- formuler des sous-problèmes : il s'agit en particulier de l'étude de cas particuliers et de la question de la généralisation des résultats alors obtenus par une telle étude ;<br>- formuler un problème plus général ;<br>- formuler le problème dual (et définir le dual du concept en jeu) ;<br>- interroger la validité de la preuve ;<br>- problématiser d'autres preuves.<br>$\mathbf{R}_6^{\mathbf{L}}$: formuler une proof-generated definition (lemmes cachés).</td>
<td>- Pôle « heuristique » : Contrôle de la validité d'une assertion par des exemples. Contrôles par interaction avec des pairs.<br><br>- Pôle « preuve » : notion de proof-generated definitions (contrôles issus de la dialectique preuve-définition), liée à un changement de cadre ou non (il peut s'agir d'une validation de la zéro-définition, mais aussi de l'émergence d'un concept via un lemme caché).<br><br>- Pôle « philosophique et logique » : voir la conception aristotélicienne.<br><br>- Pôle « axiomatique » : voir la conception poppérienne car le niveau axiomatique est en dehors du cadre explicite de Lakatos.<br><br>- Pôle « structurel » : contrôles relatifs à un changement de cadre (insuffisamment explicité et étudié chez Lakatos, mais découlant de $\mathbf{R}_4^{\mathbf{L}}$ ).<br><br>- NB : il n'y a pas de critère de fin explicite du processus de Preuves & Réfutations, donc pas de contrôle de fin.</td></tr>
</table>

*Tableau 3 – Conception lakatosienne*

La conception lakatosienne, telle qu'elle est dans *Preuves & Réfutations*, inclut les conceptions aristotélicienne et poppérienne, mais se concentre sur le processus de génération de concepts en laissant une place privilégiée aux définitions : c'est ce processus qui est décrit dans la conception présentée dans le tableau suivant. Une étude complète et critique de *Preuves & Réfutations* est présentée dans Ouvrier-Buffet (2013).

Nous avons également décrit d'autres sous-opérateurs, notamment de $\mathbf{R}_5^{\mathbf{L}}$, dans la note de synthèse (Ouvrier-Buffet, 2013).

## 3.4. Composante 2 de notre modélisation – Quatre moments de l'activité de définition

Nous présentons ici, au vu des entretiens avec les mathématiciens et les travaux existants, quatre moments de l'activité de définition. Ces moments n'ont pas pour vocation d'être hiérarchisés et ne présentent pas une activité linéaire. Ils sont en interrelation. Nous allons les mettre en regard de la fonction des définitions et des conceptions. L'objectif de la définition de ces moments est de mettre en relation les conceptions et leur opérationnalité, les types de problèmes (de manière globale) liés à l'activité mathématique de recherche, et ainsi de donner un panorama de l'activité de définition dans la recherche mathématique. La dénomination que nous avons retenue pour ces moments est en relation avec les différents types de définition : définitions-en-acte, zéro-définitions, *proof-generated definitions*, et définitions théoriques (ce dernier terme s'inscrit dans la construction axiomatique d'une théorie, locale ou plus globale). Cette vision a pour vocation de donner une image dynamique et globale de l'activité de définition (voir Figure 1 ci-après).

### *3.4.1. Le moment « en-acte »*

Il s'agit du lieu de l'intuition des objets, des idées, des résultats. L'activité mathématique pendant ce moment est principalement une activité d'exploration et d'imprégnation d'un ou de plusieurs problèmes, mais aussi des objets en jeu pour mieux les connaître (fréquentation d'exemples, non-exemples, contre-exemples). Des analogies et des champs mathématiques voisins peuvent alors être mobilisés, de même que des problèmes plus faibles peuvent être formulés. C'est là que des définitions-en-acte et des *concept image* apparaissent. Ici, la conception lakatosienne est opérationnelle, les opérateurs concernant les changements de cadres et formulations de problèmes, mais aussi la génération d'exemples et contre-exemples étant prédominants.

### *3.4.2. Un moment intermédiaire entre « en-acte » et « zéro ». Lien possible avec le moment « axiomatique »*

Ce moment a deux versants : il s'agit de faire des premières catégories d'objets, de classer et d'exploiter des classifications existantes, mais aussi d'essayer des analogies et de faire des liens avec des concepts existants et théories existantes. Ce qui oriente l'activité de définition ici est principalement la classification, la catégorisation d'objets, et la dénomination de ceux-ci. Les conceptions aristotélicienne et lakatosienne peuvent être opérationnelles. C'est dans le lien avec le moment « axiomatique » et les ponts réalisés avec des théories axiomatiques préexistantes que nous retrouverons la conception poppérienne.

### *3.4.3. Le moment « zéro »*

C'est le lieu des zéro-définitions (définitions de travail) mais aussi de définitions locales de portée plus faible. L'activité mathématique peut se décrire avec des opérateurs lakatosiens (par exemple : utiliser et construire des exemples et contre-exemples, reléguer les monstres) et intègre également d'autres aspects : faire des choses fausses, accéder à une idée de la preuve (la preuve forçant les concepts et les définitions selon les mathématiciens). Ainsi, les zéro-définitions et autres définitions locales auront ici différentes fonctions : nommer ; proposer différentes voies d'accès sur un concept ; travailler sur la preuve ; délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une conjecture ou d'une preuve ; communiquer. L'opérateur lakatosien « changer de cadre » pourra aussi être mobilisé et un lien pourra être construit avec le moment « axiomatique », en particulier pour les changements de cadres où existe déjà une théorie (finalisée ou locale, voire même en construction).

### *3.4.4. Le moment « formalisé »*

Nous avons retenu cette dénomination afin de souligner l'importance de la dimension « communication » qui intervient à la fois pendant la recherche heuristique mais aussi lors d'une nécessité de formalisation. Il peut s'agir d'une communication impliquant un assujettissement aux règles de l'institution considérée (discussion, séminaire, prépublication etc.) et/ou de la rédaction d'un texte davantage formalisé permettant de régler des inférences. Un saut d'abstraction est réalisé par rapport au moment « zéro ». L'activité mathématique pendant ce moment « formalisé » s'appuie sur certains contrôles de nature lakatosienne tels que : une bonne résistance des définitions et conjectures et/ou preuves et donc la fin des contre-exemples. Lorsqu'une preuve est en jeu, des *proof-generated definitions* peuvent émerger. Des opérateurs poppériens peuvent également être mobilisés, notamment en ce qui concerne l'élaboration d'axiomatiques locales. La rédaction de définitions formalisées impliquera de fait la convocation de la conception aristotélicienne (la recherche de l'esthétisme des définitions construites apparaîtra vraisemblablement aussi), et l'accès au *concept definition* de Vinner (1991). Par ailleurs, la formulation de nouveaux problèmes que nous avons identifiée et décrite dans l'un des opérateurs lakatosiens permettra à l'activité mathématique de se poursuivre et d'explorer de nouvelles ramifications au problème initial. Il s'agit essentiellement d'interroger la généralisation et l'utilisation des définitions, problèmes et résultats, mais aussi la compréhension des nouveaux concepts (ce qui rejoint la dimension « communication » précédemment évoquée). L'exploration de concepts voisins ouvrira également de nouvelles perspectives de travail et s'inscrira dans un nouveau moment « en-acte ».

### *3.4.5. Le moment « axiomatique »*

Nous avons choisi de nommer les définitions produites dans ce moment « théoriques » afin de souligner leur inscription dans une théorie. Il s'agit ici de construire une théorie (qui pourra être momentanément locale) et d'introduire de nouveaux concepts au sein de cette théorie, donc de répondre à certaines contraintes axiomatiques, ce qui nous permet de mettre en évidence l'opérationnalité de la conception poppérienne (NB : l'opérateur concernant la résistance aux réfutations est encore présent). La construction de la théorie en question sera guidée par la recherche du plus petit nombre de conditions initiales pour obtenir le plus grand nombre de résultats et/ou des résultats de plus grande portée. L'axiomatisation pourra également être conduite au-delà du champ mathématique initialement considéré pour unifier des concepts (c'est le cas dans les notions FUG, cf. Dorier et *al*. (1997)). La transposition de concepts à d'autres champs mathématiques ouvrira également de nouvelles perspectives et de nouveaux champs de recherche (c'est le cas par exemple de la topologie et de la géométrie des espaces de Banach).

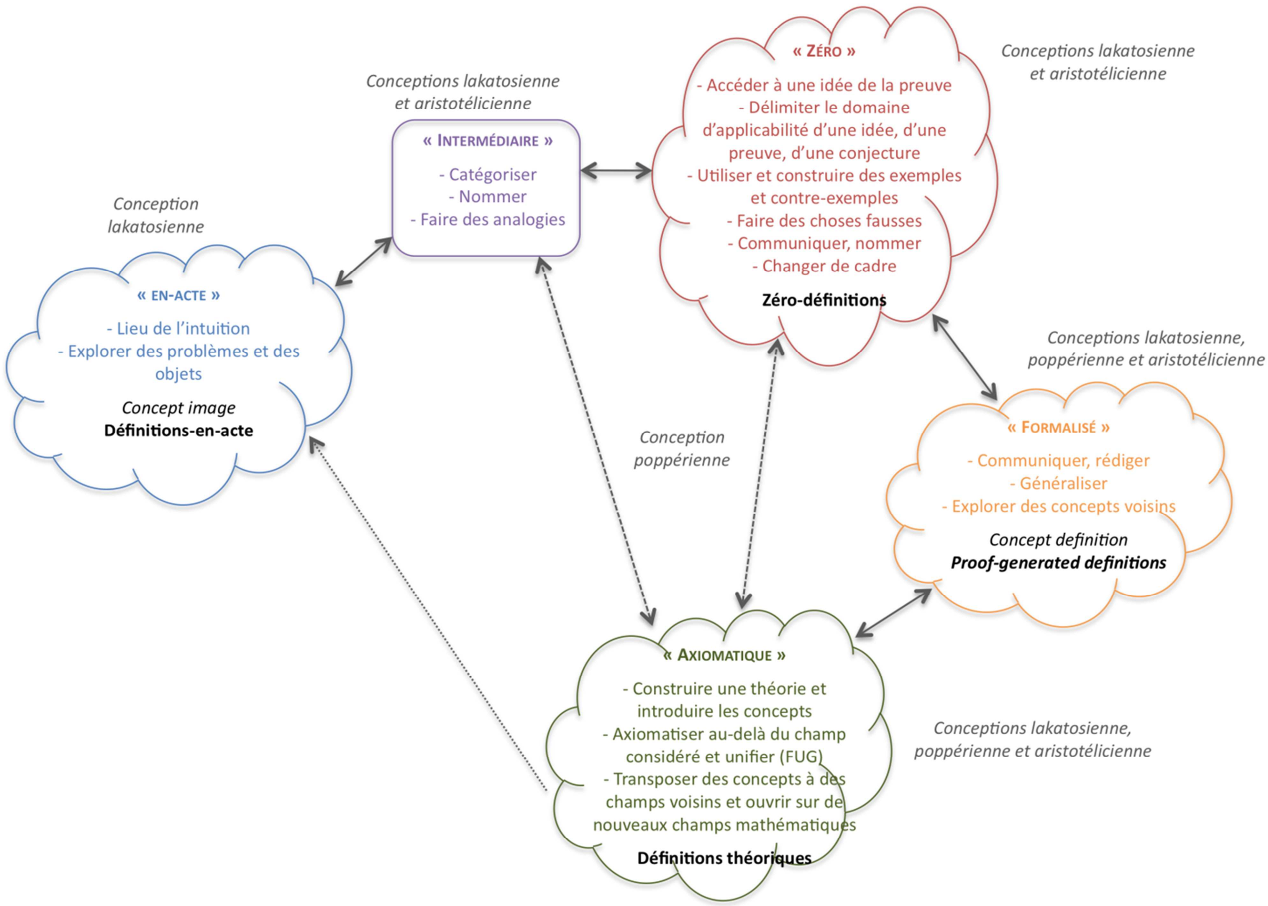



*Figure 1 – Représentation globale de l'activité de définition dans la recherche mathématique*

## 3.5. Composante 3 de notre modélisation – Une définition de l'ensemble des problèmes impliquant une activité de définition

### *3.5.1. La question de la définition des problèmes*

Dans le cadre de l'utilisation du modèle des conceptions de Balacheff (1995), la question de la définition des problèmes P du quadruplet (P, R, L, ∑) se pose ainsi :

> Nous appelons problèmes les perturbations du système. Le domaine de la validité de la conception, ou sphère de pratique, est constitué de l'ensemble des problèmes que la conception permet de résoudre et qui ne conduisent pas à une rupture de l'équilibre du [Sujet <> Milieu]. (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 80)

Cette définition correspond à un besoin de décrire les conceptions d'un sujet dans une situation particulière. Pour décrire les µ-conceptions, il était nécessaire de parvenir à rendre compte des problèmes identifiés comme tels par le savoir savant lui-même. Modeste (2012, p. 57) a proposé une autre définition du terme « problème », adaptée à la description de µ conceptions de l'algorithme. Giroud (2011) a utilisé le même mode de définition pour introduire la notion de « concept-problème » et décrire la démarche expérimentale en mathématiques. Tous deux ont exploité et montré l'efficacité du développement du concept de « problèmes » issu de la théorie de la complexité (Garey & Johnson, 1979). Cette définition de « problèmes » est certes liée aux notions algorithmiques d'entrée et de sortie, mais elle présente l'avantage de formaliser un problème mathématique indépendamment du sujet et du milieu, et ainsi d'accéder à une définition de problèmes pour les µ-conceptions qui nous intéressent dans le cadre de l'exploration épistémologique de l'activité de définition. Il s'est avéré que la définition de « problèmes » de Garey & Johnson (1979) nous a permis dans un premier temps de nous affranchir du sujet et du milieu pour déterminer les couples (I, Q) possibles, et a ouvert dans un second temps l'exploration des types de problèmes envisageables au niveau didactique, en réintroduisant les interactions [Sujet <> Milieu].

Un problème, dans la théorie de la complexité algorithmique, peut être décrit ainsi :

> For our purposes, a problem will be a general question to be answered, usually possessing several parameters, or free variables, whose values are left unspecified. A problem is described by giving: (1) a general description of all its parameters, and (2) a statement of what properties the answer, or solution, is required to satisfy. An instance of a problem is obtained by specifying particular values for all the problems parameters. (Garey & Johnson, 1979, p. 4)

Nous avons donc adopté la définition de problème qui suit reprenant l'ensemble des instances et l'ensemble des questions. Un problème est défini comme un couple (I, Q) : l'ensemble des instances du problème (I) peut être décrit par plusieurs paramètres et la (ou les) question(s) (Q) porte(nt) sur ces instances (spécifiant les propriétés de la solution attendue). Fixer une instance du problème, c'est instancier le problème. Réduire l'ensemble de définitions des instances permet de considérer les sous-problèmes de (I, Q).

#### *3.5.2. Les problèmes impliquant une activité de définition*

Nous avons ainsi conduit une étude spécifique et systématique des problèmes impliquant une activité de définition et abouti à une caractérisation suivant trois catégories :

- Catégorie 1 « (Re)définir un concept familier »
- Catégorie 2 « Définir un concept familier dans un autre cadre »
- Catégorie 3 « Définir un nouveau concept ».

Nous avons considéré que la description des problèmes était la caractérisation de problèmes mathématiques posés à des individus non vierges de connaissances et représentations, dans une institution spécifique (non précisée ici mais qui sera à considérer ultérieurement). Ainsi, dans le but d'étudier un sujet S (qui peut être un étudiant, un enseignant, ou un chercheur) en situation de résolution d'un problème impliquant une activité de définition, nous avons étudié les différents couples (Instance(s), Question(s)) possibles avec les instances qui peuvent être des concepts. Pour les catégories 1 et 2, les problèmes portent sur la redéfinition de concepts, que ce soit dans le même cadre mathématique ou dans un nouveau cadre. La catégorie 3 concerne essentiellement les problèmes où, lors de la résolution et/ou d'une preuve en jeu dans ces problèmes, l'on est amené à définir des objets nouveaux dont on va se servir pour avancer dans la preuve. Ces objets peuvent n'avoir qu'un rôle local, mais pas nécessairement : on ne peut pas le décider *a priori*, ce seront des problèmes et utilisations ultérieures qui pourront nous renseigner sur la portée effective de ces concepts. Ce sont ces cas-là qui font le cœur de la catégorie 3.

#### *3.5.3. Les couples (Instance(s), Question(s))*

Nous avons choisi de lister les instances et questions possibles pour établir les couples (I, Q) caractérisant les problèmes permettant une activité de définition. En effet, il est très difficile de concevoir une liste exhaustive des problèmes mathématiques permettant une activité de définition, indépendamment des concepts en jeu. Nous allons donc proposer, à partir de l'étude épistémologique du concept de définition (dont les trois conceptions et les quatre moments) et des entretiens avec les mathématiciens que nous avons conduits, l'ensemble des Instances et des Questions permettant de générer *a priori* des problèmes de construction de définition, sous réserve d'une étude approfondie du concept mathématique retenu, des processus de définition envisageables et d'une définition des conditions expérimentales (connaissances *a priori* des sujets, constitution du milieu, interventions du gestionnaire).

Ainsi, les problèmes (I, Q) peuvent être construits en choisissant un couple parmi les instances et questions suivantes :

- Instances :
  - Exemples et non-exemples via une ou des représentations d'un concept mathématique
  - Exemples et contre-exemples (donnés et/ou à générer)
  - Définitions partielles (voire incorrectes), en construction
  - Définitions en construction ou finalisées dans un domaine mathématique noté DM1
  - Propriété, ou théorème, et/ou conjecture
  - Preuve
  - Conjecture
  - Problème avec exploration du problème, établissement de faits expérimentaux
- Questions :
  - Définir pour délimiter ce que le concept est et ce qu'il n'est pas
  - Définir pour classer
  - Vérifier la validité d'une preuve (éventuellement : recherche d'un lemme caché) ; recherche du domaine de validité d'une preuve
  - Prouver (cela peut être une preuve d'existence ou autre)
  - Conjecturer ; recherche du domaine de validité d'une conjecture
  - Recherche de définitions équivalentes ; preuve de l'équivalence
  - Généraliser une preuve, ou une conjecture
  - Explorer les hypothèses pour rendre un théorème (même non encore complètement prouvé) plus fort (ou plus faible)
  - Plonger le concept dans un autre domaine mathématique noté DM2 : que devient-il ?
  - Construire une axiomatique locale.

### 3.6. Composante 4 de notre modélisation – Une méthodologie pour concevoir et analyser des situations de définition

La principale difficulté réside dans le choix d'un concept mathématique et dans l'exploration *a priori* de ce concept afin de déterminer des problèmes appropriés et d'envisager plusieurs zéro-définitions potentielles, voire des conjectures et preuves impliquant ce concept.

La question de la familiarité avec ce concept, familiarité et même familiarisation, est également à poser. Proposer une voie d'accès via des représentations de ce concept et/ou l'exploration de problèmes dans lesquels il est impliqué est fondamental et permet l'élaboration d'un premier *concept image*, qui servira de point d'appui pour le travail sur les zéro-définitions (voir Ouvrier-Buffet, 2013).

Les problèmes initiaux peuvent être formulés en fonction de différents choix de couples (Instance(s) ; Question(s)) qui dépendront du niveau des étudiants et des concepts considérés. Dans le cas d'un changement de cadre, le fonctionnement sera similaire et pourra impliquer la redéfinition d'une axiomatique locale.

Dans le cadre de la conception d'une situation de construction de définitions, l'étude *a priori* en termes de zéro-définitions peut être conduite en parallèle des quatre moments de l'activité de définition, et mettre ainsi en évidence des éléments pour la gestion en classe.

Quant à la gestion en classe justement, elle peut être calibrée via la connaissance des trois conceptions (artistotélicienne, lakatosienne, popérienne), qui peuvent, elles aussi, contribuer à la définition *a priori* de sous-problèmes. Le gestionnaire-observateur devra intervenir « le moins possible », et cela reste un pari. Cela pose la question de choix entre des problèmes totalement ouverts (pour l'enseignant et les étudiants) et des problèmes *open-ended* (ouverts pour les étudiants, fermés pour l'enseignant).

Dans le cadre plus large de la conception d'une situation fondamentale pour le concept de définition, la situation de « première rencontre » fera l'objet d'un travail d'institutionnalisation de l'activité de définition, qui reste à définir, tous comme les variables de la situation fondamentale.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Notre travail de recherche a permis de construire un cadre épistémologique de référence pour modéliser l'activité de définition et ainsi pour donner un accès au concept de définition en mathématiques. Ce cadre de référence est constitué des trois conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne, de la définition des problèmes impliquant une activité de définition via des couples (Instance(s), Question(s)) (Garey & Johnson, 1979), et de la mise en évidence de quatre moments de l'activité mathématique qui permettent de donner une image globale de l'activité de définition. Une méthodologie de conception et d'analyse de situations impliquant une activité de définition vient compléter la modélisation présentée ici. La principale difficulté dans cette modélisation résidait dans le fait que le concept de définition, et l'activité de définition, en mathématiques, appartiennent à la sphère privée du mathématicien : il s'agissait donc de modéliser des conceptions appartenant à la pratique du mathématicien plus qu'à un texte du savoir savant. L'utilisation souple des µ conceptions (Balacheff, 1995) et la mise en œuvre du concept-problème nous ont permis de considérer des instanciations de la pratique du mathématicien et des problèmes impliquant une activité de définition. L'étude épistémologique donne ainsi maintenant un cadre déjà partiellement éprouvé (Ouvrier-Buffet, 2006 & 2011) pour analyser dans une perspective didactique la conception et l'implémentation en classe de situations de définition. Elle permet en particulier d'anticiper et de gérer des processus de définition, en proposant des indicateurs, balises de l'activité de définition, mais aussi des leviers pour faire évoluer un processus de définition ou un problème.

Nos perspectives de recherche se situent aujourd'hui à trois niveaux en interrelation constante qui sont développées plus précisément dans (Ouvrier-Buffet, 2013) : épistémologique, théorique, et didactique.

Nous envisageons d'approfondir encore la modélisation en enrichissant les entretiens avec des chercheurs dans d'autres champs des mathématiques que ceux explorés jusqu'à maintenant. L'étude d'autres pratiques des mathématiques est également à envisager afin d'évaluer plus précisément la portée de notre modélisation.

Nous souhaitons par ailleurs analyser plus spécifiquement le champ de recherche de la géométrie discrète contemporaine, déjà vue comme prometteuse pour des expérimentations didactiques (Ouvrier-Buffet, 2006). Le choix de la géométrie discrète se justifie à plusieurs niveaux. L'interprétation de données discrètes implique un traitement dans un espace continu (méthodes d'approximation et méthodes paramétriques – lien avec l'algorithmique) d'une part, et une définition des objets discrets sous-jacents au problème, ainsi que l'exploration de leurs propriétés (voire la construction d'une axiomatique spécifique) d'autre part. Se dégagent ainsi plusieurs problématiques, et donc plusieurs perspectives de recherche à investiguer, au sein de ce seul champ mathématique : une problématique forte de la définition des objets discrets (pour la reconnaissance et la construction de ceux-ci), la question encore vive dans la recherche de la construction d'une axiomatique pour la géométrie discrète, l'exploration des liens entre le discret et le continu.

Par ailleurs, une réflexion sur la place de la logique dans l'étude des relations entre définition et preuve peut être posée. Celle-ci n'a pas été posée dans la note de synthèse (Ouvrier-Buffet, 2013) comme objet spécifique d'étude : elle est cependant prise en compte dans l'étude des conceptions et des moments de l'activité de définition. Cela étant, la place de la logique dans la dialectique entre l'activité de définition et l'activité de preuve peut clairement devenir un objet de recherche à part entière.

Enfin, la question plus générale des fondements épistémologiques de la démarche de recherche en mathématiques est aussi un point à travailler, afin de mettre en évidence la spécificité de cette démarche au regard des démarches d'investigation en sciences par exemple.

Nous projetons également, au niveau théorique cette fois, d'engager une réflexion concernant l'utilisation du modèle de problème inspiré de Garey & Johnson (1979) et de son efficience pour de futurs travaux en didactique concernant la formation de concepts et la modélisation de conceptions. Il existe à ce jour, en didactique des mathématiques, trois cas d'utilisation de ce modèle : Giroud (2011) sur la démarche expérimentale, Modeste (2012) sur l'algorithme et notre travail sur le concept de définition. Les connexions avec les µ-conceptions sont de différentes natures et ne sont pas explicitables de la même façon. De plus, les instances et questions sont elles aussi de natures différentes dans ces travaux du fait des concepts considérés comme objet d'étude. Enfin, les liens entre problèmes et milieu restent à éclaircir. Et la question concernant la façon dont les étudiants se constituent une ou plusieurs conceptions sur un concept et comment les faire évoluer est également une problématique à traiter et à élargir à d'autres concepts mathématiques.
Par ailleurs, dans la mesure où l'étude des pratiques des mathématiciens se développe aujourd'hui dans la communauté didactique, il serait nécessaire de concevoir un cadre théorique commun qui permettrait de centraliser les différents résultats obtenus et de montrer les convergences et points de tension.

Au niveau didactique, il s'agit maintenant aussi de générer de nouvelles situations impliquant une activité de définition et d'étudier leur transmission à des enseignants. Ici, en définitive, ce n'est pas tant la question de l'enseignement d'heuristiques qui se pose, mais bien celle de la formation des enseignants en ce qui concerne la démarche mathématique, question que nous retrouvons et traitons dans le cadre des SiRC (Grenier & Payan, 2003).
Par ailleurs, la question de l'appropriation de nouveaux « savoirs » par les enseignants se pose de manière forte, à l'heure où les programmes intègrent de nouveaux contenus d'enseignement (nouveaux, y compris pour les enseignants) : comment se fait-elle ? Avec quelles ressources ? Comment les transmettent-ils ? Nous pensons ici en particulier à des savoirs notionnels, tels que les graphes ou l'algorithme, introduits ces dix dernières années dans les programmes du secondaire, ou des savoirs transversaux aux mathématiques, tels que la démarche mathématique ou l'activité de définition.
D'une manière plus spécifique, nous pouvons noter une place grandissante des mathématiques discrètes dans l'enseignement (algorithmes, graphes, arithmétique etc.), en France et à l'étranger. Elle répond à une nécessité sociétale. Ce champ des mathématiques est en fait diffus dans les institutions « enseignement », en particulier car il n'est pas identifié sous une étiquette rassemblant les concepts qui le composent comme l'est l'analyse par exemple, mais aussi car beaucoup de problèmes issus des mathématiques discrètes sont utilisés à des fin de diffusion et de vulgarisation de la culture mathématique (Fête de la Science, Rallyes mathématiques etc.). Au niveau didactique, c'est un champ plein de promesses, dont l'investigation est à approfondir (Heinze et *al.*, 2004 ; DIMACS, 2001 ; Ouvrier-Buffet, 2009), en mettant en relation didacticiens et mathématiciens. Cette branche « jeune » des mathématiques suscite l'intérêt depuis quelques années du fait des nouvelles potentialités qu'elle offre. En effet, elle permet d'engager les étudiants dans une démarche mathématique, offrant ainsi un champ à part entière pour l'apprentissage de la preuve, de la modélisation, mais pas seulement. Une autre perspective s'ouvre également : il s'agit d'appréhender, dans le discret, des concepts réputés difficiles à enseigner dans le continu (Ouvrier Buffet, 2011) Nous soutenons que les invariants en mathématiques discrètes que l'on retrouve dans le continu doivent être investigués de manière spécifique, car si le discret peut être plus facilement appréhendable et accessible que le continu, il ne faudrait pas penser que cela est toujours le cas : « (...) le continu précède ontologiquement le discret » (Thom, 1992, p. 137).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARISTOTE (1965). *Organon – Les Topiques* (traduction et notes par J. Tricot). Vrin. Paris.

ARISTOTE (1970). *Organon – Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par J. Tricot). Vrin. Paris.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In: Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble : IMAG.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BERGER, M. (2009). *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*. Cassini.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Berlin: Springer.

CARLSON, M. P., & BLOOM, I. (2005). The cyclic nature of problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75.

DIMACS (2001). Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: Educational Program. http://dimacs.rutgers.edu/Education

DORIER, J-L. et al. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

GARDES, M-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse. Université Lyon 1. oai : tel.archives-ouvertes.fr:tel-00948332

GAREY, M. R., & JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and intractability: A Guide to the theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.

GIROUD, N. (2011) *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse, Université Grenoble 1. oai : tel.archives-ouvertes.fr:tel-00649159

GRENIER, D & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en “classe”, essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques*, pp. 189-205. IREM de Paris 7.

HEINZE, A., ANDERSON, I., REISS, K. (Eds) (2004). Discrete mathematics and Proof in the High School. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 44-84 et Vol. 36 (3), 82-116.

LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Library.

MARIOTTI, M.A. & FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219–248.

MODESTE, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve*. Thèse, Université de Grenoble. oai:tel.archives-ouvertes.fr:tel-00783294

OUVRIER-BUFFET, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concepts : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Étude épistémologique et didactique de la définition. Étude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université.* Thèse. Université Joseph Fourier - Grenoble 1. oai : tel.archives-ouvertes.fr:tel-00005515

OUVRIER-BUFFET, C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 259-282.

OUVRIER-BUFFET, C. (2007). *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique.* Editions Fabert.

OUVRIER-BUFFET, C. (2009). Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, pp. 31-45. IREM de Paris 7.

OUVRIER-BUFFET, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182.

OUVRIER-BUFFET, C. (2012). L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ? *Colloque EMF, GT3.* Genève, Suisse.

OUVRIER-BUFFET, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. oai:tel.archives-ouvertes.fr:tel-00964093

POPPER, K. (1962). *La société ouverte et ses ennemies (Tome 1 - L'ascendant de Platon).* Seuil, Ed. 1979.

POPPER, K. (1985). *Conjectures et réfutations – La croissance du savoir scientifique*. Trad. De Launay. Payot, Paris.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic.

THOM, R. (1992). L'antériorité ontologique du continu sur le discret. In Salanskis, JM & Sinaceur, H. (Eds) *Le labyrinthe du continu - Colloque de Cerisy*, 137-143. Springer-Verlag.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133-169.

VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-80. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

WEBER, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39, n°4, 431-459.

# REFLEXIONS D'ORDRE EPISTEMOLOGIQUE AUTOUR DE L'ETUDE DE LA MULTIPLICATION POUR DIFFERENTS ENSEMBLES DE NOMBRES DANS UN CONTEXTE DE GEOMETRISATION

Raquel I. **BARRERA CURIN**

Université du Québec à Montréal

barrera.raquel@uqam.ca

**Résumé**

Dans le cadre de mon travail de thèse de doctorat, j'ai voulu déterminer et analyser des parcours d'individus au cœur d'un processus de mise en relation entre multiplication et géométrie. Ces analyses ont été effectuées sous le regard de l'approche théorique des Espaces de Travail Mathématique et des éléments associés à la Médiation Sémiotique. L'importance accordée aux processus de médiations sémiotique et sociale enrichit le regard porté sur le travail mathématique de la classe. Des réflexions d'ordre épistémologique m'invitent à porter une attention particulière sur l'appropriation que les élèves font de l'espace de travail mathématique mettant en valeur une multiplicité d'actions qui révèlent sa réinvention permanente.

**Mots clés**

Espaces de Travail Mathématiques, Médiation Sémiotique, émergence des mathématiques, faire des mathématiques, appropriation d'un espace de travail mathématique, réinvention du travail mathématique.

## INTRODUCTION

Dans cette communication je donne un aperçu du travail de recherche théorique et expérimentale réalisé dans le cadre de ma thèse de doctorat ainsi que de certaines réflexions d'ordre épistémologique sur le travail mathématique des élèves. Mon travail de thèse porte sur une étude de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation et de médiations sémiotique et sociale (Radford, 2004 ; Sfard, 2008). Dans ce contexte, nous avons voulu déterminer et analyser le travail mathématique des élèves pour ainsi rendre compte de leur parcours tout au long d'une séquence d'apprentissage proposée par l'enseignant. Plus spécifiquement, nous cherchions à identifier et à différencier des interactions entre les composantes de l'espace de travail mathématique personnel des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Les analyses de ce que nous avons appelé des *parcours d'individus*, ont été effectuées sous le regard de l'approche théorique des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011 ; 2014) et des éléments associés à la Médiation Sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Le terme *individu* représente un groupe d'élèves. Il a été utilisé puisque nous avons donné à chaque groupe le statut d'une entité. Ainsi, les parcours de chaque entité avaient pour but de rendre compte d'expériences de médiation, de collaboration et d’une appropriation spécifique de l’espace de travail mathématique qui leur a été proposé. Dans un premier temps, je présente dans cet article une brève synthèse de l’articulation théorique développée dans le cadre de ma thèse. Dans un deuxième temps, je donne à titre d’exemple, des extraits de deux des parcours étudiés. Enfin, ouvrant sur une réflexion d’ordre épistémologique sur le travail mathématique des élèves, je propose de porter une attention particulière à l’espace de travail mathématique *approprié* par l’élève, appropriation qui résulte du pouvoir générateur des mathématiques et qui rend compte d’une multiplicité d’actions qui révèlent une réinvention permanente de l’espace de travail mathématique.

## POUR QUOI PARLER D’UN ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE ?

L’approche théorique des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011) m’a particulièrement intéressée puisqu’il cherche à étudier des éléments épistémologiques et cognitifs impliqués dans tout travail mathématique[27]. Dans ce cadre, le travail mathématique est organisé et d’une certaine façon contextualisé par l’interaction de plusieurs composantes qui en sont représentatives. Pour fonctionner, les ETM supposent une mise en réseau de ses composantes à partir de différentes genèses qui peuvent être de nature *sémiotique, instrumentale* et *discursive* (Annexe 1). Cette mise en réseau se produit grâce à l’appropriation que l’élève fera de l’ETM qui lui a été proposé par l’enseignant. De ce fait, il existe une diversité d’espaces de travail dans une classe de mathématiques, à l’intérieur desquels l’articulation des composantes peut être de nature différente. D’un point de vue classique, le départ de l’articulation de composantes dans un ETM se produirait au niveau épistémologique. Notre analyse de l’approche théorique de l’Espace de Travail Mathématique nous a permis de proposer une entrée par le plan cognitif, laquelle enrichirait le regard en ce qu’elle permet une ouverture à des nouvelles composantes. Ces nouvelles composantes favoriseraient une lecture alternative du travail mathématique des élèves quand ce travail porte particulièrement sur un processus de recherche mathématique. Je me réfère, par exemple, à la mise en relation entre la visualisation en géométrie d’une notion mathématique et sa représentation non géométrique. La visualisation pourrait ainsi être vue comme le résultat d’une interprétation métaphorique du concept mathématique en jeu (Lakoff & Núñez, 2000 ; Presmeg, 1997; Sfard, 1994 ; Soto-Andrade, 2011), laquelle donne du sens à d’autres représentations du même concept. De ce fait, les métaphores viennent aussi habiter les ETM des élèves comme des points de référence (Kilhamn, 2011), et elles peuvent jouer un rôle important dans la mise en fonctionnement des autres composantes à travers lesquelles les élèves font la rencontre des mathématiques.

## L’ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE ET LA MEDIATION SEMIOTIQUE

Selon Vygotsky, dont la théorie socioculturelle est un des fondements de la Théorie de la Médiation Sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), il y a une relation inhérente entre l’activité interne et l’activité externe des individus. L’internalisation de fonctions par lesquelles l’activité – en contexte social – se réalise permet de caractériser l’apprentissage, comme le soulignent Wertsch et Addison Stone (1995) :

> “internalization is viewed as part of a larger picture concerned with how consciousness emerges out of human social life. The overall developmental scheme begins with external social activity and ends with internal individual activity. Vygotsky’s account of semiotic mechanisms provide the bridge that connects the external with the internal and the social with the individual”. (Wertsch & Addison Stone, 1995, p. 164)

Les signes, en tant que médiateurs dans le processus complexe visant la formation d’un concept (Vygotsky, 1934/1997) acquièrent un statut privilégié puisqu’ils favorisent l’interaction entre différents éléments lors de la rencontre des mathématiques. Par exemple,

[27] Pour plus de références voir Kuzniak, 2011.

notamment dans le cas de notre recherche, entre la représentation et la visualisation d'une notion mathématique.

Dans ce cadre, Noss et Hoyles (1996) discutent l'idée de « signes situés », lesquels deviendraient constitutifs du processus de conceptualisation des mathématiques vécu par les élèves. Ces signes, peuvent ainsi devenir des médiateurs visuels « defined as providers of the images with which discursants identify the object of the talk and coordinate their communication » (Sfard, 2008, p. 147). Le rôle essentiel ainsi attribué à la médiation sémiotique, au niveau épistémologique et didactique, nous a conduits à situer l'Espace de Travail Mathématique dans un contexte socioculturel de l'apprentissage. Dans ce contexte, les dimensions sociale et sémiotique s'articulent dans la zone de développement proximale définie par Vygotsky (19934/1997). C'est ainsi qu'un autre regard théorique est venu compléter l'étude de certains enjeux propres au travail mathématique des élèves lors qu'ils résolvent de problèmes en contexte de collaboration. Nous avons rendu explicite la présence d'un processus de médiation sémiotique dans un contexte d'interactions sociales, au cœur de l'Espace de Travail Mathématique. Tel que présenté dans la figure 2, le processus de médiation sémiotique viendrait faire émerger les différentes genèses qui articulent les deux plans de l'ETM, favorisant, par exemple, la mise en relation entre représentation et visualisation ou entre métaphores et référentiel théorique. Dans le cas particulier de notre étude, les médiations sémiotique et sociale favoriseraient l'évolution d'un *signe-artefact* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et la production d'un processus de géométrisation conduisant vers la compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Les notions de signe-artefact et de géométrisation seront présentées dans la section suivante.

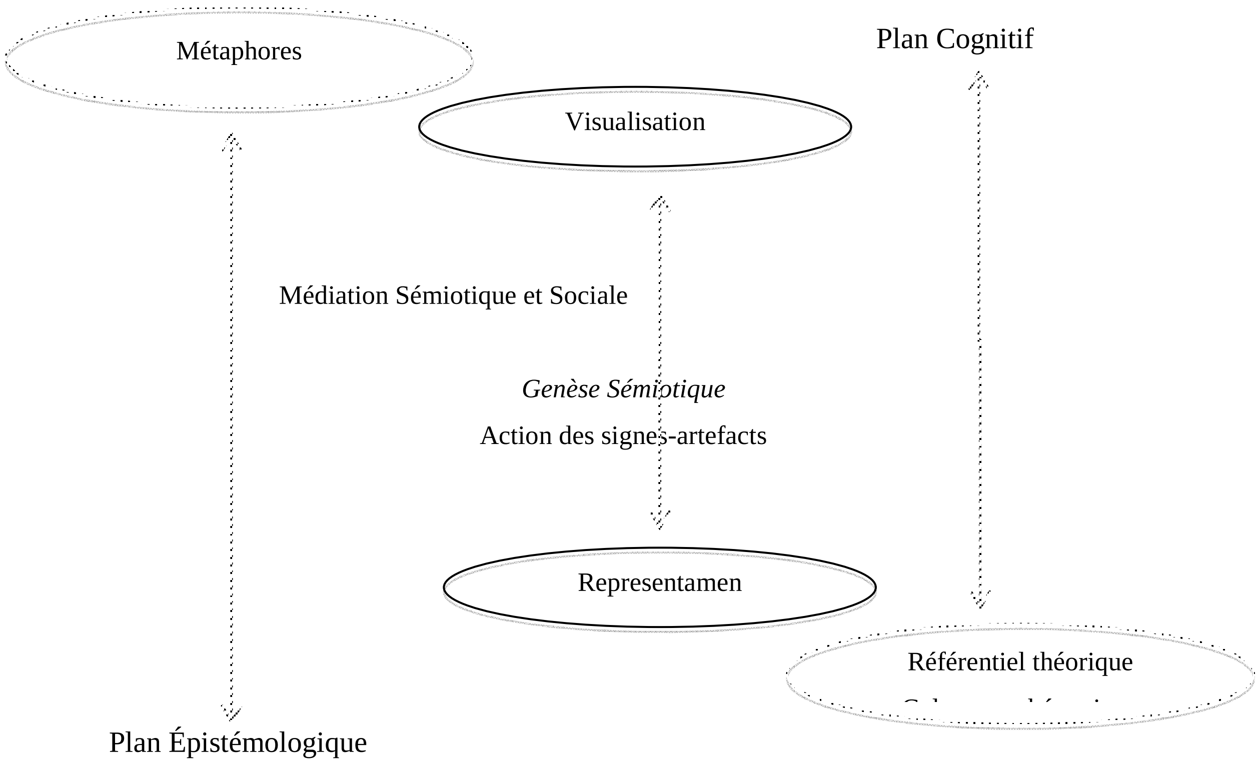



*Figure 1. Côté gauche du schéma représentant l'Espace de Travail Mathématique : articulation des plans cognitif et épistémologique et présence d'un processus de médiation sémiotique et sociale.*

En conséquence, des éléments théoriques associés à la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et à la médiation sociale (Radford, 2004 ; Sfard, 2008) pour l'apprentissage de mathématiques ont été intégrés à l'approche théorique des ETM. La présence explicite d'un processus de médiation sémiotique dans un contexte d'interactions sociales a élargi les critères de ce que nous voulions observer et analyser dans le travail mathématique des élèves. Ainsi, des analyses *a priori* de l'ETM à proposer et aussi *a posteriori* de l'activité mathématique effective des élèves – i.e. leur appropriation de l'ETM proposé –, nous permettaient de déterminer de quelle façon ces médiations peuvent favoriser l'évolution partagée de connaissances, lorsque plusieurs élèves résolvent un problème mathématique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

## UNE PHASE EXPERIMENTALE POUR ETUDIER L'ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE EN CONTEXTE DE MEDIATION SEMIOTIQUE

La phase expérimentale de ma thèse consiste à la mise à l'épreuve d'une séquence d'apprentissage conçue pour étudier – dans un contexte de médiations sémiotique et sociale – la construction géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Dans le cadre de cette communication je ne vais que présenter un aperçu de l'analyse d'une partie de cette séquence (Annexe 2). L'expérimentation a été mise en place en Ile de France dans quatre classes de Terminale S. Les élèves ont eu à résoudre une suite de cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres réels et complexes. Dans un premier temps, les élèves effectuent la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa Géométrie (1637/2009). Puis, il leur était demandé de trouver une relation entre des points donnés dans le plan et la multiplication de deux nombres complexes. En s'appuyant sur ces activités, notre but était de décrire et de caractériser des parcours d'individus dans l'ETM en précisant notamment leurs possibilités de rencontrer des significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Nous avons attribué à cette représentation géométrique – reconnue par les élèves français comme étant représentative du théorème de Thalès – le rôle d'un *signe-artefact*, destiné à être interprété et à évoluer, jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication comme des transformations pour différents ensembles de nombres. La dernière question de la séquence ou question de synthèse sollicite un retour réflexif des élèves sur l'ensemble de l'activité. Elle est fondamentale dans le processus de recherche et son analyse doit permettre une première description des parcours effectués par les élèves dans leur travail mathématique.
Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, nous avons étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication des nombres réels et des nombres complexes. Petit à petit nous avons été amenés à chercher et à déterminer les interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves, pour ainsi rendre compte de la rencontre de la multiplication géométrique de deux nombres complexes.

## L'ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE APPROPRIE PAR LES ELEVES

Une des tâches posées aux élèves dans cette séquence consiste à lire la multiplication de deux nombres complexes construite géométriquement (tâche *4.a* – Annexe 2). La tâche suivante leur demande de construire le produit de deux autres nombres complexes (tâche *4.b* – Annexe 2). L'objectif spécifique de ces tâches était de mettre en relation les propriétés de la multiplication de deux nombres complexes et la représentation géométrique qui résulte de leur mise en œuvre. Les élèves ont les traces numériques et algébriques de ces propriétés puisqu'ils les ont déjà dégagées dans la question précédente. Plus tôt dans la séance, les élèves avaient vérifié que la multiplication géométrique pour différents ensembles de nombres pouvait être prouvée par l'existence d'une relation de proportionnalité entre les facteurs, l'unité et le produit (ils font référence à cela en parlant de « Thalès »). Ainsi, la recherche d'une mise en relation entre le produit complexe et une situation de proportionnalité – géométriquement représentée – favoriserait non seulement la rencontre de la signification géométrique de ce produit mais viendrait aussi la valider. Les élèves reçoivent de temps en temps quelques informations de la part de l'enseignante, ce sont surtout des interventions qui éclairent certaines questions qui pourraient « bloquer » leur travail.

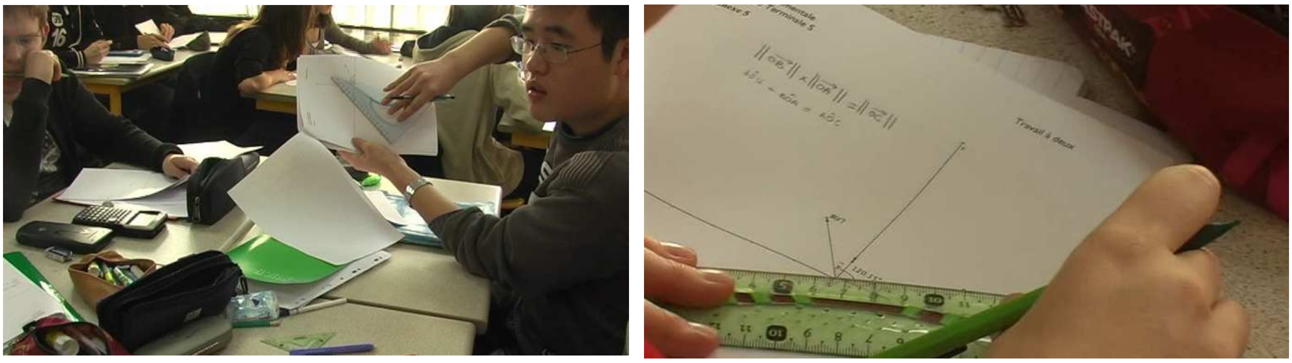


*Figure 2. Les élèves au travail – Groupe A.*

Dans ce contexte, le *faire* des élèves – c'est-à-dire, leur appropriation (*interprétation et participation volontaire*) de l'Espace de Travail Mathématique proposé – rend compte de plusieurs interactions par lesquelles différentes notions mathématiques se mélangent, se combinent ou semblent même s'opposer. Les élèves articulent la représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes et les propriétés exprimant des relations entre les facteurs et le produit en proposant différentes façons de faire. Leur travail se déroule autour des aller-retours entre l'énoncé de la question, une figure, un signe-artefact, des discours, la représentation géométrique de deux nombres complexes, les représentations numériques ou algébriques des propriétés du produit des nombres complexes et les éléments de base sur lesquels ils font leur construction, soit, la représentation géométrique de deux nombres complexes. L'appropriation de l'ETM par les élèves les conduisant vers la construction recherchée met en évidence des gestes qui articulent, *comme dans une sorte de bricolage*, le numérique et le géométrique. En observant leurs productions et leurs échanges, de nouvelles questions s'imposent lors de notre analyse : Serait-il possible pour les élèves d'établir des relations entre le pôle propriétés de la multiplication de nombres complexes et les éléments de réponse concernant les transformations géométriques ? Comment les propriétés de la multiplication de nombres complexes ont influencé le travail des individus surtout face aux questions portant sur les significations géométriques de la multiplication et sur les constructions ? La visualisation de la multiplication comme une transformation dans le plan, a-t-elle émergée dans l'Espace de Travail Mathématique approprié par les élèves ? Quel appui sur le figural peut-on identifier au cours de la séance ? À quel moment et de quelle façon se fait-il présent ? Quelle influence a pu exercer notre signe-artefact sur la suite du processus de *compréhension* de la multiplication ? Et que peut-on dire sur la médiation résultant du travail collaboratif ?

Notre travail a permis d'avancer dans la recherche d'éléments de réponse à certaines de nos questions même si ce travail n'est pas encore été terminé. Pour rendre compte d'éléments du déroulement de l'une de nos séances expérimentales, je vais donner quelques exemples du travail mathématique de deux groupes d'élèves portant sur le processus de construction géométrique de la multiplication de deux nombres complexes. Pour le groupe A, je présente des transcriptions et des analyses de certains de leurs échanges verbaux ainsi que certaines de leurs productions écrites. Pour le groupe B, nous n'avons pas eu la possibilité de garder un registre audiovisuel de leurs échanges. Je ne présente donc que certaines de leurs traces écrites et quelques hypothèses en ce qui concerne leur appropriation du travail mathématique proposé.

**Groupe A**

Les échanges entre les élèves semblent cumuler des éléments qui pourraient ou non devenir les fondements du travail mathématique demandé et donc de la construction évoquée. La tâche semble très complexe. L’extrait suivant en donne un aperçu :

*Extrait 1*

A: En fait, il faut construire le... produit de ça.

A: En multipliant l'un et en ajoutant l'autre (rires).

B: En fait, c'est simple. Ah, mais je sais, j'ai trouvé. (Ils lisent et relisent la question, puis ils reviennent en arrière pour regarder leur réponse à la question précédente).

C : Attendez, dans quel sens déjà on donne les [...]

B: On représente sur le graphique, alors... Il faut construire la représentation, tu vois ?

A: (C fait une construction où le produit ne correspond pas au produit de modules car la longueur est trop courte. La position n’est pas correcte non plus car la droite où le produit a été placé ne correspond pas à une addition des angles des facteurs. Cette droite correspond à celle qui a été placé par B et que nous décrivons par la suite.) Mais c'est tout petit !

B: Déjà voilà, c'est ça (B trace une droite qui correspond à un élargissement dans le sens négatif du vecteur OA. Cette droite correspond exactement à la droite portant le produit dans la représentation géométrique donnée dans la question 4.a ; En même temps, C réécrit en langage algébrique les propriétés de la multiplication de nombres complexes : somme d'angles et produit de modules. Puis tous les autres vont tracer la même droite que B).

P: (L’enseignante fait une remarque à toute la classe car plusieurs groupes étaient restés très longtemps bloqués dans la dernière petite question de la question 4.a.) Vous m'écoutez deux secondes ? […] On vous demande juste les normes, entre elles, entre les normes des facteurs et les normes du produit, et entre les angles des facteurs et l'angle du produit. Et après c'est tout.

Le travail des élèves ici est très local et l’enseignante essaie de mieux cibler la question pour qu’elle devienne plus accessible aux élèves. Leurs questions se centrent sur *la forme*, par exemple *nommer ou non un point*, *comment le faire* ou *où le placer*. Néanmoins des aides et des commentaires sont bien partagés entre les élèves qui, petit à petit, modifient leurs constructions géométriques. Ils font un pas puis un autre en faisant avancer leur recherche même si, à plusieurs reprises, leurs réponses semblent découpées. Pour avancer, nous les voyons en quelque sorte retourner sans cesse aux points de départ du problème ainsi qu’aux idées mathématiques déjà travaillées : faire un graphique, trouver un produit, tracer une droite, etc. Nous pourrions dire qu’ils se trouvent dans ce que Nishida (1870-1945) appelle *un fait* : l’union de pensée et perception dans le processus de retourner aux fondements infinis des mathématiques, toujours en mouvement (Dalissier, 2009). Le travail mathématique des élèves semble se situer dans un contexte de perception pure, dans la recherche d’une intuition qui accompagne toujours le travail mathématique des chercheurs. Les élèves mobilisent des outils, réfléchissent, se questionnent, effacent, recommencent. Ils font intervenir des mathématiques *déjà là*, c’est-à-dire celles qui font partie de leur histoire et qu’ils font *émerger dans leur travail présent*. Dans ce contexte, à plusieurs reprises tout au long du travail réalisé pendant la séance, certains élèves cherchent des modèles qui pourraient expliquer ce qui se passe, d’autres font de conjectures à partir des éléments présents. Ils changent aussi de direction, ils reviennent sur leur pas, leurs mesures, les nombres choisis : ils refont, ils font ensemble. Même s’ils reviennent, s’ils répètent des actions ou s’ils reprennent des modèles, ils sont au cœur de la réinvention. Il s’agit d’une réinvention partagée, une réinvention en collaboration. Tout au début de la séquence, le théorème de Thalès n’était qu’un outil pour la preuve de la multiplication de Descartes. Plus tard, les composantes de l’icône le représentant paraissent intégrées au discours mathématique associé à la construction géométrique de la multiplication. De ce fait, nous avons notamment observé l’intention de prendre en compte les droites parallèles constituant l’icône du théorème de Thalès : d'après leur discours, les élèves avaient l’intention de prendre en compte « la propriété de Thalès ». De cette manière, l’évolution de notre signe-artefact s’est bien manifestée dans le discours d’un des élèves ; néanmoins, elle reste limitée et même, à certains moments, bloquée à cause de la forte influence d’une pensée habituée à la mise en place de recettes —en termes plus élégants, de *techniques* — ou encore, au besoin de suivre un bon modèle :

*Extrait 2*

C: Parallèles...

C: On a des parallèles ici.

A: Il faut faire la parallèle ici, non ?

C: Je montre la parallèle, là, non ?

D: C'est la parallèle. Sinon on ne pourra pas utiliser [...]

D: En traçant la droite, et en traçant la parallèle ici... (D signale dans sa feuille, avec une équerre, deux droites parallèles : l'une d'entre elles corresponde à la droite passant par les points U et A. Sa parallèle passe par le point B et coupe OA permettant, de cette façon, de trouver « le produit » cherché).

Il y a bien du bricolage, des choses trouvées, du partage des idées, mais il est impossible de savoir si elles sont pertinentes ou non avant d’avoir terminé la construction demandée. L’œuvre finale apparaît donc comme le résultat de ce partage et de la médiation résultant de leurs échanges. Les élèves cherchent non seulement la réponse à l’énoncé mais aussi « ce qu’il faut faire », résultant du contrat didactique de la classe (Brousseau, 1998). De ce fait, ce qui a motivé les élèves à tracer des parallèles reste encore très flou, car l’intérêt de les utiliser pourrait juste correspondre au fait que *c’est ce qu’il faut faire*. Ainsi, nos interprétations de cette évolution restent au niveau de conjectures puisque le discours des élèves doit nécessairement être interprété à l’aide d’une forme d’intervention qui puisse encourager sa verbalisation (Radford, 2003) et qui leur permette de développer leur discours ! Par contre, ce développement n’a pas pu se produire de façon optimale à l'intérieur des échanges que la conception de notre séance expérimentale permettait entre les élèves. Nous avons à ajouter que la place que nous avons donnée à la médiation de l’enseignant était limitée (je reviendrai un peu plus tard sur cet aspect). Si nous prêtons attention aux commentaires de l’élève D (*extrait 3*), nous observons que celui-ci insiste sur ce besoin de construire en respectant les « propriétés de Thalès » mais ses commentaires se perdent dans des discussions dans lesquelles ses idées ne peuvent pas se développer, parce que non prises en compte par ses camarades et non guidées par l'enseignant, alors absent :

*Extrait 3*

D: Il faut s'aider des angles afin de trouver là où il fallait *tourner* la droite.

B: Excuse... est-ce qu'on peut m'expliquer encore ?

D: En fait, on repart à zéro !

D: Madame Rémy nous a conseillé de construire la droite, z", avec l'histoire des angles.

E: Tu as un rapporteur ? (A ce moment ils se concentrent en mesurer les angles (au rapporteur) et les modules (à la règle graduée). Ils effacent leur construction avec les parallèles et ils trouvent, après beaucoup de réflexion et des calculs, la position de la droite où il faudra finalement placer le produit résultant de l'addition d'angles et du produit de modules en centimètres. Même en connaissant la mesure résultant de la somme des angles des facteurs ils n'arrivent pas facilement à placer le produit).

D: Ça me parait vraiment étrange que l'on peut pas arriver à la propriété de Thalès.

B: C’est pas forcement que j'ai utilisé Thalès à chaque annexe.

D: Mais justement on doit vérifier les mêmes propriétés que... là bas

B: Non mais c'est que tu évolues. Au début on disait Thalès, après on a parlé de normes, après on a parlé de... pour arriver aux nombres complexes [...]

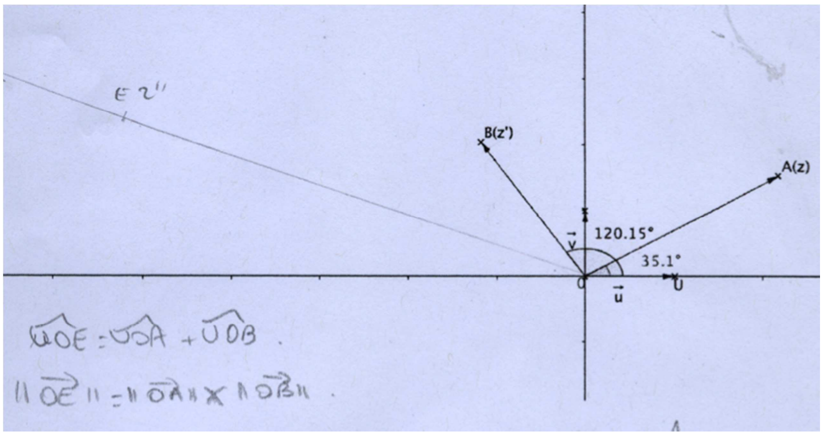



*Figure 3. Construction géométrique du produit de deux nombres complexes réalisé par le groupe A.*

Les propositions verbales et les gestes non verbaux des élèves ne rendent pas nécessairement compte d'un débat rationnel ou de la poursuite d'un chemin préétabli qui se limiterait à la recherche d'une solution particulière. À certains moments de leur débat, la discussion semble ne pas évoluer et plusieurs propositions restent sans réponse. Finalement, et suite à d'autres échanges très intéressants (Barrera Curin, 2013), les élèves ne concluent que sur une mise en œuvre littérale des propriétés géométriques du produit complexe.

La complexité des processus cognitifs impliqués dans notre séquence ainsi que la diversité d'appropriations de l'Espace de Travail Mathématique au milieu d'un travail collaboratif, nous ont conduits à des réflexions portant sur des changements de variables liés à l'importance d'une médiation et d'une orchestration plus active de l'enseignant (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Nous nous sommes aussi beaucoup questionnés sur la pertinence des rétroactions du *milieu* (Brousseau, 1998, Margolinas, 1998) que nous avions prévues lors de la conception de l'ETM à proposer.

**Groupe B**

D'après ce que nous observons dans leur réponse à la question *4.a* de la séquence, les élèves ont rendu compte des propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres complexes, qu'ils aient déduites de la correspondance entre la configuration géométrique donnée et les produits représentés précédemment ou qu'ils les connaissent avant la mise en place de notre séance expérimentale. Le fait de donner une importance à ces considérations théoriques a à voir avec le fait que ces réponses auraient pu, d'une certaine manière, influencer le discours théorique permettant de donner une réponse à la question suivante (*4.b*).

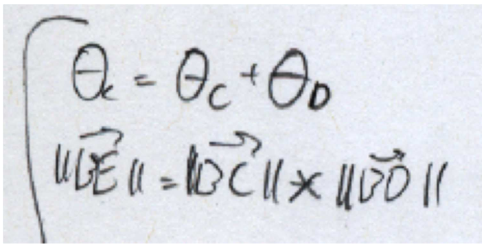


*Figure 4. Réponse du groupe B à la question 4.a. Ils expriment les propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres complexes pour expliquer la relation entre les facteurs et le produit de deux nombres complexes.*

La connaissance de ces propriétés pourrait – facilement ou difficilement – permettre la mise en œuvre d'une *technique* qui amènerait les élèves à la construction du produit de deux nombres complexes la plus répandue parmi les réponses des élèves (voir la construction réalisée par le groupe A, *figure 3*). Ladite construction, à partir de la connaissance des propriétés en langage algébrique, pourrait rendre compte de la possibilité des élèves de représenter le produit complexe différemment. Nous l'avons bien vu dans certains des parcours étudiés (Barrera Curin, 2013), et même dans le travail du groupe A décrit précédemment : la puissance du discours théorique a conditionné les réponses des élèves sans leur permettre – hypothétiquement, bien sûr – d'agir en fonction de ce qui était attendu. Nous avons ainsi mis en évidence que le fait de réussir à représenter dans un autre registre un même objet mathématique ne rend pas nécessairement compte de la *compréhension* des significations dont est porteur l'objet en question. En d'autres mots, le seul fait de changer de registre de représentation sémiotique (Duval, 1993) n'implique pas nécessairement la réification (Sfard, 2008) d'un objet mathématique. Voici donc une difficulté cognitive à prendre en compte lorsque nous proposons des activités où ce genre de processus doit être mis en œuvre par les élèves.

Revenant aux réponses données par le groupe B, je présente dans la *figure 5* la réponse de ces élèves à la question portant sur la construction du produit de deux nombres complexes. Les mesures et le calcul prenant en compte l'unité nous font penser que la construction réalisée répond bien au discours théorique portant sur la multiplication de modules, ceci faisant partie des connaissances préalables ou bien, comme je l'ai déjà dit, étant déduit de la justification par le théorème de Thalès travaillée tout au long de la séquence.

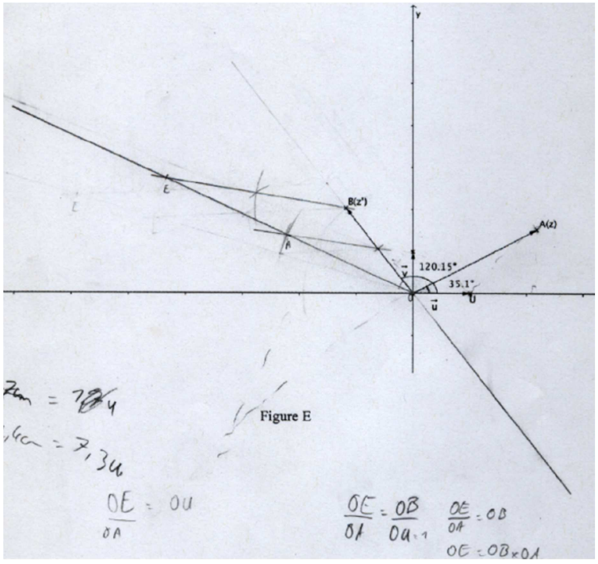



*Figure 5. Représentation géométrique du produit de deux nombres complexes réalisée par le groupe B.*

En revanche, même avec quelques défauts liés aux mesures des longueurs, une construction tout à fait correcte du point de vue de sa correspondance *morphologique* avec la représentation géométrique du produit de Descartes et le bon placement des points *U*, *A* et *E* respectifs résultant d'une similitude rendent compte d'une appropriation de la signification du produit : le passage du produit de Descartes, ayant un angle nul, au produit complexe où la puissance du théorème de Thalès permet de prouver le produit en ajoutant la rotation des angles à la multiplication de *longueurs*. Les propriétés géométriques du produit de deux nombres complexes auraient été interprétées en termes de transformations. Cela amène les élèves à mettre en œuvre une genèse instrumentale qui, articulée avec une genèse sémiotique, leur a permis la construction réalisée. La genèse sémiotique ayant, dans ce cas, une origine dans le plan cognitif peut aussi être associée à la médiation sémiotique de notre signe-artefact. Finalement, étant donné que nous n'avons pas d'autres traces écrites ou orales qui nous permettent d'accéder plus finement au travail fait par ce groupe, il ne nous reste que des conjectures à faire quant aux motivations favorisant leur réponse. Nous remarquons que nos résultats restent ambigus et que nos données manquent de paroles qui permettent de mieux les interpréter comme des faits. Dans ce cas, nous aurions une preuve plus tangible de l'effet ou de l'influence provoqués par notre signe-artefact comme médiateur tout au long du processus.

Cela aurait été bien beau d'avoir eu accès aux discussions qui, tel que je les ai présentées pour le groupe A, rendent compte de la complexité de la tâche et de la richesse des échanges entre les élèves.

## DISCUSSION

Peut-on identifier et différencier des interactions entre les composantes de l'espace de travail mathématique personnel des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ? Cette question, portant directement sur le travail mathématique des élèves et sur le regard théorique sous lequel ce travail a été étudié, correspond à notre deuxième question de recherche. Une séance non-traditionnelle d'apprentissage a été conçue spécifiquement pour répondre à nos intentions et à nos fins didactiques, lesquelles portaient sur la mise en relation entre les composantes d'un espace de travail mathématique grâce à l'action de genèses sémiotiques et à la médiation sémiotique d'un signe-artefact dans un contexte de médiation sociale. Comme je l'ai déjà mentionné, nous avons intégré explicitement à l'ETM des intermédiaires, des signes médiateurs. Ainsi l'ETM a été lui-même intégré à un processus socioculturel de l'apprentissage où les dimensions sociale et sémiotique coexistent dans la zone de développement proximale définie par Vygostky (1934/1997). Dans ce contexte, et de façon plus spécifique, notre objectif était d'étudier si les représentations géométriques, données ou demandées, reconnues comme signes-artefacts, peuvent renvoyer à un signifié mathématique précis (Falcade, 2002), dans notre cas, la multiplication. Nous avons pris conscience des difficultés des élèves à transposer leurs connaissances à des situations différentes, leur résistance à un nouveau discours théorique, ainsi que leur attachement à la résolution de problèmes mettant en place des techniques qui suivent un modèle déjà connu. La diversité d'espaces de travail mathématiques appropriés de manières très différentes nous a permis de déterminer des parcours d'élèves dans lesquels des entrées cognitives se sont produites. Nous avons ainsi observé une mise en relation entre notre signe-artefact et la signification de la multiplication comme une transformation dans le plan, laquelle a été observée dans la construction du produit de deux nombres complexes et dans d'autres réponses données à d'autres questions de la séquence proposée. Nos intentions didactiques nous ont conduits à la conception de séances expérimentales donnant priorité à la médiation entre paires, mais donnant une place limitée aux interventions de l'enseignant. Je ne peux que souligner l'importance de concevoir des situations qui permettent aux élèves de s'exprimer, de développer leurs idées et de répondre à leurs questionnements sous une médiation plus active de l'enseignant.

Par ailleurs, mes analyses du travail mathématique effectif des élèves, réalisées un an et demi après la soutenance de ma thèse – et partiellement articulées aux anciennes analyses dans le cadre de cet article –, m'ont conduite à des réflexions me poussant à, d'une part, veiller à ne pas restreindre le travail mathématique des élèves à un regard tourné complétement vers des *a priori* et, d'autre part, à sortir d'une épistémologie réaliste des mathématiques au sein de laquelle les mathématiques existeraient en dehors de celui qui les fait. Le travail mathématique des élèves résulte d'une appropriation du travail mathématique proposé. C'est ce mot *appropriation* ce que je souhaite questionner. L'analyse initiale des processus de résolution des tâches proposées m'a permis d'ébaucher ce processus d'appropriation mais, notamment dans le cadre de ma thèse, je suis surtout allée chercher si les élèves arriveraient ou non à l'état optimal du processus d'apprentissage attendu : la *construction* de la notion mathématique en jeu à travers l'accès à une signification visée et dont l'émergence (*son* émergence) était le but à atteindre à la fin du processus. Néanmoins, en observant plus en détails les échanges des élèves, je me suis rendue compte que me limiter à un tel regard peut être très restrictif. En effet, la lecture faite de l'espace de travail mathématique approprié par les élèves – sous l'angle précisé précédemment, c'est-à-dire consistant à le voir comme une sorte de transposition de l'ETM proposé – ne peut que partiellement tenir compte de

l’expérience des élèves ou du contexte dans lequel se réalise la rencontre des mathématiques (Maheux & Proulx, sous-presse) : un contexte de travail collaboratif, complexe et très riche dans lequel chacune des réflexions exprimées, chaque mot partagé, chaque question, mérite une attention plus profonde. Ces réflexions font émerger une question élémentaire mais assez complexe : comment formuler les liens entre l’ETM de l’enseignant (ou du chercheur) et celui des élèves en tenant compte de la diversité et de la plasticité propres à tout travail mathématique en classe ? L’idée de *mouvement* (Châtelet, 1993) dans et entre les composantes attribuées à l’ETM nous permet de mieux approcher le travail résultant du pouvoir générateur des mathématiques et ses répercussions dans le travail mathématique des élèves. Je me trouve donc au cœur d’une reconceptualisation qui permettrait d’élargir, encore une fois, la conception de ce qu’est un espace de travail mathématique. La mise en valeur des *cheminements* des élèves dans un tel espace, jamais fixe, nous permettrait de mieux apprécier sa réinvention grâce aux interactions et aux appropriations de la tâche proposée. Dans ce contexte, l’histoire de chacun des élèves fait *émerger dans le présent* (Varela et al., 1993) une diversité d’espaces de travail mathématiques, lesquels se manifestent comme un *devenir* en faisant *fleurir* ou *exploser* (Châtelet, 1993) les idées mathématiques en jeu (voir plus de références à ce sujet dans Barrera Curin & Maheux, à paraître).
Mon travail de thèse a rendu compte de mes premiers pas dans l’étude du travail mathématique des élèves. À partir de là plusieurs questionnements ont émergé. Aujourd’hui, c’est bien sur ces questionnements que je travaille tout en sachant que ce ne sont pas non plus les dernières questions autour desquelles j’aimerais développer mon travail de recherche. Revenir sur mon travail de thèse un an et demi après la soutenance m’a permis de mettre en valeur les fondements épistémologiques de ma recherche et de vouloir y rendre compte sans hésitation. Comme je l’ai dit dans ma communication orale lors du séminaire national, je ne cherche ni à établir de vérités didactiques, ni à limiter le *faire* des mathématiques à l’apprentissage de significations préfixées. Que ces apprentissages se produisent, que des gestes soient retrouvés dans le *faire* des élèves, que des modèles soient cherchés en faisant émerger des invariants dans les conduites d’élèves dans des contextes différents, tout cela, ne peut résulter d'une transposition d’un espace de travail mathématique. Les appropriations des ETM proposés par l’enseignant, si elles se produisent, doivent être vues comme fondamentalement propres à un contexte particulier, à une histoire personnelle et encore à une expérience de rencontre (Barrera Curin & Maheux, à paraître). En conséquence, ces réflexions me conduisent à enrichir mes questionnements par rapport à la façon d’approcher les mathématiques et la façon dont j’aimerais les voir vivre en contexte scolaire. La beauté toujours présente dans la possibilité de création que nous donnent les mathématiques elles-mêmes, et la beauté d’observer le *faire* des élèves au cœur d’un processus de médiations sémiotique et sociale – par exemple dans la mise en relation entre nombres et géométrie – constituent toujours le cœur de ma recherche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


BARRERA CURIN R. I. (2013). *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat, Paris : IREM de l'Université Paris Diderot – Paris 7.

BARRERA CURIN R. I. & MAHEUX J.F. (à paraître). Une réflexion autour de l'expérience de rencontrer les mathématiques. Colloque GDM, 2014.

BARTOLINI BUSSI M. G. & MARIOTTI M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2ème éd.). New York and London: Routledge.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHATELET G. (1993). *L'enchantement du virtuel. Mathématique, physique, philosophie*. Paris: Le Seuil.

DALISSIER M. (2009). *Anfractuosité et unification: la philosophie de Nishida Kitarô.* Genève: Droz.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

FALCADE R. (2006). *Théorie de situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans les séquences d'enseignement avec cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Thèse de doctorat non publiée.

KILHAMN C. (2011). *Making sens of negative numbers*. Thèse de doctorat non publiée.

KUZNIAK A. (2011). L'espace de travail mathématiques et ses genèses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique.* Paris.

KUZNIAK A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat & M. Hattermann (Eds.), New York : Springer.

LAKOFF G. & NUNEZ R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.

MAHEUX J.F. & PROULX J. (sous presse). Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives.

MARGOLINAS C. (1998). Étude de situations didactiques ordinaires à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. In Actes de la 8ème École d'Été de Didactique.

NOSS R. & HOYLES C. (1996). *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and com- puters.* Dordrecht : Kluwer.

PRESMEG N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images (pp. 267-279). London: Lawrence Erlbaum Associates.

RADFORD L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: a semiotic cultural approach to students types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

RADFORD L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In A. G. (ed.) (Ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno : Alta Scuola Pedagogica.

SFARD A. (1994). Reification as the birth of metaphor. For the learning of mathematics, 14(1), 44-55.

SFARD A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of* *discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.

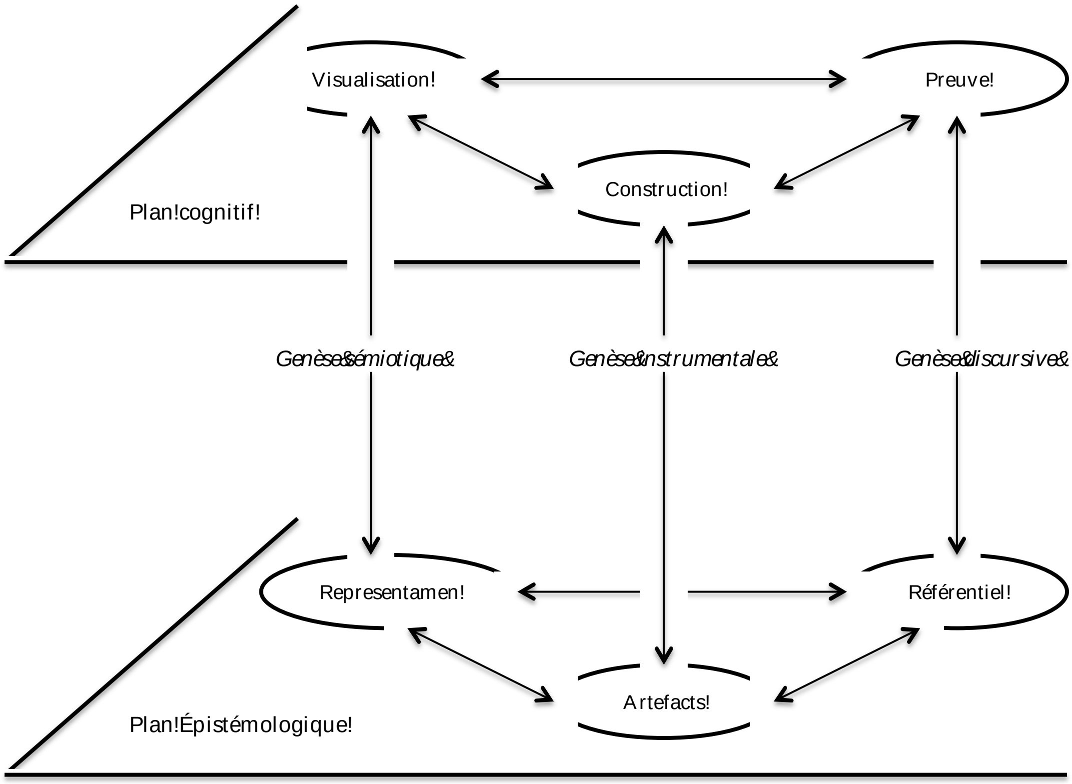
SOTO-ANDRADE J. & REYES-SANTANDER P. (2011). Conceptual metaphors and grund-vorstellungen: A case of convergence. In M. Pytlak, T. Rowland & Ewa Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1625-1635). Rzeszów: University of Rzeszów.

VARELA F. THOMPSON E. & ROSCH E. (1993). *L'inscription corporelle de l'esprit.* Paris : Edition Seuil.

VYGOTSKY L. S. (1934/1997). *Pensée et langage* (3ème éd.). Paris : La Dispute

WERTSCH J. V. & ADDISON STONE C. (1995). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives. Cambridge: Cambridge University Press.

## ANNEXE 1 : L'ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE ET SES GENESES. KUZNIAK, 2011.



## ANNEXE 2 : SEQUENCE EXPERIMENTALE D'ENSEIGNEMENT PROPOSEE EN CLASSE DE TERMINALE S

**Travail avec annexe 1**

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

Lire le texte de Descartes (annexe 1), puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

Nous proposons *AB = 1 cm. BE,* est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?

**Travail avec annexe 2**

Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :

Sachant que *BA = 1cm* placer *D* entre *B* et *A*.

Construire *E* pour que *BE* donne le produit de la multiplication de *BD* par *BC*.

Décrire votre construction et expliquer pourquoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

**Travail avec annexe 3**

Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point *A* d'abscisse +1 et du côté négatif le point *D* d'abscisse -2. (AC) et (DE) sont parallèles.

Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

Si de manière plus générale, l'abscisse du point *C* est $x_C > 0$ et l'abscisse du point *D* est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point *E* sur *(BC)* d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

**Travail avec annexe 4**

Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$, un repère orthonormé direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point *M* et d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$. Utiliser les informations données sur la configuration « Figure D » pour répondre aux questions suivantes :

Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de *z* et *z'* donne toujours le produit $z''$ (affixe du point E et du vecteur $\overrightarrow{BE}$) ? Expliquez votre réponse.

Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$ ? Lesquels ? Et entre ÂOC, ÂOD (les angles associés aux facteurs) et ÂOE (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

**Travail avec annexe 5**

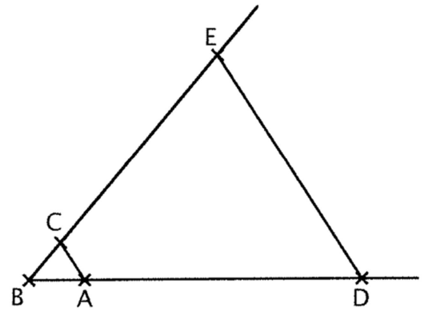
Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation

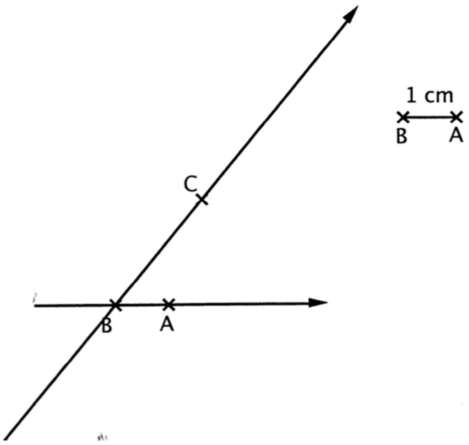
géométrique du produit de z et z'.
Décrire votre construction.
Quel lien pouvez-vous établir entre le produit de Descartes et le produit que vous venez de construire ?
Dernière question :
En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle *signification géométrique* pouvez-vous donner à la multiplication ?

**Annexes liées aux tâches de la séquence d'apprentissage**

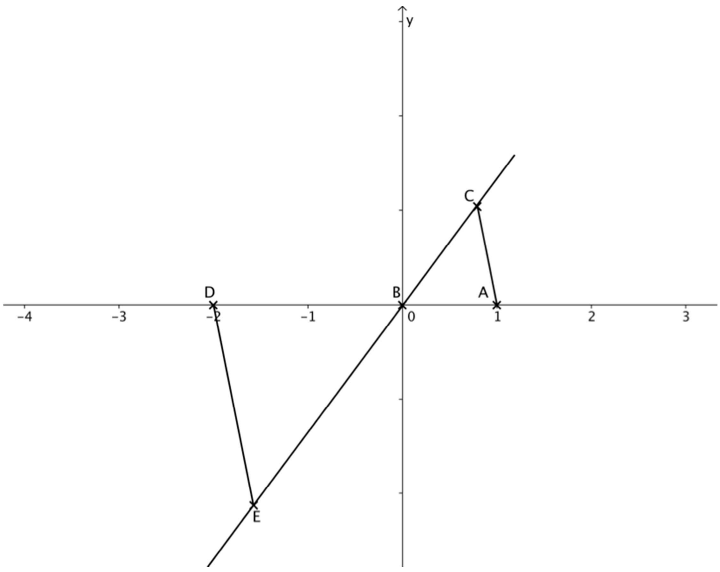
**Annexe 1** (Figure A)
Soit par exemple *AB* l'unité et qu'il faille multiplier *BD* par *BC* ; je n'ai qu'à joindre les points *A* et *C*, puis tirer la parallèle à *CA*, et *BE* est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).



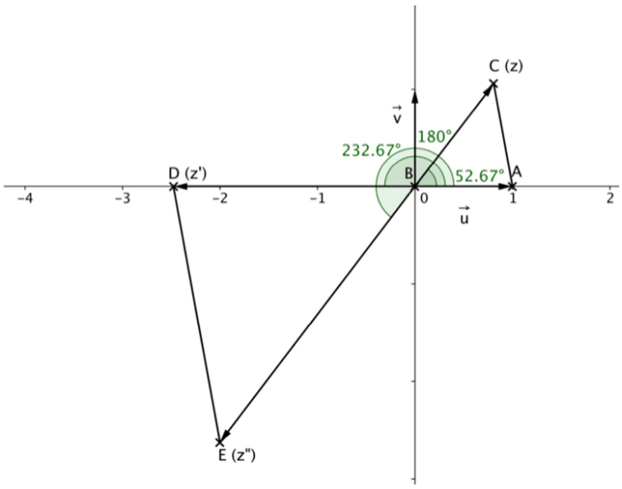

**Annexe 2** (Figure B)



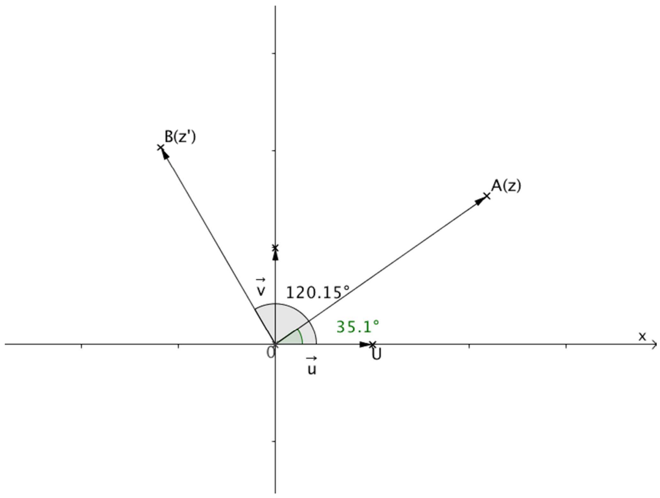

**Annexe 3** (Figure C)




**Annexe 4** (Figure D)




**Annexe 5** (Figure E)



# LES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES ET LES TECHNOLOGIES : PRATIQUES ET USAGES

Maha **ABBOUD-BLANCHARD**

LDAR – Université de Cergy Pontoise

maha.abboud-blanchard@univ-paris-diderot.fr

**Résumé**

Ce texte présente une synthèse de plusieurs de travaux centrés sur l'étude du professeur de mathématiques intégrant les technologies numériques dans son enseignement. La perspective adoptée est pragmatique dans le sens où l'objectif poursuivi est d'observer et d'analyser des pratiques d'enseignement s'exerçant dans des contextes *ordinaires* afin de mieux les comprendre et de mettre en lumière les facteurs qui les déterminent. Une première partie rend compte des changements voir de la déstabilisation des pratiques qu'engendrerait l'intégration des technologies. Synthétiser les résultats correspondants conduit à une première élaboration théorique organisée autour de trois axes : *l'axe cognitif, l'axe pratique/pragmatique et l'axe temporel*. Une seconde partie met le focus sur les usages des technologies que les enseignants développent à terme, dans une dynamique combinant une appropriation à la fois *personnelle* et *professionnelle* de ces technologies. La modélisation de ces développements en termes de *genèses d'usages des technologies* offre alors une deuxième élaboration théorique. La corrélation entre les deux entrées, fournit un cadre d'analyse des pratiques et des usages ayant une proximité directe avec l'expérience vécue par les enseignants et en permettant une compréhension approfondie ; condition nécessaire au développement de pratiques de formation plus riches et répondant aux besoins des formés.

**Mots clés**

Technologies – Mathématiques – Usages – Enseignant – Pratiques – Formation

## 1. INTRODUCTION

Cela fait plusieurs décennies maintenant que l'injonction d'intégrer les technologies dans l'enseignement des mathématiques engendre un phénomène original, présentant peu de décalage temporel avec des évolutions sociétales aussi bien dans la vie quotidienne des enseignants que dans leur milieu professionnel. Ce phénomène est aussi porteur d'idéologie qui plus est non spécifiquement mathématique. Il est donc « neuf » à certains égards, et diffère d'autres tentatives de transformation de l'enseignement pilotées plutôt par des principes relatifs aux contenus mathématiques eux-mêmes. Dès ses débuts, ce phénomène a interpellé les chercheurs en didactique des mathématiques. La complexité de la situation d'enseignement dans un environnement technologique n'a pas tardé à être mise en lumière et l'insuffisance des références théoriques classiques pour l'appréhender fut avérée. La réalité de l'utilisation de nouveaux outils puissants, porteurs de dimensions épistémique et technique-pratique dans la classe, a amené certains spécialistes du champ à faire appel à des cadres

extérieurs à la didactique pour leur permettre de mieux apprécier cette réalité. Ce fut notamment le cas en France lorsqu'en se tournant vers l'ergonomie cognitive, certains didacticiens y ont puisé des compléments à leurs cadres d'analyses usuels (voir en particulier Artigue 2002 et 2007). C'est ce qui a alors donné naissance aux développements de l'approche instrumentale dans le champ de la didactique des mathématiques. Un autre exemple en est le cas de Monaghan (en Grande Bretagne) qui explique dans Lagrange et Monaghan (2009) comment le fait que ses outils d'analyse classiques ne lui permettaient pas d'interpréter pleinement les résultats de ses observations, ce qui l'a amené à faire appel à un modèle culturel holistique, le modèle de Saxe (1991). Ce dernier lui a donné la possibilité de délimiter un ensemble de paramètres de la situation d'utilisation des technologies en classe plus propice à son étude.
Notre propre démarche en tant que chercheure s'attaquant à un fait original pour lequel elle n'avait pas assez de références théoriques internes a été de choisir d'observer la réalité que ce phénomène engendre pour essayer dans un premier temps de la comprendre, faute d'autres références. Nos recherches se sont ainsi centrées sur l'étude des pratiques d'enseignement dans les contextes dans lesquels elles ont lieu en les abordant sous deux angles. Le premier est celui des changements voire de la déstabilisation des pratiques qu'engendrerait l'intégration des technologies, notamment liés aux contenus mathématiques en jeu et aux déroulements particuliers des séances. Le deuxième est celui des usages que les enseignants développent à terme, ce qui oblige à tenir compte de la réalité des contraintes qu'ils éprouvent.
Synthétiser les résultats de ces recherches sur les pratiques des enseignants avait pour but de dépasser ce qui relève du caractère contextualisé des différentes observations menées dans le cadre de cette démarche pour accéder à un certain niveau de décontextualisation. Faire ce saut « conceptuel » a nécessité de partir du cadre théorique d'origine pour remonter vers des élaborations théoriques synthétiques et modélisantes. C'est ce qui sera exposé et commenté dans cet article[28].

## 2. UNE SYNTHESE DES RECHERCHES SUR LES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES UTILISANT LES TECHNOLOGIES : VERS UN NOUVEAU CADRAGE THEORIQUE

Les différentes recherches que nous avons menées sur les pratiques enseignantes visaient non seulement à étudier ces pratiques dans leurs effets sur les apprentissages mathématiques des élèves mais aussi à prendre en compte le contexte institutionnel et social dans lequel un enseignant donné, avec son histoire et ses représentations, exerce son métier. Dans une lecture rétrospective des résultats de ces recherches, nous avons tenté d'identifier des caractéristiques liées à l'intégration des technologies qui dépasseraient les cas étudiés.
Dans le paragraphe qui suit, nous présentons les contextes et problématiques de ces recherches ainsi que le cadre théorique d'analyse, nous reviendrons ensuite sur leurs résultats.

### 2.1 Les contextes et le cadre théorique de référence

Les deux premières recherches portaient sur les pratiques d'enseignants expérimentés.
La première d'entre elles s'intéressait aux pratiques d'enseignants utilisant des Bases d'Exercices en Ligne (désormais BEL). Les questions générales de recherche étaient : Pourquoi et comment les enseignants utilisent-ils les BEL ? Quels effets cette utilisation a-t-elle sur leur activité d'enseignement ? Les données étaient issues d'un projet académique d'expérimentation de l'usage des BEL afin d'en évaluer l'impact et l'efficacité en tant que

[28] Cet article reprend d'une manière condensée, les deux premiers chapitres de la note de synthèse présentée pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches (Abboud-Blnachard 2013)

soutien à l'action pédagogique en mathématiques (Artigue 2006). Elles provenaient d'abord d'un premier échantillon constitué d'une trentaine de professeurs impliqués dans le projet, durant les deux premières années. Un second échantillon, restreint, regroupait six enseignants pour lesquels les données sont plus nombreuses ce qui a permis une étude fine de leurs pratiques de classe et des évolutions de ces pratiques (Abboud-Blanchard, Cazes &Vandebrouck, 2008 et 2009).
La deuxième recherche est une étude de cas concernant une enseignante utilisant un logiciel de géométrie dynamique dans une classe de troisième. L'enseignante avait une utilisation épisodique des TICE[29] et exerçait dans un contexte ordinaire de classe. Nous avons analysé les tâches proposées aux élèves et le déroulement de la séance en nous focalisant sur les interactions enseignant-élèves et leur influence sur les activités des élèves (Abboud-Blanchard 2008, 2009). Afin de cerner ce qui peut être spécifique à l'environnement technologique, nous avons mené une analyse comparative avec une séance en environnement papier-crayon (désormais P/C) portant sur le même thème géométrique pour le même niveau de classe (Abboud-Blanchard & Chappet-Paries 2008).
La troisième recherche visait à explorer les pratiques professionnelles des professeurs stagiaires[30] dans le domaine de l'intégration des TICE pendant leur année de stage. Dans un premier temps et à travers une méthodologie par questionnaires, nous avons essayé de cerner les rapports des professeurs stagiaires aux technologies et de comprendre l'évolution de ces rapports pendant la formation initiale et les premiers temps d'exercice du métier (Abboud-Blanchard 2005, Abboud-Blanchard & Lagrange 2006). Dans un second temps, nous avons mené des études de cas de stagiaires ayant des profils différents vis-à-vis de l'usage des technologies. Nous avons approché leurs pratiques à travers ce qui en est rapporté dans des écrits professionnels portant sur l'intégration des TICE et via des entretiens explicites à la fin de l'année de formation (Abboud-Blanchard et al. 2008 et 2013).

Le cadre théorique qui nous a servi pour l'étude des pratiques des enseignants est celui de la double approche didactique et ergonomique (désormais DA). Ce cadre nous a paru pertinent pour avoir une approche des pratiques prenant en compte leur complexité et les facteurs qui les déterminent. La DA est inscrite dans la théorie de l'activité au sens où ce sont les activités des sujets en situation (enseignants, élèves) qui organisent les observations et les analyses (Rogalski 2008). C'est la prise en compte, de manière imbriquée, des apprentissages visés pour les élèves et du métier de l'enseignant agissant comme professionnel qui a donné lieu à ce cadre théorique (Robert et Rogalski, 2002, 2005). Une analyse des pratiques dans ce cadre met en scène cinq composantes et trois niveaux d'organisations des pratiques. Dans cette première partie de l'article, nous mettons en avant nos analyses se rapportant aux cinq composantes, nous reviendrons sur les niveaux d'organisation dans la deuxième partie.
Les deux premières composantes, cognitive et médiative, permettent d'analyser les pratiques observées en prenant en compte les tâches proposées aux élèves et la gestion des séances. La composante cognitive traduit les choix de l'enseignant (préparant la classe et en classe) relatifs aux contenus mathématiques, aux tâches des élèves et à leur organisation, à l'échelle d'une séance ou d'un ensemble de séances. La composante médiative est relative aux choix de déroulements, aux types d'interventions, notamment les aides, pour accompagner le travail des élèves. La composante institutionnelle considère la gestion par l'enseignant des conditions et contraintes liées à l'institution telles que les programmes, les horaires et les ressources imposées. La composante sociale correspond à ce qui est déterminé dans les pratiques de l'enseignant par le fait que sa profession a une dimension sociale, qu'il est soumis dans son établissement à des choix collectifs, qui parfois ne correspondent pas aux siens, qu'il a à composer avec le milieu social des élèves (par exemple en ZEP)… Enfin, la composante

[29] Technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement
[30] PLC2 de mathématiques (dans le contexte de formation initiale d'avant la réforme de la masterisation)

personnelle est celle qui permet d'exprimer que l'enseignant étudié est un individu singulier ayant sa propre histoire, ses propres représentations sur les mathématiques, sur l'enseignement (et dans notre cas, sur les technologies), au confort dont il a besoin pour exercer son métier… C'est la recomposition de ces cinq composantes qui permet d'accéder à la compréhension des pratiques de l'enseignant. Un postulat de la DA et à la fois un résultat de plusieurs recherches qui l'ont pris comme cadre théorique (voir par exemple Vandebrouck (ed.) 2008) est la stabilité et la cohérence des pratiques. Cette stabilité qui implique que les pratiques ne changent pas facilement peut donc expliquer dans le cas de nos études les perturbations et les choix faits lors d'intégration des technologies. A noter, que dans le cas de notre étude des enseignants débutants, il est évident que cette stabilité n'est pas encore installée, mais cependant déjà là, comme le montrent par exemple les travaux de Lenfant (2002) et de Mangiante (2012) sur les pratiques d'enseignants débutants.

## 2.2 Une synthèse des résultats des recherches : un nouveau cadrage théorique

Chacune des recherches que nous venons de présenter est contextualisée, singulière et relative à des individus ou à des groupes professionnels restreints. Il ne s'agit pas ici de rendre compte séparément des résultats de chacune d'entre elles, mais plutôt d'avoir un regard synthétique sur l'ensemble permettant de relever des caractéristiques communes liées à l'intégration des technologies qui dépasseraient les cas étudiés. Notre objectif est d'essayer de repérer une certaine homogénéité dans les réponses aux contraintes ressenties et dans les réponses aux incitations (institutionnelles, sociétales…) à intégrer les technologies dans l'enseignement des mathématiques (Abboud-Blanchard et al. 2013).
Ce regard croisé sur les résultats montre un phénomène de cristallisation des régularités autour de trois questions majeures : Comment enseigner les mathématiques en intégrant les technologies ? Comment gérer l'enseignement dans des environnements technologiques ? Comment gérer le temps de l'enseignement et de l'apprentissage lors de l'intégration des technologies ?
En nous basant sur notre cadre de référence, la DA, nous avons défini un nouveau cadrage théorique permettant de rendre compte de ce phénomène ; les trois axes d'analyse le structurant sont : l'axe Cognitif, l'axe Pratique/Pragmatique et l'axe Temporel, (Abboud-Blanchard 2014). Les cinq composantes définies dans le cadre de la DA sont ainsi reconfigurées pour le contexte de l'utilisation des technologies comme le montre le schéma ci-dessous :
- l'axe cognitif rend compte de la composante coginitive ;
- l'axe pratique/pragmatique intègre la composante médiative, mais va au-delà ;
- l'axe temporel vient se rajouter à une place aussi importante que les deux précédents
- les composantes personnelle (incluant le rapport aux TICE), sociale et institutionnelle jouent un rôle de déterminants permettant de mieux comprendre l'analyse des pratiques selon les trois axes.

De plus, ces trois axes sont entrelacés et certaines interprétations au sein de l'un d'eux pourraient se rapporter à un autre.

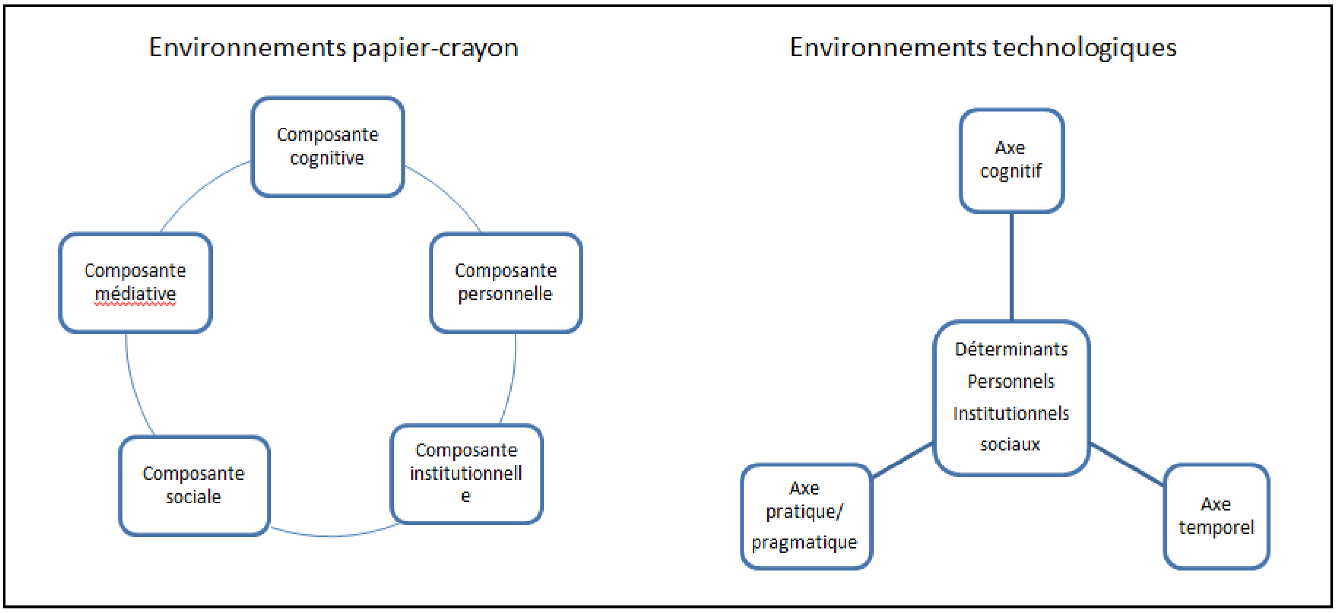



*Fig 1 :Une reconfiguration des cinq composantes pour le contexte des technologies en classe et pour la classe*

Dans ce qui suit, nous définissons plus en détail ces trois axes en présentant certains des résultats les exemplifiant.

### *2.2.1 Des résultats relatifs à l'axe cognitif*

Les enseignants de mathématiques sont fortement incités par l'institution à l'utilisation des TICE (textes officiels, ressources académiques, formation initiale, discours de l'inspection…). Cette incitation conditionne la façon dont l'enseignant pense l'utilisation des technologies pour les apprentissages mathématiques et certains de ses choix quant à la nature des tâches mathématiques proposées à ses élèves. Les régularités relevées relativement à ces questions montrent l'équilibre que l'enseignant essaye de trouver entre les interprétations qu'il fait de ces incitations et ses propres routines relatives à l'enseignement des thèmes mathématiques.
Nous constatons d'abord que, malgré la diversité des outils et des contextes de nos recherches, les tâches mathématiques sont d'une façon générale, identiques en environnement TICE à celles en environnements P/C. Même si certains enseignants sont conscients qu'ils n'exploitent pas toutes les potentialités des technologies qu'ils utilisent, ils pensent qu'ils font les choix optimaux compte tenu des contraintes relatives aux injonctions institutionnelles, à l'avancement dans le programme, à l'hétérogénéité des élèves (concernant les apprentissages mathématiques et l'utilisation des technologies), aux conditions matérielles…
Nous notons ensuite dans certains cas un décalage entre la richesse des tâches mathématiques prévues et ce qui se passe réellement en classe. C'est déjà le cas dans les séances ordinaires, mais le phénomène semble accentué ici. Dans ces cas, nous relevons que les tâches mathématiques préparées pour les élèves sont plus riches qu'en P/C puisqu'elles demandent de nombreuses adaptations comme par exemple, la construction d'étapes dans le raisonnement géométrique ou bien l'articulation de cadres algébrique et graphique. Toutefois, les analyses des déroulements des séances laissent voir des interventions de l'enseignant qui aboutissent à un découpage des tâches en sous tâches simples réduisant les marges de manœuvre de l'élève et par là-même son activité mathématique. Notons que ces constats peuvent aussi être attribués à des contraintes de gestion de la classe que nous examinerons plus loin. Dans son étude des pratiques d'enseignants ordinaires, Monaghan (2004) souligne aussi un tel type de décalage. D'un côté les technologies permettent à l'enseignant de mettre en place des séances de travail qui sont peu viable dans les conditions traditionnelles de

travail. D’un autre côté, l’enseignant a tendance à guider de plus près le travail de l’élève en s’enfermant lors de séances TICE dans un scénario encore plus rigide que dans les séances non TICE.

### *2.2.2 Des résultats relatifs à l’axe pratique/pragmatique*

Notons pour commencer que la dénomination de cet axe par « pratique/pragmatique » traduit notre volonté de nous baser sur l’activité réelle de l’enseignant observée dans sa classe, sur ce qui a eu lieu et non sur ce qui aurait pu exister, pour remonter ensuite vers son interprétation .
Notons aussi que nous aurions pu à l’instar de l’axe précédent (axe cognitif) nommer celui présent par axe médiatif ; les résultats relatifs aux deux étant issus de nos analyses des composantes cognitive et médiative des pratiques. Certes, la relecture de nos résultats relativement à cet axe reprend des éléments de la composante médiative dans son articulation avec les quatre autres composantes. Néanmoins, l’étude des pratiques dans les environnements technologiques montre une prégnance d’aspects transversaux dans la gestion des enseignements qui va au-delà du devenir des tâches prescrites pendant les déroulements, qui est l’objectif premier des analyses relatives à la composante médiative. En effet, l’intégration des technologies dans ses pratiques implique pour l’enseignant un fonctionnement dans des environnements de travail inhabituels engendrant des adaptations considérables, voire des ruptures pour lui-même et pour ses élèves. De plus, manipuler les machines peut représenter une difficulté supplémentaire, notamment quand l’enseignant n’est pas suffisamment familier avec le logiciel utilisé. Plusieurs interrogations peuvent se présenter à lui, il lui revient d’en prévoir des réponses a priori ou/et de les gérer en temps réel.
Nos observations de classe ont toutes eu lieu en salle informatique avec un/deux élèves par ordinateur, nous nous limitons donc ici à ce type d’environnement matériel. Quelle influence ces environnements ont-ils sur le déroulement de la séance ? Sur l’activité de l’enseignant ? Sur l’activité des élèves ? Pour répondre à ces questions, nous distinguons trois entrées.

**Le rôle de l’enseignant pendant la séance :** nous constatons dans ce type d’environnement que les élèves sont en général motivés et les interventions de l’enseignant à but d’enrôlement sont beaucoup plus faibles que celle généralement observée dans des séances P/C. Cependant, nous notons que l’enseignant est indispensable pour que les élèves « travaillent » même avec des logiciels conçus pour être utilisés en autonomie. En effet, beaucoup d’élèves ne pourraient pas progresser sans son aide, mais aussi car ils ont du mal à interpréter les feedbacks du logiciel qui sont parfois décalés par rapport à leurs activités réelles. De ce fait, l’enseignant est très sollicité. En effet, quand les logiciels concernés embarquent des aides (par exemple les BEL), on pourrait a priori s’attendre à voir des enseignants un peu en retrait, une fois la séance lancée, plus observateurs de leurs élèves qu’acteurs de la relation didactique. Nos observations montrent qu’il n’en est rien. Il en est de même lorsqu’il s’agit de logiciels ouverts comme par exemple ceux de géométrie dynamique où l’enseignant est constamment sollicité pour aider à exécuter la tâche et à interpréter les phénomènes observés à l’écran en termes de conjectures.
Toutefois, même si cette mobilisation semble être la règle chez les enseignants expérimentés observés, on note chez les enseignants stagiaires une volonté de préparer des séances très guidées qui s’appuient sur une fiche élève détaillée. Ce document comporte en général, en plus de la tâche mathématique, un nombre important d’aides à la manipulation, qui peuvent d’ailleurs prendre des formes différentes. Même si ce type de document n’est pas propre à des enseignants débutants, son existence semble favoriser chez eux une tendance à se situer en retrait (l’élève supposé être bien « guidé ») pendant la séance en laissant les élèves interagir directement avec le logiciel sans leur médiation.

**Les interventions de l'enseignant :** les analyses des déroulements montrent des interventions collectives très réduites et une domination des interventions individuelles de l'enseignant auprès des élèves. Ces interventions sont de plusieurs natures : relatives au contenu mathématique ; liées au logiciel et au fait que les mathématiques soient déclinées dans un environnement informatique (interventions que nous avons désigné par instrumentales); relatives à l'utilisation du P/C et le renvoi au cours. Elles peuvent viser plusieurs objectifs comme par exemple la structuration ou l'évaluation de l'activité de l'élève mais sont principalement sous forme d'aides. Nous nous référons ici à la distinction faite par Robert (2008) entre : les aides procédurales qui permettent seulement aux élèves de réaliser les exercices sur lesquels ils travaillent et les aides constructives qui permettent de comprendre plus que ce qui est en jeu dans l'exercice en ajoutent quelque chose entre l'action de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter (par exemple par des rappels et des bilans).
Nous observons que la majorité des aides en séance TICE sont procédurales et locales, visant à débloquer l'élève et à assurer la poursuite de son activité. Elles contribuent finalement à simplifier l'activité de l'élève lui laissant encore moins de marges de manœuvre. Les interventions de l'enseignant aboutissent souvent à un découpage et une simplification des tâches, voire même les réduisant à l'exécution mécanique d'une série de commandes (nous avons défini ces dernières comme étant des aides «manipulatoires»).
Les aides constructives, moins fréquentes, sont l'occasion d'amener les élèves à réussir les tâches sur lesquelles ils travaillent en retenant des connaissances qui vont au-delà de celles mises en jeu pour la résolution. L'analyse de leur contenu montre souvent que l'interaction didactique implémentée dans les logiciels n'est pas suffisante pour permettre seule d'atteindre les objectifs d'apprentissage prévus par l'enseignant. Elle montre aussi que ces aides sont difficiles à prévoir par l'enseignant dans la mesure où elles doivent être ajustées au parcours particulier de chaque groupe devant une machine.

**L'éclatement de la classe et la quasi disparition des phases collectives :** l'analyse des déroulements en salle informatique concerne également les formes de travail adoptées en classe qui rejaillissent sur l'activité des élèves. En effet, après la première phase de lancement de l'activité, nous assistons à un éclatement du groupe classe en plusieurs groupes (plusieurs élèves devant un seul ordinateur) qui fonctionnent d'une façon autonome et auxquels l'enseignant s'adresse en tant que tels. L'avancement des élèves n'est donc pas uniformisé et les interactions individuelles se substituent alors aux interactions collectives.
Nous observons alors des enseignants répéter de nombreuses fois le même commentaire, faire la même suggestion, donner la même aide, d'une façon qui semble peu économique. C'est un peu comme si l'enseignant s'adressait successivement à plusieurs «mini-classes» fonctionnant de façon autonome. Ce mode de fonctionnement nous paraît être une caractéristique des séances TICE en salle informatique. Même si on peut l'observer également dans des séances P/C de travail en groupes, il est plus marqué en environnement technologiques, sans doute car les groupes sont dans ce cas très petits (2 élèves devant un ordinateur ou même un élève par ordinateur) ce qui multiplie leur nombre et donc les interventions par rapport à un travail en groupes classique.
Cette autonomie des élèves, dans un environnement TICE, implique aussi pour l'enseignant une nécessité de s'adapter à leurs raisonnements : puisqu'il arrive en cours de route, il doit reconstituer ce qu'ils ont fait pour le valider ou non et pour les aider éventuellement à poursuivre leur propre cheminement de résolution (alors qu'en P/C il y a souvent des corrections types, parfois même rendues publiques au tableau). Drijvers (2011) relève également ce type de complexité et note que ce modèle de gestion demande à l'enseignant en environnement technologique des « compétences élevées » de diagnostic pour comprendre le problème que rencontre l'élève et pouvoir l'aider.
Ces conditions de déroulement d'une séance en salle informatique rendent souvent

problématique l'existence de moments de bilan collectif. Les corrections ne sont plus collectives et n'interviennent pas au même moment pour tous les élèves : elles sont individuelles et parfois médiatisées par le logiciel.

### *2.2.3 Des résultats relatifs à l'axe temporel*

L'étude des déroulements des séances ainsi que des interviews des enseignants laissent voir également la complexité relativement au temps de l'enseignement dans les environnements technologiques. Cette question du temps est indéniablement à prendre en compte quand il s'agit d'analyser l'activité de l'enseignant, que ce soit à l'échelle d'une séance ou de plusieurs organisées sur une période donnée. Elle concerne non seulement ce qui se passe en classe mais va au-delà pour inclure le temps que l'enseignant consacre à son activité hors la classe : préparation de séances, recherche de ressources pour l'enseignement, collaboration avec d'autres professionnels de l'enseignement... Quand nous parlons de « temps » dans nos travaux, nous incluons plusieurs facettes du temps. En fait, les théorisations de la notion du temps en didactique ont permis de distinguer le temps didactique du temps physique de l'horloge. Le temps didactique est en effet le temps propre à la construction du savoir (Chevallard & Mercier 1987). Il se décline en un temps méso-didactique et un temps micro-didactique. Le premier est relatif à l'agencement par le professeur des différents savoirs des programmes sur des intervalles donnés (trimestre, année scolaire ou cursus complet) dans une logique de succession ; c'est donc un temps linéaire (ibid). Le deuxième concerne une séance/séquence d'enseignement et prend en compte le caractère contextualisé et dynamique des pratiques dans la classe (Chopin 2005). Bien évidemment la question du temps est récurrente dans les recherches en didactique, elle y est présente soit comme objet explicite d'étude soit comme élément implicite dans les analyses. Dans nos travaux, la question du temps n'était pas en soi une question de recherche mais plutôt un paramètre à prendre en compte dans les analyses. Dans notre croisement des résultats, nous observons qu'elle occupe une place importante qui parfois nous permet de mieux comprendre des choix ou des actions de l'enseignant relativement aux deux autres axes de synthèse. Nos analyses des observations de classe nous amènent à prendre en compte le temps micro-didactique en relation avec le temps physique ; nos analyses de l'évolution des pratiques prennent aussi en compte le temps méso-didactique (cf. deuxième partie de cet article).

Préparer une séance TICE avec un logiciel nouveau ou non encore maîtrisé est particulièrement **coûteux** car cela nécessite un temps d'exploration pour connaître les potentialités pour l'apprentissage d'une notion donnée et pour anticiper les aides que l'on peut avoir à donner aux élèves aussi bien au niveau mathématique qu'au niveau technique. Même pour les BEL, dont la prise en main est généralement plus aisée que pour un logiciel ouvert, il importe d'aller au-delà de l'écran d'affichage de la tâche et de tester les messages et feedbacks renvoyés par le logiciel.

Quant à la gestion du temps au cours de la séance, nous observons chez tous les enseignants un **décalage** important entre le temps prévu et le temps effectif. En effet, en plus des problèmes techniques qui peuvent parfois parasiter la séance, les écarts de vitesses d'exécution des tâches par les élèves sont amplifiés dans les séances TICE, notamment, comme nous l'avons montré plus haut, à cause de l'éclatement de la classe et l'individualisation des rythmes. Les enseignants prévoient en général de maintenir les élèves rapides en activité en préparant des listes de tâches souvent longues, ce sont les élèves lents qui sont à l'origine des décalages relevés. Notons que cette lenteur est parfois liée aux caractéristiques de l'environnement. Par exemple, des élèves qui tentent de mettre une figure à l'échelle avec un logiciel de géométrie dynamique alors que l'objectif de l'enseignant est l'exploration des propriétés de la figure indépendamment de sa conformité à l'échelle donnée dans l'énoncé.

Enfin, les évolutions que l'on observe relativement à cette question du temps vont dans le sens d'une **recherche d'équilibre** entre « le gain» du temps didactique au niveau des apprentissages lorsque les apports des technologies sont bien exploités et « la perte » du temps physique lors de la préparation et la gestion des séances (voir aussi pour cela Ruthven 2010). L'ampleur de cette dernière tend cependant à décroitre avec l'amélioration de la maîtrise des technologies utilisées. Nous constatons alors que l'intégration des technologies possède un « enjeu économique » relativement à la question du temps : les enseignants ne s'investissent dans la mise en place de séances TICE que lorsqu'ils les estiment « bénéfiques » pour l'apprentissage ou qu'ils y sont fortement incités par l'institution.

Pour terminer cette première partie, soulignons, que ce cadrage théorique a certainement des limites. Un exemple en est celui de gommer l'effet « enseignant individuel ». En effet, pour un même enseignant, les résultats peuvent se centrer plus sur un axe que sur un autre en fonction de plusieurs facteurs parmi lesquels l'état de ses genèses d'usages de technologies (cf. partie suivante) ou bien le fait que la stabilité de ses pratiques (postulée dans la DA) soit appuyée sur une stabilité plus conséquente de leur composante cognitive ou de leur composante médiative.
Néanmoins cette synthèse nous a permis de repérer une certaine homogénéité dans les réponses apportées par les enseignants à des contraintes professionnelles partagées. Ces réponses apparaissent principalement sous forme d'adaptations et de compléments par rapport à des pratiques existantes ou en cours de développement. Mais ces réponses surviennent-elles aux mêmes moments dans un parcours d'intégration des TICE dans les pratiques ? Sont-elles plutôt des balises dans ce parcours ne correspondant pas à un ordre temporel commun à tous les enseignants ? Ces réponses évoluent-elles vers des formes de ruptures avec les pratiques habituelles chez les enseignants expérimentés ? Qu'en est-il des enseignants débutants ? Ces questions nous confrontent d'emblée à la question de l'évolution des pratiques, ce qui est commun dans ces évolutions et ce qui les déterminent. C'est l'objet de la partie qui suit.

## 3. LES USAGES DES TECHNOLOGIES : VERS UNE MODELISATION DES GENESES

Dans la partie précédente, nous avons exposé une synthèse de nos travaux sur les pratiques mettant en avant les changements que l'intégration des technologies engendre sur les pratiques usuelles, plus ou moins stabilisées. Dans cette partie, nous en adoptons une entrée relative aux usages des technologies qui émergent et s'installent et à l'évolution de ces usages dans le temps.
Parler d'usages, c'est prendre en compte non seulement le fait qu'ils correspondent à des utilisations se déployant dans le temps mais aussi « qu'ils font l'objet d'une véritable genèse, menée selon un principe de continuité par rapport à l'existant » (Baron & Bruillard 2006, p. 270). En didactique des mathématiques, Artigue, dans plusieurs écrits de synthèse (cf. par exemple, Artigue 2007), souligne le fait qu'une réelle intégration des technologies est celle qui assure un équilibre raisonnable entre leurs valences épistémique et pragmatique. Elle ajoute que les utilisations majoritaires actuelles privilégient les fonctionnalités pragmatiques, cantonnant par-là les technologies dans un rôle « d'adjuvant » pédagogique.
Dans nos travaux, nous avons décliné la problématique des usages selon deux angles d'attaque. Le premier est relatif à l'espace ou plutôt aux *espaces* dans lesquels naissent et se développent les usages des technologies, dédiées ou non aux apprentissages scolaires, ainsi qu'aux corrélations entre ces espaces : la sphère privée, non contrainte, régie par l'autodidaxie, l'espace professionnel privé et l'espace professionnel public. Ces derniers sont soumis tous les deux, à des degrés divers, aux conditions et contraintes multiples de la profession. Le deuxième angle d'attaque est relatif au *temps*, au sens où une étude des usages qui dépasse le caractère anecdotique des premières utilisations, notamment dû au manque de

maîtrise technique des outils et des machines, demande de penser les usages dans la durée. En effet, nous considérons que les usages ne se développent pas uniquement à travers l'accumulation de connaissances/expériences sur/avec les technologies mais aussi dans une *dynamique liée à une appropriation personnelle et professionnelle* et à une prise de conscience croissante de leurs potentialités et de leurs limites. La perspective des usages s'est en fait développée dans nos travaux à travers notre participation à deux projets inter-équipes, que nous présenterons plus loin. Sur le plan théorique, le premier a abouti à la délimitation de cadres d'usages dans lesquels se déploie l'activité de l'enseignant, ce qui correspond au premier angle d'attaque, et le deuxième projet a engendré une modélisation des genèses d'usages des technologies, associé au deuxième angle.

Dans les deux cas, en plus de notre inscription dans le cadre de la double approche, nous nous sommes appuyée sur un cadre théorique spécifique aux technologies développé par Rabardel (1995) et inscrit dans le champ de l'ergonomie cognitive : l'approche instrumentale. Il s'agit, dans cette approche, de distinguer l'artefact et l'instrument que cet artefact devient au service de l'activité d'un individu donné. La transition artefact-instrument se produit via une genèse instrumentale, en général complexe. Cette genèse met en jeu des processus d'instrumentalisation, dirigés vers l'artefact, et des processus d'instrumentation, dirigés vers le sujet. Ce cadre a été développé et spécifié au champ de la didactique des mathématiques au travers de nombreux travaux de didactique des mathématiques (voir par exemple Guin & Trouche 2002 et Trouche 2003).

Le concept de genèse instrumentale s'est élargi au fil des travaux dans le champ de la didactique professionnelle, à la fois relativement à la notion « d'instrument » et à la notion de « genèse ». Ainsi, Rabardel et Bourmaud (2005) abordent le fait que les instruments ne sont pas isolés et que l'activité du sujet implique souvent le recours à plusieurs instruments. Ces derniers sont mobilisés au fil de l'action en fonction des buts et des besoins opérationnels du moment. Rabardel et Pastré (2005) précisent, quant à eux, que la notion de genèse peut être élargie à d'autres champs que celui des instruments afin de permettre d'aborder l'articulation, au sein de l'activité humaine, entre fonctionnement et développement.

C'est l'ensemble de ces considérations théoriques que nous mobilisons dans les paragraphes qui suivent.

### 3.1 Délimitation de trois cadres d'usages des technologies

Une première recherche a été menée dans le cadre du projet : « Appropriation des TIC par les stagiaires IUFM et effets sur les pratiques professionnelles » (Lagrange, Lecas & Parzysz 2006). Une étude quantitative de plus de 800 questionnaires, de début et de fin d'année, a permis de mieux connaître les rapports aux TIC des enseignants stagiaires et de comprendre comment ces rapports évoluent au cours de la formation. Cette première étude a été complétée par une autre, qualitative. Cette dernière a permis, à travers l'étude des utilisations des technologies rapportées et analysées dans une trentaine de mémoires professionnels, d'identifier les usages que les stagiaires pratiquent durant leurs premiers temps d'enseignement ainsi que les points de résistance et les déterminants qui les sous-tendent (Abboud-Blanchard 2005).

Le travail de l'équipe a permis de délimiter trois cadres d'usage des outils technologiques par l'enseignant qui correspondent aux différents contextes d'activité et à l'emploi de technologies spécifiques ou non à ces contextes.

Le premier cadre concerne les activités non directement liées à la classe s'exerçant individuellement ou collectivement dans la sphère privée. Un exemple des usages des TIC dans ce cadre est l'utilisation d'un logiciel spécifique du domaine enseigné mais à des fins non directement liées à l'enseignement (ex : un tableur pour gérer la comptabilité).

Le second cadre est celui qui concerne la classe mais s'exerce hors-classe. Il peut s'agir du travail de conception de tâches destinées aux élèves, de production de fiches de préparation,

d’élaboration et organisation de documents d’évaluation... Les outils logiciels spécifiques à l’enseignement vont permettre d’intégrer dans les documents des éléments relatifs aux mathématiques et de préparer l’activité des élèves.
Le troisième cadre est celui de la classe. Les usages des technologies dans ce cadre ont pour objectif de soutenir des apprentissages mathématiques. Ils tirent parti le plus souvent des logiciels spécifiques à la discipline ou constituent une utilisation spécifique de logiciels généraux. Dans ce troisième cadre, l’instrumentation de l’activité de l’enseignant s’articule avec une activité instrumentée des élèves.
Dans Abboud-Blanchard & Lagrange (2006), nous montrons que les usages dans le premier cadre s’installent rapidement (ou sont déjà présentes). Ils permettent des usages dans le second cadre qui les prolongent. Cependant, l’instrumentation dans le deuxième cadre relative aux mêmes outils n’intègre très souvent qu’un niveau professionnel superficiel. Ainsi par exemple, les stagiaires cherchent en majorité des séances toutes faites (prêtes à l’emploi) et non un ensemble d’éléments leur permettant de construire eux-mêmes leurs propres séances. Ce dernier constat peut être dû en premier lieu à la sensibilité accrue des enseignants débutants à la problématique du temps (cf. partie précédente) ou bien à une contrainte d’efficacité ne permettant pas les stratégies d’essais-erreurs. S’agissant d’enseignants débutants, il peut y avoir aussi la confiance a priori dans ce qui a été produit par ceux qu’ils estiment plus experts qu’eux.
Malgré une instrumentation personnelle en développement dans la sphère privée et hors-classe, les usages significatifs dans la classe semblent peu fréquents et l’instrumentation professionnelle insuffisante. Le troisième cadre est en effet le plus contraint. Les professeurs stagiaires semblent chercher à construire des usages compatibles à la fois avec des normes professionnelles perçues et leurs propres représentations des mathématiques et de leur enseignement. De plus, ils perçoivent que pour passer d’un usage personnel à un usage avec les élèves, il va falloir faire un « saut qualitatif » intégrant un degré de complexité supérieur : il ne suffit pas de « savoir faire soi-même », il faut aussi se projeter dans ce que les élèves doivent savoir faire pour apprendre des mathématiques. Les usages réels dans la classe sont aussi plus limités dans leur ambition que ceux majoritairement envisagés a priori dans les déclarations lors des interviews ou réponses aux questionnaires. Ces déclarations sont essentiellement «idéologiques» (apport indéniable des technologies, changement des méthodes classiques d’enseignement, motivation des élèves…), sans réelle interrogation sur les spécificités relatives aux apprentissages mathématiques.
En prolongeant cette première recherche par une autre plus fine, par études de cas, nous avons repéré des évolutions, réelles et projetées, des usages au fil de l’année de stage (Abboud-Blanchard et al. 2013). Nous avons montré que ces évolutions sont d’une part déterminées par les représentations initiales des TICE chez les stagiaires et par la formation reçue au cours de l’année de stage, et d’autre part, guidées par une prise de conscience des questions liées aux aspects didactiques de l’utilisation des technologies qui ne s’opère qu’après des mises en œuvre dans les classes. Nous avons ainsi mis en évidence qu’une formation initiale aux TICE incluant des aspects didactiques ne peut réellement être efficace que lorsque le stagiaire a pris conscience des problématiques didactiques liées à l’intégration des technologies en classe à travers ses propres expériences (Abboud-Blanchard & Lenfant-Corblin 2009).

### 3.2 Des genèses instrumentales aux genèses d’usages des technologies

Le concept de genèse instrumentale désigne le processus de transformation, pour un individu, d’un artefact donné en un instrument pour des utilisations données. Dans nos travaux, nous avons considéré le concept de genèse d’usages des technologies relative à l’enseignement des mathématiques en partant d’une acception élargie du concept de genèse instrumentale (cf. plus haut). En effet, dans chacun des trois cadres, s’opèrent des genèses instrumentales liées aux artefacts utilisés, les transformant en des instruments pour l’enseignant, spécifiques du cadre. Nous considérons les genèses instrumentales de l'enseignant comme inscrites dans des dynamiques plus globales de développement de connaissances et de compétences (à but professionnel ou non). Y interagissent des phénomènes d'instrumentation s'inscrivant dans les divers contextes d'activité du sujet enseignant. Ces dynamiques sont relatives à des genèses d'usages des technologies incluant deux dimensions : personnelle et professionnelle. Le schéma ci-dessous représente les différentes genèses d'usages, entrelacées, complexes et différenciées :

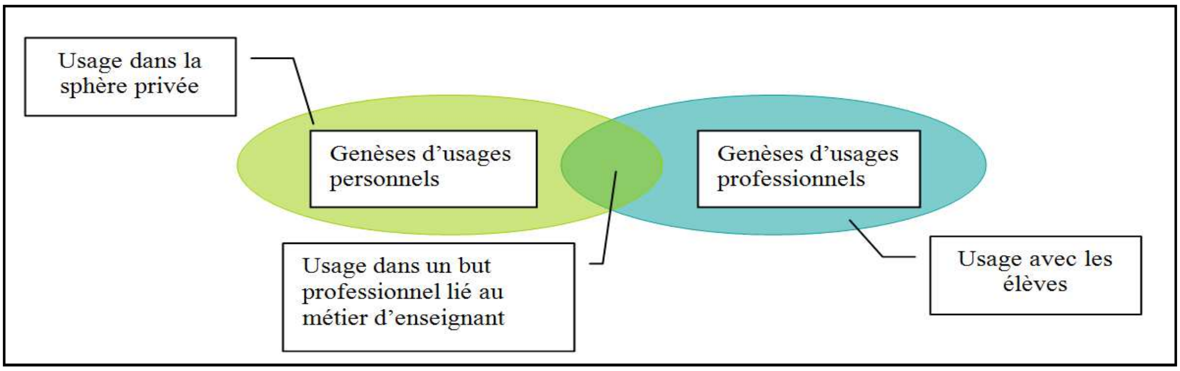



*Fig 2 :Les différentes genèses d'usages des technologies*

Des genèses d'usages personnels concernent en même temps l'activité de l'enseignant indépendamment de son contexte professionnel, dans la sphère privée (ou professionnelle non liée au métier d'enseignant) et son activité en différé dans le projet de préparer ou gérer ce qui peut se rapporter au contexte d'enseignement, cette dernière relevant à la fois de genèses d'usages personnels et professionnels. Des genèses d'usages professionnels sont directement liées à un usage avec les élèves, elles incluent l'appropriation d'un outil dans un but professionnel et s'étendent à l'utilisation de cet outil dans le cadre de la classe.
Ainsi, pour certains artefacts comme un logiciel de géométrie dynamique, l'usage dans la classe passe d'abord par une phase où l'enseignant se l'approprie progressivement au cours d'une genèse personnelle mais liée à l'exercice de son métier. Toutefois, cette appropriation personnelle peut ne pas entraîner une utilisation en classe, comme nous l'avons souligné précédemment.
Enfin, nous rejoignons Lagrange (2013) lorsqu'il précise qu'à la différence des genèses instrumentales, les genèses d'usages transcendent les artefacts et leur diversité pour prendre en compte l'unité des pratiques pour un enseignant donné. Dans ce qui suit, nous montrons comment ces genèses peuvent être mises en évidence à travers des processus dynamiques entre les différents niveaux d'organisation des pratiques.

### 3.3 Les genèses d'usages : une modélisation articulant deux cadres théoriques

Cette deuxième élaboration théorique trouve son origine dans notre participation au projet GUPTEn : « Genèses d'usages professionnels des technologies par les enseignants » (Lagrange et al. 2009). L'un des deux axes de travail : l'axe didactique du projet visait l'étude de l'activité de l'enseignant à travers les usages et les dispositifs dans lesquels ces usages s'inscrivent. L'objectif commun des recherches composant cet axe était de mettre en évidence et d'analyser des genèses d'usage chez des enseignants utilisant les TICE, chacune de ces recherches ayant sa spécificité théorique. Notre essai de synthèse des résultats de ces différentes recherches nous a amenée à définir avec Vandebrouck (Abboud-Blanchard & Vandebrouck 2012) un construit théorique qui rend compte de la dynamique des genèses. Il se base à la fois sur la théorie de la double approche et l'approche instrumentale, toutes deux apparentées à la théorie de l'activité.

Comme nous l'avons détaillé dans la première partie de l'article, la stabilité des pratiques stipulée dans la double approche résulte notamment de la cohérence entre ce que recouvrent les cinq composantes. En plus de ces dernières et pour accéder aux évolutions individuelles de l'activité, la double approche prend en compte trois niveaux d'organisation permettant ainsi une lecture des pratiques recomposant les temporalités et les composantes. Ces trois niveaux d'organisation (micro, local et global) prennent à la fois en compte la temporalité et le grain - le niveau de détails- des activités enseignantes à analyser (Robert 2008).

Le niveau micro est celui des automatismes et des routines ; par exemple les gestes élémentaires, aussi bien pour la préparation que dans la gestion des séances.

Le niveau local est celui de la classe au quotidien. C'est le niveau correspondant au temps moyen de l'action, là où se rencontrent les préparations et les improvisations, le niveau de des adaptations de l'activité de l'enseignant à celle des élèves.

Le niveau global est celui des projets, des scénarios, des préparations et correspond au temps long de l'action.

La considération de l'interdépendance de ces niveaux est fondamentale dans notre travail : l'introduction de la technologie va entraîner des évolutions imbriquées dans les trois niveaux. C'est ainsi l'articulation des évolutions entre ces niveaux qui nous permet de modéliser les genèses d'usages des technologies.

Nous faisons l'hypothèse qu'un enseignant qui débute dans l'utilisation d'un outil technologique ne dispose pas d'automatismes et de routines pour cet usage, ni de vision globale sur l'organisation d'un enseignement cohérent intégrant cet outil. De ce fait, faute de suffisamment de possibilité d'agir aux niveaux micro et global, le niveau local occupe toute la scène. En réponse à cette surcharge du niveau local, plusieurs phénomènes dynamiques se mettent en place que nous illustrons par le schéma suivant :

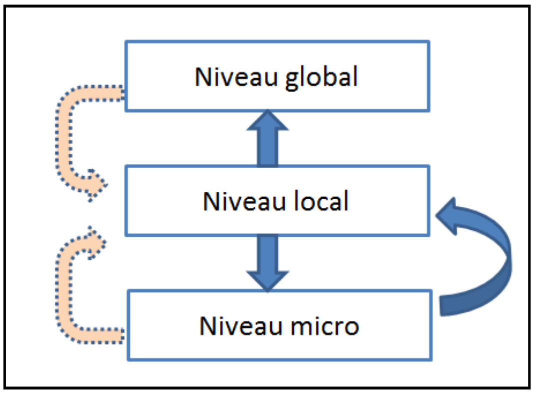



*Fig 3 :Un modèle des genèses d'usages professionnels des technologies*

Un premier processus (flèche courbe pleine) correspond au fait que le niveau micro des pratiques habituelles vient soutenir le niveau local. Il traduit un recours aux pratiques habituelles (au niveau micro) hors TICE ou/et avec un autre outil technologique, pour le contexte d'usage d'un nouvel outil.

Deux autres processus que nous désignons comme des « mouvements » vont du niveau local des pratiques vers respectivement le niveau global et le niveau micro. En premier lieu, il y a un mouvement du local vers le global qui traduit l'évolution du projet global d'enseignement à partir d'utilisations répétés de l'outil technologique en question. En parallèle, il y a un mouvement du local vers le micro qui traduit le développement au niveau micro de nouveaux automatismes liés directement à l'outil technologique (voire se composant avec d'autres automatismes relatifs à d'autres outils technologiques). Les genèses d'usages des technologies se déclinent pour nous en ces deux mouvements.

Nous faisons l'hypothèse que les retombées sur le niveau local du développement des niveaux micro et global sur le long terme (flèches en pointillés) sont à l'origine de la stabilisation des

usages en classe, soulageant ainsi la surcharge vécue lors des premières utilisations de l'outil technologique. D'ailleurs, en se stabilisant, ces usages participeraient à leur tour à rendre gérable une surcharge de ce niveau due à l'utilisation d'un nouvel outil.
En outre, la stabilité des pratiques enseignantes semble aider au « pilotage » du niveau local des pratiques au quotidien par des automatismes relevant du niveau micro. A contrario, elle rend difficile, pour des enseignants ayant des difficultés à gérer le niveau local, aussi bien la construction de nouveaux automatismes spécifiques aux TICE au niveau micro que l'évolution des pratiques au niveau global. La stabilité des pratiques hors TICE agirait alors comme un frein à une évolution permettant l'intégration de nouveaux outils.

Enfin, partant de la notion de niveaux d'organisation des pratiques définis dans le cadre de la double approche, nous avons introduit une perspective développementale qui n'est pas spécifiquement mise en avant dans ce cadre théorique. Nous pensons que notre élaboration théorique vient enrichir la double approche en y ajoutant une modélisation dynamique permettant de rendre compte de l'évolution des pratiques enseignantes.

## 4. DISCUSSION : CORRELATION DES DEUX ELABORATIONS THEORIQUES ET RESULTATS CROISES

La décomposition ou la déclinaison des résultats de nos recherches selon les deux entrées précédentes nous a semblé nécessaire pour mieux comprendre les phénomènes observés et étudiés. Dans un premier temps, nous avons mis en évidence un cadrage théorique pour étudier les pratiques des enseignants utilisant les technologies à court ou à moyen terme en distinguant trois axes pour nous guider : l'axe cognitif, l'axe pragmatique, l'axe temporel. Dans un second temps, nous avons montré comment nous modélisons les évolutions des usages sur le long terme en distinguant des évolutions relatives aux trois niveaux d'organisation des pratiques : micro, local et global. Nous tentons dans cette partie de corréler ces deux entrées.

D'abord nous remarquons que l'axe temporel est omniprésent ; la prise en compte de la problématique du temps conditionne les genèses d'usages professionnelles hors-classe et en classe. Les évolutions correspondantes vont dans le sens d'une régulation de la perte du temps (des temps) dans le cadre de la classe et d'un rééquilibrage du temps (des temps) entre le cadre du travail en classe et le cadre du travail en différé. On repère ces phénomènes de régulation et de rééquilibrage par exemple dans l'évolution au niveau macro, vers des scénarios moins chronophages qui prennent cependant en compte la possibilité, en environnement technologiques, d'individualisation du travail des élèves. L'enseignant prépare ainsi un scénario général identique pour tous les élèves mais qui contient aussi quelques sous-tâches différenciées en fonction du niveau de chaque élève ou groupe d'élèves. Toujours, sur le niveau global, il est visible aussi dans le renoncement à la juxtaposition des séances P/C et TICE au profit de la mise en place d'une meilleure articulation entre les deux types de séances. Evidement ce constat est aussi relatif aux deux autres axes (pragmatique et cognitif) comme nous y reviendrons plus loin, mais le souci de gain du temps y participe aussi. Nous le relevons au niveau micro et local, lorsqu'un enseignant par exemple, déclare qu'il a remarqué que les élèves se familiarisent avec les logiciels en le voyant lui-même les utiliser en classe. Il a alors pris l'habitude de ne pas projeter des constructions toutes faites (figures, tableaux, graphiques) mais de les faire en classe devant les élèves. Il commente ce nouvel automatisme en disant que cela lui permet de gagner du temps quand les élèves travailleront seuls sur les machines car ils seront déjà familiarisés avec les commandes et les méthodes permettant de résoudre des tâches mathématiques. Le phénomène de rééquilibrage est présent aussi dans l'évolution des usages hors classe, lié à une meilleure exploration des feedbacks des logiciels pour permettre une gestion en classe plus rapide et moins hasardeuse des demandes d'aide correspondantes des élèves. D'une façon générale, la prise en compte des préoccupations liées au temps dans les genèses, induite par cet axe, est quasiment toujours liée à un, voire aux deux autres, axe(s) ; nous disions plus haut que ces axes sont entrelacés et que certaines interprétations relatives à l'un peuvent aussi se rapporter à un autre.

Ensuite, la lecture des genèses d'usages selon l'axe pragmatique de la pratique de classe est essentiellement relevée dans nos travaux par l'intermédiaire du rôle que donne l'enseignant aux interactions des élèves avec la machine, des formes d'organisation de la classe et des phases à l'intérieur d'une séance TICE.
En effet, arriver à gérer les interactions des élèves avec la machine sans se laisser déborder par des aides trop techniques ou sans être trop déstabilisé par un comportement inattendu du logiciel, demande à l'enseignant un travail conséquent en amont des séances avec le logiciel. Nous constatons une évolution chez les enseignants vers une étude des feedbacks du logiciel relatifs à la tâche prévue. Il en résulte un temps de travail conséquent hors-classe pour maîtriser non seulement ces feedbacks mais aussi pour envisager comment les élèves y réagiraient et quelles pourront alors être les interventions du professeur. Cette évolution va dans le sens d'une meilleure gestion de l'avancement du temps de travail en classe.
Les premières utilisations des technologies en salle informatique montrent des phases de bilan (voire d'institutionnalisation) qui se passent en dehors des séances TICE. L'évolution est de deux types. D'un côté certains enseignants vont ménager des phases de bilan toujours en dehors des séances TICE mais en y faisant explicitement référence à travers les traces papiers qu'on demande aux élèves de garder. D'un autre côté, d'autres (ou les mêmes à d'autres occasions) vont aménager des phases de bilan pendant la séance TICE pour contribuer à ce que des connaissances développées par les élèves dans leur travail individuel sur la machine soient socialement partagées. Ceci est rendu possible par une utilisation croissante de la vidéo projection aussi bien pour expliquer à la classe une notion ou une procédure que pour assister les phases de bilan. Drijvers (2010) décrit ainsi des utilisations de la vidéo projection en classe entière de l'écran d'ordinateur, où l'enseignant peut apporter des aides relatives à la manipulation du logiciel, expliquer les notions mathématiques en jeu dans les tâches utilisant le logiciel mais aussi montrer la relation entre ce qui est appris en P/C et en environnement technologique. Nos propres analyses des données n'ont pas atteint ce niveau de granularité. Néanmoins, ces formats de gestion du groupe classe ne sont pas particulièrement construits pour les environnements technologiques, ils sont plutôt adoptés du format traditionnel en y ajoutant des facilités/spécificités apportées par la technologie. Drijvers suggère de parler dans ce cas d'évolution plutôt que de révolution due aux technologies. Nous pensons qu'une étude des genèses des usages relatives aux niveaux local et micro devrait prendre en compte ce grain d'analyse pour essayer de mieux comprendre les lieux et les moments où des évolutions par rapport aux formats P/C stabilisés se produisent.

Enfin, comme nous le soulignions plus haut, l'évolution principale que nous avons observée correspond à une évolution du niveau global des pratiques et elle est essentiellement relative à l'axe cognitif. En effet lorsque les perturbations dues à l'usage des technologies à court/moyen terme engendrent une évolution, celle-ci se situe principalement au niveau des projets globaux et des scénarios d'enseignement. L'enseignant tend alors à mieux articuler dans ses préparations des activités P/C et des activités liées à la technologie, à rendre cette articulation « visible » pour les élèves (rôle des traces papiers), à donner un rôle dans l'évaluation aux activités effectuées avec la technologie. Dans sa recherche sur l'évolution des scénarios construits par des enseignants utilisant le logiciel de géométrie dynamique Cabri, Laborde (2001) souligne elle aussi que les enseignants évoluent vers des devoirs à la maison où l'utilisation de l'outil s'avère utile et ceci pour donner un statut institutionnel à l'utilisation des technologies, en direction des élèves.

Toutefois, nos données ne nous permettent pas de repérer des évolutions plus fines au niveau de l'évolution des tâches mathématiques. D'une part, notre volonté d'étudier des pratiques d'enseignants *ordinaires*, exerçant dans des contextes non expérimentaux, nous a contrainte à limiter le nombre de séances observées et d'autre part, nos études se sont déroulées sur des périodes restreintes d'un ou deux ans. La recherche de Laborde (ibid) étant plutôt ciblée sur l'analyse des tâches construites sur une longue durée (3 ans), l'auteure a pu y montrer une évolution en 6 étapes du rôle donné aux technologies dans les scénarios construits. Les enseignants conçoivent ainsi :

1. des tâches TICE isolées et épisodiques non reliées au reste du projet global d'enseignement ;
2. des tâches où les technologies aident à l'entraînement sur des notions déjà apprises en cours traditionnel P/C ;
3. des tâches aidant l'introduction de notions mathématiques à travers l'utilisation des technologies ;
4. des tâches articulant des connaissances mathématiques et des connaissances instrumentales, l'utilisation des technologies étant intrinsèquement liée à la tâche mathématique ;
5. des tâches choisies où l'utilisation des technologies apporte un plus à l'enseignement d'une notion ; par souci d'économie du temps, ces tâches ne relèvent pas du tout technologique mais l'utilisation des technologies y est bien ciblée
6. des phases d'institutionnalisation se basant aussi sur des activités avec les technologies servant dans des phases d'introduction.

Les évolutions que nos propres travaux ont révélées sont majoritairement relatives aux trois premières étapes, avec des projections d'évolution vers la quatrième. En effet, les deux premières étapes sont associées à ce qui permet de minimiser, dans le travail de l'enseignant, les perturbations que pourraient engendrer l'utilisation des technologies, La troisième permet d'utiliser les technologies pour assister, d'un point de vue fonctionnel (cf. valence pragmatique des technologies), les modes habituels d'enseigner les mathématiques. Les trois étapes suivantes impliqueraient un changement plus profond dans la façon de considérer les mathématiques et leur enseignement. Notons que les enseignants que Laborde a étudiés étaient engagés dans un projet académique et travaillaient d'une façon collaborative entre eux et avec les chercheurs qui participaient à ce projet. Ceci constitue une différence essentielle avec nos propres travaux. Les enseignants que nous avons étudiés étaient des enseignants exerçant dans des conditions non expérimentales.

Est-ce à dire que l'évolution des pratiques sur l'axe cognitif d'un enseignant « ordinaire » (voire « isolé ») atteint à un moment un seuil (se situant entre la 3eme et la 4eme étape) qu'il ne peut franchir qu'en s'engageant dans un travail collaboratif, qu'il soit entre enseignants uniquement ou impliquant aussi des acteurs extérieurs ? Nous le pensons.
Nous faisons aussi l'hypothèse que passer aux étapes 4, 5 et 6 dans la progression de Laborde ou donner une place plus conséquente à la valence épistémique des technologies (définie par Artigue (op.cit.)) ne peut avoir lieu d'une façon spontanée et isolée. Arriver à changer la nature des tâches mathématiques pour les penser à travers leurs accomplissements avec des outils technologiques et à construire ou reconstruire les scénarios didactiques associés demanderait :

- de changer sa vision des *priorités* dans les mathématiques à enseigner. Par exemple, qu'est-ce qui est plus important pour un élève de seconde : apprendre des méthodes pour tracer une courbe ou visualiser qu'une courbe représentative d'une fonction est constituée des points dont les coordonnées sont (x, f(x)), en en observant un très grand nombre et en faisant des tâches associées de manipulation sur l'écran, d'étude du comportement…
- d'avoir une relative *certitude* que ce type de tâches permet à l'élève d'apprendre les mathématiques qu'il est supposé apprendre à l'école ; cette certitude peut être apportée par

des objectifs et des représentations partagés au sein d'un collectif et sera peut-être associée à une évolution de ces objectifs ;
- de construire ces nouvelles tâches via un processus de fonctionnement-développement, qui se déroule dans le temps long. En effet, ces tâches ne sont pas usuelles dans le paysage des ressources pédagogiques communément présentes, les construire ou bien en adapter certaines présentes à sa propre pratique nécessite de les tester, les améliorer, les re-tester…
- de pouvoir disposer de résultats de recherches (dans la littérature professionnelle) étudiant la conception et la mise en œuvre de telles tâches ainsi que leurs effets sur les apprentissages.

Or le métier de l'enseignant est contraint, institutionnellement et socialement, et même si ce dernier évolue dans sa réflexion sur l'objet de son enseignement, traduire cette réflexion dans l'action demande sans doute d'être aidé par d'autres acteurs du système.

## 5. Pour conclure. Pour aller plus loin…

Etudier les pratiques des enseignants de façon qualitative donne lieu de fait à des recherches ponctuelles, contextualisées et portant sur un nombre restreint d'enseignants. C'est le cas de nos propres recherches et de celles que nous avons citées au fil de notre synthèse. Ce fait limiterait a priori la généralisation des résultats à d'autres enseignants dans d'autres contextes et utilisant d'autres technologies. Cependant, comme nous l'avons montré, nos propres résultats rejoignent souvent ceux d'autres chercheurs spécialistes du champ et travaillant dans d'autres contextes culturels, institutionnels ou technologiques. Nous pensons que cette concordance des résultats, même si elle se situe à un niveau global[31], soutient notre essai de généralisation.

En outre, essayer de synthétiser les résultats d'un ensemble de recherches au-delà des problématiques, contextes et cadres théoriques qui les ont produits nous semble une tendance « légitime » à l'heure actuelle (cf. par exemple Ruthven 2014). Elle est soutenue par le fait que, d'une part, l'intégration des technologies dans l'enseignement peine encore à se généraliser et que, d'autre part, l'existence d'un corpus de recherches sur les pratiques des enseignants apporte des résultats qui peuvent aider à comprendre les obstacles à cette généralisation. Pour comprendre la rationalité des pratiques relatives aux technologies, il y a certes besoin de faire des études fines basées sur des cadres théoriques établis et sur des méthodologies détaillées. Toutefois, dans le contexte actuel d'une intégration problématique des technologies dans l'enseignement des mathématiques qui interroge les chercheurs et les acteurs du système éducatif, nous pensons qu'il devient essentiel de capitaliser à travers une vision globale les résultats de ces études. Repérer la dimension collective dans les réponses des enseignants à des questions et des contraintes existantes dans les contextes professionnels « ordinaires », mettre en avant des caractéristiques communes et des routines qui se mettent en place, étudier les évolutions des usages est un préalable que nous nous sommes fixé, et que nous proposons à la communauté des didacticiens de prendre en charge, pour mieux aborder les questions de formation des enseignants et de formation des formateurs[32].

[31] Evidemment, il faudrait prendre en compte la variété des problématiques, des méthodologies et des cadres théoriques pour pouvoir faire une comparaison détaillée

[32] Pour plus de détails, voir le troisième chapitre de la note de synthèse (Abboud-Blanchard 2013)

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ABBOUD-BLANCHARD M. (2005). Uses of ICT by pre-service teachers, in Proceedings of the 7th *International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 74-78).University of Bristol.

ABBOUD-BLANCHARD M. & LAGRANGE J.B. (2006). Uses of ICT by pre-service teachers: towards a professional instrumentation? *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, vol 13.4, 183-191.

ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C. & VANDEBROUCK F. (2007). Teachers' activity in exercices-based lessons. Some case studies. In Pitta-Pantazi & Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (*pp 1827-1836). Cyprus.

ABBOUD-BLANCHARD M. (2008). Mathematics teachers in technology environments. In Proceedings of the 5th *Nordic Conference on Research in Mathematics Education,* University of Copenhagen.

ABBOUD-BLANCHARD M. & CHAPPET-PARIES M. (2008). L'enseignant dans une séance de géométrie dynamique. Comparaison avec une séance de géométrie papier-crayon. In F. VANDEBROUCK (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 261-292). Toulouse : Octarès.

ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C., & VANDEBROUCK F. (2008). Une base d'exercices en ligne dans la classe : l'analyse de l'activité des enseignants. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 319-344). Toulouse : Octarès.

ABBOUD-BLANCHARD M., LEBORGNE P. & LENFANT A. (2008). Le mémoire professionnel en IUFM, document "témoin" de la formation et "trace" de genèses de pratiques. In I. Bloch, F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

ABBOUD-BLANCHARD M., (2009). How mathematics teachers handle lessons in technology environments. In C. Winslow (Ed.), *Nordic Research on Mathematics Education* (pp. 237-244). Denmark :Sense Publishers.

ABBOUD-BLANCHARD M., LENFANT-CORBLIN A. (2009). What professional development of pre-service teachers to the use of ICT ? In Proceedings of the 9th *International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, University of Metz.

ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C. & VANDEBROUCK F. (2009). Activités d'enseignants de mathématiques intégrant des bases d'exercices en ligne. *Quadrante, Special Issue ICT in Mathematics Education*, 18(1/2), 147-160.

ABBOUD-BLANCHARD M. & VANDEBROUCK F. (2012). Analysing teachers' practices in technology environments from an Activity Theoretical approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, vol 19.4, 159-164.

ABBOUD-BLANCHARD M. (2013). *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives.* Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

ABBOUD-BLANCHARD M., LENFANT-CORBLIN A. & PARZYSZ B. (2013). Double approche et genèses d'usages : le cas d'enseignants en formation. In J.B. Lagrange (Ed.), *Les* *technologies numériques pour l'enseignement : usages dispositifs et genèses*. Toulouse : Octarès.

ABBOUD-BLANCHARD M., CHARLES-PEZARD M., CHESNAIS A. & MASSELOT P. (2013). Interroger la profession d'enseignants de mathématiques. Trois exemples dans l'enseignement primaire et secondaire. In A. Bronner (Ed.), *Des problèmes de la profession au rôle du langage*. Grenoble: La pensée sauvage.

ABBOUD-BLANCHARD M. (2014). Teachers and technologies: shared constraints, common responses. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 297-318). London : Springer.

ARTIGUE M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, n°7,245-274.

ARTIGUE M. (2006). L'utilisation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques au lycée : du suivi d'une expérimentation régionale à un objet de recherche, Actes du *Colloque EMF 2006*, Sherbrooke, Canada

ARTIGUE M. (2007) Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In, D. Pitta-Oantazi & G. Philippou (eds), *Proceedings of CERME 5 (*pp. 68-82). Cyprus University Editions.

ARTIGUE M. (2011). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. In actes du XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

BARON G.L. & BRUILLARD E. (2006). Usages en milieu scolaire : caractérisation, observation et évaluation. In Grandbastien & Labat (eds.) *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (pp. 269-284). Paris : Hermès-Lavoisier.

CHEVALLARD Y. & MERCIER A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Publication de l'IREM d'Aix-Marseille, n◦8, Marseille.

CHOPIN M. P. (2005). Le Temps didactique en théorie anthropologique du didactique. Quelques remarques méthodologiques à propos des « moments de l'Étude ». *I^er^ Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique : « Société, École et Mathématiques : Apports de la TAD »*. Baeza – Espagne.

DRIJVERS P. (2011). From 'work-and-walk-by' to 'sherpa-at-work'. *Mathematics Teaching*, 222, 22-26.

DRIJVERS P., DOORMAN M., BOON P., REED H. & GRAVEMEIJER K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, 75, 213-234.

GUIN D. & TROUCHE L. (Eds.). (2002). *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

LABORDE C. (2001). The use of new technologies as a vehicle for restrucuring. In F.-L. Lin et T.J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 87-109). Netherlands : Kluwer academic publishers.

LAGRANGE J.B., LECAS J.F. & PARZYSZ B. (2006) Les professeurs stagiaires d'IUFM et les technologies, quelle instrumentation ? *Recherche et Formation*, n° 52, 131-147.

LAGRANGE J.B., ABBOUD-BLANCHARD M., LOISY C. & VANDEBROUCK F. (2009). *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants*, Rapport final. http://gupten.free.fr/g-rapres.htm

LAGRANGE J.-B., & MONAGHAN J. (2009). On the adoption of a model to interpret teachers' use of technology in mathematics lessons. In Proceedings of the *sixth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1605-1614). France: University of Lyon, INRP.

LAGRANGE J.B. (Ed.) (2013, à paraître). *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages et genèses*. Toulouse : Octarès.

LENFANT A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

MANGIANTE ORSOLA C. (2012). Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32.3.

MONAGHAN J. (2004), Teachers' activities in technology-based mathematics lessons. *The International Journal of computers for mathematical learning*, vol.9, 327-357.

RABARDEL R. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Ed. Armand Colin.

RABARDEL P. & PASTRE P. (Eds) (2005). *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Toulouse : Octarès.

RABARDEL P. & BOURMAUD G. (2005). *Instruments et systèmes d'instruments. In Rabardel et Pastré (Eds), Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 211- 229). Toulouse : Octarès.

ROBERT A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59-68). Toulouse : Eds Octarès.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,2/4,* 505-528.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French $10^{th}$ grade class. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 269-298.

ROGALSKI J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie cognitive. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 23-30). Toulouse : Eds Octarès.

RUTHVEN K. (2010). Constituer les outils et les supports numériques en ressources pour la classe. In Gueudet et Trouche (Eds.). *Ressources vives, le travail documentaire du professeurs* (pp.183-199). France : Presses Universitaires de Rennes.

RUTHVEN K. (2014). Frameworks for analyzing the expertise that underpins successful integration of digital technologies into everyday teaching practice. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 373-394). London : Springer.

TROUCHE L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*. Document de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris7.

VANDEBROUCK F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Eds Octarès.

# UN REGARD DE CHERCHEURE SUR SON LIVRE, ECRIT POUR DES FORMATEURS ET DES ENSEIGNANTS EXPERIMENTES

*« Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos »*[33]

Aline **ROBERT**

Université Cergy-Pontoise

aline.robert@u-cergy.fr

**Résumé**

Nous présentons brièvement l'ouvrage, directement issu d'une formation de formateurs qui occupe la première année d'un master 2 de didactique (parcours professionnel) de l'université Paris-Diderot. Nous dégageons ensuite quelques caractéristiques du livre qui reprend ainsi les grandes lignes de la formation, en développe (linéairement) certains aspects essentiels, et est complété par quelques chapitres thématiques généraux, sur l'enseignement en ZEP, la didactique des mathématiques et autres. Nous évoquons notamment l'utilisation prévue des extraits de vidéo (sur le site des Presses) ainsi que les outils essentiels qui sont travaillés. Un premier regard de chercheure, en amont du livre, permet d'exposer ce que nous avons transposé de nos recherches sur les pratiques enseignantes et les hypothèses admises qui ont piloté globalement les conceptions des formations de formateurs et d'enseignants en jeu. Nous indiquons des limites perçues a priori, puis nous discutons du rôle de l'analyse des pratiques dans la formation d'enseignants, empruntant ainsi un questionnement de didactique professionnelle, et justifiant l'importance que nous donnons aux formateurs. Nous esquissons aussi d'autres points de vue possibles que ceux que nous avons pris. Un deuxième regard de chercheure, en aval du livre, permet de requestionner le produit fini, en se demandant notamment dans quelle mesure cette forme « livre » permet une appropriation des éléments visés, dans quelle mesure, pour qui, à quelles conditions c'est une ressource. Cette question importante est éclairée par des paroles de lecteurs en annexe. Nous concluons par des perspectives.

**Mots clefs**

Formation d'enseignants de mathématiques du secondaire, formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire, analyses de pratiques d'enseignants de mathématiques en classe, analyses de vidéos tournées en classe, analyses de tâches, analyses de déroulements, activités possibles des élèves, conceptualisation.

## INTRODUCTION

Comme détaillé dans l'introduction du livre, c'est une formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire qui est à l'origine de cet écrit, Diplôme d'Université (DU) de l'université de Versailles St Quentin[34] d'abord (en 2002-3) puis première année[35] d'un master

[33] A. Robert, J . Penninckx, M. Lattuati, Presses Universitaires de Franche-Comté, 2012, publié avec le soutien du LDAR.

[34] Rendue possible grâce au directeur de l'UFR sciences et au directeur de l'IUFM de l'époque

2 (professionnel) adossé au master de didactique des disciplines scientifiques de l'université Paris-Diderot. Un polycopié (Robert & Pouyanne, 2004) reprenant cette formation a précédé l'écriture actuelle. Cette formation a été reprise chaque année depuis le début, des évolutions sont intervenues – par exemple des lectures d'articles, rédigées, ont remplacé des lectures d'ouvrages, exposées, on a introduit une séance spécifique de préparation de ces lectures, on a remplacé les observations de formations par une enquête sur des formations suivies par des collègues, dont la restitution se fait collectivement, les soutenances de scénario comportent une petite animation de séance « en vraie grandeur », et surtout les analyses de vidéos réunissent les physiciens et les mathématiciens participant au master et permettent d'élargir les discussions aux relations inter-disciplinaires. Mais l'essentiel est resté, même si le public s'est petit à petit transformé, un peu plus jeune et moins nombreux (les premières années quelques 150 personnes assistaient à la séance de présentation). C'est la première auteure (A. Robert) qui a conçu et assuré les 11 premières années de la formation de formateurs (12 groupes de 12 à 22 participants chacun)[36]. Il semble important de souligner qu'on peut évoquer une véritable co-formation entre le formateur (enseignant-chercheur) et les participants. Ceux-ci interviennent beaucoup et donnent à voir chacun un extrait de vidéo filmée dans leur classe, ce qui nourrit de manière irremplaçable la connaissance de tous des pratiques effectives correspondantes, même si cela reste évidemment partiel. C'est cette co-formation, permise par la nature du travail engagé, qui a notamment enrichi la présentation dans le livre des questionnements fréquents des enseignants, partagés ou non, et qui a confirmé des régularités et des diversités déjà repérées dans d'autres travaux. De plus cela a permis de percevoir des réactions récentes des enseignants vis-à-vis des nouvelles donnes actuelles, comme l'idée de « faire son marché » dans toutes les injonctions ministérielles qui n'arrêtent pas d'être introduites, alourdissant les missions, sans accompagnement réel ni même justifications (Robert, 2013). En revanche les différentes adaptations à apporter dans divers types de formation, compte tenu de publics différents et de dispositifs imposés, sont peu étudiées dans l'ouvrage. Le tome 2 en préparation abordera davantage ce type de questions. La question des lecteurs auxquels le livre s'adresse est ouverte, faisant l'objet d'une discussion sur le fait qu'il constitue ou non une ressource et à quelles conditions, illustrée par des paroles de lecteurs.

Le livre comporte trois parties très différentes, avec des auteurs et collaborateurs variés. Une enseignante et formatrice honoraire (M. Lattuati) et une inspectrice d'académie honoraire (J. Penninckx) ont contribué à enrichir l'écriture initiale des deux premières parties, l'introduction générale (De quoi parlons-nous ?) et les analyses au cœur du sujet (Outils pour former le travail de l'enseignant en classe et pour la classe, analyses de séances de classe et des mathématiques à enseigner) – les collaborateurs[37] ont participé essentiellement à la troisième partie (compléments sur des thèmes précis, issus de recherches variées, sur l'intégration des TICE, les ZEP, la didactique des mathématiques comme champ de recherches et les questions d'évaluation en éducation).

Voici le plan de cette présentation. Nous dégageons d'abord quelques caractéristiques du livre, puis nous donnons un premier point de vue de chercheure « en amont » du livre, essentiellement lié aux éléments de transposition des recherches à l'origine de la formation de formateurs ayant précédé le livre, aux limites que nous connaissions *a priori* et à nos choix

[35] En deuxième année les interventions, qui ont un peu varié elles aussi, portent aujourd'hui sur les TICE, la sociologie, l'histoire des sciences et la modélisation.

[36] Avec la collaboration la première année d'un collègue mathématicien et remplacée depuis 2012 par un collègue également enseignant chercheur (L. Vivier) qui s'est « formé » en assistant lui-même d'abord à la formation

[37] A. Chesnais, J.F. Chesné, M. Haspekian, F. Heulot, N. Pouyanne, E. Roditi, S. Rousse, E. Vancauwenberghe

parmi d'autres possibles. Suit un deuxième point de vue de chercheure « en aval » de l'écriture et de la parution du livre : nous réfléchissons à des critiques du livre, puis nous dégageons un certain nombre de questions, dont la suivante : ce livre constitue-t-il une ressource, pour qui, pour quoi, à quelles conditions éventuelles ? Nous avons donné la parole à des lecteurs sur ces questions et nous résumons leurs points de vue. En conclusion nous abordons quelques perspectives et laissons le mot de la fin à l'éditrice !

# I. QUELQUES CARACTERISTIQUES DU LIVRE

## L'utilisation de 4 extraits de vidéos mis sur le site de l'éditeur (presses universitaires de Besançon)

Nous y reviendrons plus en détail, en replaçant les analyses proposées dans le contexte du livre : c'est au moment de l'étude des déroulements des séances de classe que le lecteur est invité à analyser ces vidéos comme dans les séances de formation, décrites dans le livre. Mais cette tentative de mettre (un petit peu) le lecteur en situation de classe pour aborder le métier d'enseignant, qui a d'ailleurs justifié le titre du livre, mérite d'être soulignée. Précisons qu'effectivement l'enseignant filmé dans ce type de vidéo place lui-même une caméra au fond de la classe, face au tableau, et ne s'en occupe plus. L'expérience, initiée avec des formateurs de l'IUFM de Versailles et répétée quelques 200 fois avec les participants au master pro montre que la caméra est, de fait, vite oubliée et ne perturbe pas ou très peu le déroulement ordinaire, sauf exception. Ce sont d'ailleurs ces formateurs qui ont suggéré d'utiliser ce dispositif très simple, sans observateur ni opérateur. Les premières vidéos utilisées en formation sont issues des premiers tournages ou de classes de participants aux premières années du master pro – en effet chaque participant doit se filmer et présenter un extrait de sa vidéo au deuxième trimestre de la formation. Les extraits mis sur le site donnent accès à un travail en géométrie dans deux classes du même enseignant (en 3$^{ème}$ et 4$^{ème}$ de collège), à une autre 4$^{ème}$ travaillant sur un exercice très proche du précédent et à une classe de 3$^{ème}$ ZEP travaillant sur un exercice proche de celui de la première 3$^{ème}$.

## Une offre de lecture non linéaire et hétérogène, qui traduit imparfaitement la formation

Il est possible d'avoir une lecture non linéaire du livre, grâce à des répétitions et des renvois. Nous avons voulu ainsi favoriser des lectures partielles, moins rébarbatives qu'une lecture exhaustive, et restituer aussi un peu l'esprit de la formation originelle. Cependant la forme « livre » minore nécessairement certains éléments de la formation, liés au temps long par exemple ou à l'ordre ou à tout ce que le présentiel apporte. On ne retrouve pas ainsi le caractère opportuniste lié au fait que ce qui se passe en séance dépend beaucoup des participants, notamment quand ils présentent leurs vidéos (au deuxième trimestre de l'année). De plus on n'évoque pas du tout la dernière partie du travail, élaboration de scénarios de formation (virtuels) en petits groupes, qui donne lieu à une synthèse des éléments rencontrés.

De plus les chapitres sont hétérogènes. Si la deuxième partie (II) est centrale et très directement issue de la formation de formateurs, la dernière partie (III), par « thèmes », offre des synthèses qui ne proviennent pas directement de la formation originelle, où ces thèmes apparaissent beaucoup plus brièvement : ainsi sont abordés, pour partie sous la plume de collaborateurs, l'intégration des TICE, l'enseignement en ZEP (on a gardé le sigle malgré sa disparition officielle), les recherches en didactique des mathématiques, les évaluations et les compétences. Enfin certaines annexes des 5 chapitres de la deuxième partie sont consacrées à des sujets particuliers, isolés, comme la réflexion sur la lecture critique d'articles de la littérature professionnelle.

Une bibliographie importante, classée en référence aux différentes parties, termine l'ouvrage.

## Des éléments de didactique directement « en acte » dans la partie II

Les premiers éléments « empruntés » aux travaux de didactique des mathématiques auxquels nous nous référons sont présentés en « actes », mis en fonctionnement au fur et à mesure des chapitres, à partir d'exemples développés entièrement. Certes il y a une reprise plus globale de la didactique des mathématiques dans le chapitre 3 de la partie III, comme un champ des recherches, mais où on ne revient pas sur ces outils précis, utilisés notamment pour analyser les exercices et les extraits de vidéos.

Nous listons ci-dessous les principaux outils mis en fonctionnement successivement dans cette deuxième partie. C'est dans l'introduction de cette partie II que les raisons de nos choix sont évoquées (page 54) : *ce sont les activités mathématiques des élèves qui déterminent la partie de l'apprentissage dont l'enseignant est en grande partie responsable ; ces activités dépendent à la fois de l'ensemble des tâches proposées, organisées dans le scénario global élaboré par l'enseignant, et des déroulements de chaque séance avec une plus ou moins grande proximité entre ce qui était prévu et ce qui s'y passe. Mais ces activités dépendent aussi d'impératifs plus indirects, …, liés au métier de l'enseignant*. Rappelons enfin que les apprentissages visés sont référés à des niveaux de conceptualisation dont une définition « opérationnelle » est donnée dès la page 19 du live, en préambule : *sur un ensemble de tâches précisé [*portant sur la notion visée, par exemple associé à un programme], ce niveau *est défini par la disponibilité des aspects objets et outils attendus (avec les cadres, registres, niveau de rigueur raisonnements qui les accompagnent) et par l'organisation des nouvelles connaissances par rapport aux anciennes.* Le mot conceptualisation est associé à la fois au processus et au « produit ».

### *A propos de mathématiques, pour commencer*

Il est important de souligner que les premières analyses présentées dans le livre (chapitre 1 de la partie II), correspondant exactement à ce qui est fait en formation, concernent des analyses d'exercices mathématiques précis. Ce sont des <u>analyses de tâches</u>, faites sur des énoncés précis, avec le repérage et les adaptations des connaissances mathématiques à mettre en fonctionnement – ces dernières sont rappelées dans une forme actualisée en annexe 1, en relation avec les activités correspondantes des élèves. Un rapide examen de certains exercices proposés dans des évaluations APM permet une mise en fonctionnement différente des outils présentés.

Ces premières analyses sont suivies de la présentation de ce que nous appelons le <u>relief</u> sur les mathématiques à enseigner, avec les conséquences sur les activités à proposer. Transposition didactique et <u>différents types de notion</u> rencontrés dans le secondaire sont ainsi décrits, par exemple, en relation avec les programmes, et avec les conséquences sur les choix d'introduction. Ce sont les proximités entre nouvelles et anciennes notions qui sont étudiées pour établir le type d'une notion à enseigner à un moment donné. Certaines notions peuvent ainsi être amenées comme des extensions de notions déjà étudiées[38], d'autres comme réponses à des problèmes que les élèves peuvent se poser mais non résoudre (RAP), pour d'autres enfin il y a besoin d'un nouveau formalisme qui permet d'unifier et de généraliser des notions antérieures (FUG) et on ne trouve alors pas de situation d'introduction adaptée. Le relief sur

[38] Avec ou sans « accident », c'est à dire pièges liés à certaines ruptures

une notion à enseigner correspond au niveau de conceptualisation attendu, complété par les difficultés des élèves, les caractéristiques mathématiques de la notion et les programmes. Des exemples de relief et de scénarios (choix de contenus, cours, exercices, évaluations) sont donnés plus loin dans la même partie, au chapitre 4.

L'insuffisance des seules analyses de tâche pour avoir accès aux activités possibles des élèves est soulignée et introduit la suite (deuxième chapitre de la partie II).

***Analyses de déroulements en classe, à partir d'extraits de vidéo sur le site des presses***

Chaque extrait est présenté de la même manière – reprenant exactement ce qui est fait en formation. Après une brève présentation du contexte, l'analyse des tâches de l'exercice dont la recherche en classe est filmée est d'abord demandée aux participants en formation, et donc présentée au lecteur, précédant toujours le visionnement. La chronologie de la séance est indiquée, pour situer l'extrait dans l'exercice. Après visionnement (possible sur un ordinateur pour le lecteur), l'analyse du déroulement est exposée, pilotée par la comparaison entre les activités attendues des élèves, prévues par l'analyse de tâche, et les activités possibles des élèves, reconstituées à partir de ce qui se passe. Le travail de l'enseignant est ainsi décodé à partir des activités attendues des élèves. Sont pris en compte (dégagés et repris à la fin du chapitre) des éléments sur le travail des élèves et sur les interventions des enseignants. Ce peuvent être, par exemple, la forme et la nature du travail, les types d'aides (à fonction procédurale ou constructive[39]), les moyens que se donne l'enseignant de repérer ce que font les élèves, de l'exploiter… . Pour le dire vite, on essaye de caractériser, un peu comme s'il s'agissait d'un curseur à repérer, *les manières dont l'enseignant joue à la fois sur l'autonomie des élèves et sur les aides qu'il dispense sur une tâche spécifiée.*
Là encore l'insuffisance de ce point de vue très local sur les activités des élèves est soulignée dans le livre et introduit la suite.

***Analyse de pratiques***

Les principales idées de la double approche des pratiques, didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002 ; Masselot & Robert, 2007) sont données, même si le vocabulaire précis correspondant est peu utilisé (cf. annexe 2). Les analyses de 4 extraits de vidéo préparent dans une certaine mesure ce chapitre, qui, comme les suivants, ressemble cependant davantage à un exposé que les précédents. L'insuffisance des analyses didactiques sur les liens entre pratiques enseignantes et apprentissages des élèves, ainsi que la nécessité, ergonomique, correspondante de tenir compte du métier sont ainsi développées. Cela met en scène la prise en compte imbriquée de ce qui est analysé en classe et des contraintes institutionnelles et sociales, ainsi que des personnalités (composantes des pratiques et niveaux d'organisation, cf. annexe 2). Quelques résultats utiles à la conception de formations sont indiqués, notamment la complexité des pratiques et ses implications, leur cohérence individuelle, la stabilité de la composante médiative (choix de gestion) des enseignants expérimentés (Robert, 2007 ; Robert, 2010 ; Roditi, 2005), résultat très important pour l'élaboration des formations continues, ou encore la surcharge locale des débutants, source de difficultés des formations initiales. Pour préciser un peu ce qui peut se jouer à ce propos, les enrichissements proposés aux enseignants expérimentés portant sur les déroulements, et même s'ils sont justifiés par les contenus correspondants, peuvent s'avérer contraires à des habitudes individuelles stables, fondements d'un équilibre professionnel qui a fait ses preuves. D'une certaine manière la stabilité de gestion, renforcée par la cohérence personnelle et la renforçant au fil des temps, et

[39] Aides qui abordent directement ou indirectement les procédures à utiliser ou aides qui s'appuient sur ce qu'ont fait les élèves pour confirmer, généraliser…

souvent partagée dans un groupe professionnel, peut jouer comme appui pour l'enseignant, qui y puise des ressources pour toutes les situations, mais elle peut aussi devenir un obstacle au renouvellement, car elle engendre des activités enseignantes qui subsistent alors même que les contraintes évoluent. Elle peut aussi renforcer certaines « naturalisations » (Lenfant, 2002) dans la manière d'interpréter les productions des élèves, laissant échapper des difficultés peu transparentes, non recherchées. Ces habitudes peuvent amener des explications incomplètes, qui laissent de côté des interrogations cachées, mal exprimées, voire engendrer des simplifications qui rendent dans un premier temps le travail des élèves plus facile mais qui empêchent des développements plus tard. Les débutants, de leur côté, ne disposent ni d'un projet global construit sur les mathématiques à enseigner compte tenu des élèves, ni d'automatismes de gestion, installés chez leurs aînés, qui pourraient les soulager pour se consacrer pendant la classe aux improvisations collectives qui s'avèrent nécessaires. De ce fait ils sont peu réceptifs en formation à des interventions dépassant trop leurs besoins ressentis et la marge devient étroite entre la donnée de « recettes », très demandées, même si cela n'existe pas, et la transmission d'outils à adapter, plus « recyclables » mais d'usage moins immédiat.

***Eléments sur les formations***

Un dernier chapitre de cette partie II est consacré à la présentation d'un certain nombre de parti-pris, inspirés d'hypothèses théoriques, sur le développement et l'enrichissement des pratiques, qui président à la conception et à la mise en place à la fois de la formation de formateurs et des formations professionnelles « visées »[40]. On y reviendra plus loin.

En annexe de ce chapitre on présente une discussion sur l'utilisation de vidéos en formation, en en dégageant des variables, durées, choix des vidéos (thèmes et auteurs), différences d'utilisation suivant public - débutants/expérimentés, liens avec autres formations… Cependant cela reste limité. On reprend aussi ce qui est fait en formation de formateurs sur la lecture critique d'articles tirés de la littérature professionnelle, inspirée de l'exercice correspondant en recherche, même si, encore une fois, les objectifs sont différents : l'exhaustivité sur un sujet n'est pas visée, il s'agit davantage de faire travailler des outils un peu systématiques pour apprécier un texte, son statut, sa portée, ses limites, en référence à des formations.

## Un essai de description du travail de l'enseignant, pour et en classe (entre activités et pratiques) – comment amorcer un enrichissement de la palette des possibles en formation, pour l'enseignant et le formateur ?

Le travail de l'enseignant présente un certain nombre de caractères spécifiques, dont la description peut éclairer les ressentis et la manière d'aborder les besoins supposés par le formateur, dans les analyses d'activités des enseignants, que ce soit en formation d'enseignants ou en formation de formateurs.

Ce travail enseignant se déroule en plusieurs phases en partie indépendantes, en partie liées, effectuées à des moments différents et dans des lieux différents : la préparation, qui ne dépend *a prio*ri que des contenus et des apprentissages visés, est conditionnée aussi par une certaine anticipation, dès que l'enseignant connait ses classes et les potentialités qu'il leur suppose. Mais, quoi qu'il en soit, les déroulements sont toujours l'occasion d'improvisations à partir de ce qui a été prévu. En formation cela amène à garder le plus possible dans les analyses proposées, par exemple de vidéos, l'imbrication entre les tâches et les déroulements, en tenant

[40] Qui restent partielles, en relation explicite avec les aspects professionnels.

compte des situations précises. Autrement dit, les appréciations travaillées mettent en jeu ce que l'enseignant organise compte tenu de ce qui est attendu, et pas « dans l'absolu ». Ou encore, en reprenant les analyses de pratiques en termes de composantes (annexe), le travail sur les vidéos met en jeu à la fois ce qu'on peut percevoir des composantes cognitives et médiatives, en faisant intervenir les composantes institutionnelle, voire sociale, qui expliquent et pondèrent les choix de contenus et de gestion.

Le travail avec les élèves a plusieurs objectifs là encore en partie indépendants, en partie liés, puisqu'il s'agit d'installer une classe « qui tourne », d'obtenir une réussite suffisante des élèves et de provoquer les apprentissages visés – trois objectifs qui ne découlent pas directement l'un de l'autre, même si, pour prendre un exemple banal, dans une classe qui ne tourne pas bien il est plus difficile de garantir le réussite des élèves et encore moins leur apprentissage que dans une classe qui tourne. Cela renforce la nécessité en formation de tenir compte du métier dans les déroulements et à apprécier certains choix comme réponses à des impératifs liés à autre chose qu'aux seuls apprentissages. Par exemple, de manière simpliste, les choix des tâches des évaluations et les barèmes correspondant peuvent être associés à des nécessités de donner des signes de réussite aux élèves ou le contraire, selon qu'on a une classe découragée ou trop « relâchée ». Cette fonction des évaluations comme moyen de négociation, par- delà ses fonctions diagnostiques, a été soulignée par Chevallard (2004).

Ce travail de l'enseignant a des aspects très individuels, en classe notamment, mais il relève, de manière plus ou moins diffuse, du collectif, par l'intermédiaire des contrôles communs, des conseils de classe … Il est libre dans la mesure où les enseignants ont de vrais choix mais contraint par les programmes, les horaires, les caractéristiques des classes et des établissements. Autrement dit il est indispensable d'introduire, dès les premières analyses, les diversités liées aux composantes personnelles, tout en faisant réfléchir et en mettant en lumière, au fur et à mesure des situations étudiées et du travail sur les alternatives, les contraintes et les marges de manœuvre.

Inévaluable directement, il met aussi en jeu des éléments à l'insu des enseignants, positifs ou négatifs, liés à des affects, voire à des phénomènes de transferts comme le développe C. Blanchard-Laville (2009). Là encore cela permet d'introduire la discussion sur les diversités des composantes et des choix, sur l'impossibilité de juger compte tenu des paramètres individuels en jeu (élèves, classe, professeur), du temps, long ignoré dans ces analyses, et de tout ce à quoi on n'a pas accès[41]. Cela permet aussi de dégager l'intérêt du travail local sur les pratiques, pour accéder à de véritables variables du travail enseignant – par-delà les diversités et même les régularités.

Finalement il est bien difficile de déterminer exactement ce qui dépend de l'enseignant dans les apprentissages – entre temps court et temps long, marges de manœuvre réelles investies ou non et contraintes incontournables ou non… Chercheurs, formateurs, enseignants font des paris à partir de choix sur un certain nombre de variables qui sont listées dans l'ouvrage en annexe 2 du chapitre 3. Le processus engagés en formation a pour objectif de faire dégager ces variables en situation, en permettant une certaine mise à distance des choix, enrichissant la réflexion par la prise de conscience et la possibilité d'expliciter un peu davantage les paris. C'est dans cet esprit que sont présentés en annexe 1 du chapitre 3 de la partie II des éléments sur le travail autonome des élèves en classe, en petits groupes ou non : on en discute, comme cela peut être initié en formation, des avantages et des inconvénients en évoquant quelques arguments théoriques.

[41] Le travail envisagé porte sur des éléments conscients, ou accessibles à la conscience, ce qui en constitue une limite certaine.

## II. UN PREMIER POINT DE VUE DE CHERCHEURE EN « AMONT » DU LIVRE

### Eléments de transposition

Nous dégageons ici globalement les éléments de transposition des recherches à l'origine de la formation de formateurs – autrement dit ce que nous retenons de nos analyses didactiques à la fois pour concevoir la formation et pour la mettre en œuvre, justifiant ainsi ce qui précède. Notons que l'origine de nos recherches sur les pratiques (avec le constat d'un manque de transférabilité des ingénieries didactiques dans les pratiques ordinaires) a sans doute quelque chose à voir avec le fait qu'on peut en tirer des conséquences pour la formation...Cependant il est important de souligner que les éléments empruntés directement aux recherches et présentés ou travaillés en formation ne sont jamais utilisés comme en recherche parce que les objectifs poursuivis sont différents, même s'il s'agit souvent d'analyses en formation, toujours plus limitées. Par exemple les analyses de vidéos en formation sont très différentes de celles qui sont faites pour des recherches précises (Robert & Vivier, 2013). Enfin les aspects développés ci-dessous séparément sont imbriqués de manière majeure.

***Les activités des élèves « au centre » entre pratiques enseignantes et apprentissages***

Elles constituent l'entrée choisie pour travailler les pratiques des enseignants sur lesquelles on veut agir et sont centrales pour élaborer les formations. Ces activités des élèves, notamment celles qui sont provoquées par les enseignants en classe, sont en effet considérées comme le résultat des choix des enseignants[42], en termes de contenus, globaux et locaux, et de déroulements – et sont pensées dans leur contribution à la conceptualisation visée (cf. annexe) – enjeu final pour les enseignements (notre référence des apprentissages). Sont ensuite en jeu plus globalement l'élaboration de scénarios cohérents et les mises en œuvre en classe « robustes » et adaptées compte tenu des contextes (garantissant une proximité suffisante entre effectif et prévu). Autrement dit, un premier objectif des formations visées concerne l'accès (sous forme d'analyse) aux manières dont les enseignants mènent les activités de leurs élèves en classe et cela met en jeu les choix locaux et globaux de tâches (scénarios) et les déroulements et leurs analyses, mais pas dans l'absolu, compte tenu explicitement des contraintes diverses[43]. C'est évidemment directement lié à la double approche au sein de la théorie de l'activité (Rogalski, 2013). En effet c'est cette référence qui légitime le fait de chercher cet accès-là aux pratiques en classe, par les activités possibles des élèves et la pondération due aux contraintes à prendre en compte, et qui en donne des moyens : descriptions didactiques de ces activités des élèves et des pratiques, décodées à partir de ces dernières, en termes de composantes et de niveaux d'organisation (que le vocabulaire ou seulement l'idée des contraintes et niveaux soient introduits). Il y a là une hypothèse issue des recherches et admise sur ce qui est visé par les formations travaillées et sur les outils à faire partager.

Par exemple, dans le livre, les analyses d'activités des élèves donnent lieu très rapidement, après l'introduction d'analyses de tâche liées à des énoncés, à des analyses d'extraits de vidéos où le contexte est pris en compte et discuté. Il y a là un apport d'outils, supposés accessibles aux enseignants expérimentés concernés, justifié au fur et à mesure du premier temps de la formation. Mais ce qui ne peut pas apparaitre explicitement dans le livre, c'est tout le bénéfice tiré du deuxième temps, où, comme dans une sorte de TP « après le cours »,

[42] Même si cela reste partiel.

[43] Ces activités sont décrites en relation avec les mises en fonctionnement des connaissances provoquées par les déroulements, compte tenu des tâches – il y a là une différence avec les travaux correspondants pour le premier degré où les activités des enseignants sont référés à la TSD mettant en jeu tâches et milieu, contrat, dévolution, synthèse, institutionnalisation, régulations...

ce sont les participants qui présentent et font discuter un extrait de vidéo tourné dans une de leurs classes[44]...

### *Une intelligibilité des pratiques issue de la double approche*

Une autre hypothèse admise, sur ce qui est à former cette fois, est directement liée à la double approche : c'est le fait que les pratiques étant complexes, on ne peut pas les former sans le prendre en compte (Robert, 2001). Autrement dit on ne peut pas faire l'impasse sur les contraintes institutionnelles, sociales, personnelles et sur l'imbrication des niveaux global (projet), local (quotidien) et micro (automatismes) lorsqu'on travaille sur ces activités d'élèves qui sont au centre de l'activité des enseignants.

### *Partir des pratiques des enseignants en classe, décodées à partir des activités des élèves, pour former des pratiques*

Ce principe, qui concerne les modalités des formations, est tout aussi central - on ne part pas de connaissances (mathématiques, didactiques, pédagogiques…) ni des programmes – on essaie de questionner collectivement ce qui se passe précisément en classe en terme de pratiques enseignantes (sur un petit bout), à un moment donné, comme un tout[45], de mutualiser des prises de conscience, de débusquer des naturalisations, de rechercher des alternatives, et de « remonter » ensuite, avec le formateur, aux contraintes institutionnelles et sociales, au scénario, au relief sur les notions, au personnel (marges). Cela a comme conséquence l'élaboration de formations professionnelles dites « à l'envers », qui ne partent pas directement des thèmes visés[46] mais d'analyses de pratiques en classe et qui reviennent ensuite aux questions plus globales que se posent les enseignants pour leurs préparations notamment. Autrement dit un deuxième objectif des formations visées, et cela concerne davantage la formation de formateurs, est de réussir à mettre en place des modalités particulières adaptées pouvant influencer les pratiques, hors jugement, liées à des questionnements locaux et à des enrichissements possibles. Ce point de départ est décliné en termes d'analyses d'extraits de vidéos dans le livre, d'abord « externes », apportées par le formateur, puis sur des extraits tournés dans les classes des participants, mais peut évidemment prendre d'autres formes – une amorce par une comparaison entre des résultats d'élèves à des évaluations nationales standardisées sur un domaine précis et des évaluations sur des items analogues des élèves des classes concernées a été développé par Chesné (thèse à venir).

### *Besoins ressentis, besoins supposés par les formateurs – à rapprocher (ZPDP)*

Le principe précédent, avec le dispositif adopté, a comme ambition de permettre en séance de formation l'émergence de besoins ressentis ou pouvant être ressentis sur les pratiques, exprimés collectivement par les participants. Le travail mené alors par le formateur, à partir de ce qui est « sorti »[47], est de « rapprocher » ces ressentis des besoins supposés par lui, présentés sous forme d'une palette de pratiques possibles. L'hypothèse majeure est ainsi d'essayer de travailler les pratiques dans une Zone Proximale de Développement des Pratiques, ZPDP, s'inspirant de ce qu'en dit Vygotski pour le développement des connaissances mais en décalant aux pratiques. C'est cette proximité créée par les questionnements collectifs, les diversités exprimées et l'explicitation de leurs liens avec les

[44] Il y a là des variables à apporter selon les publics visés en formation, qu'il y ait installation de pratiques pour les débutants ou développement pour les enseignants expérimentés..

[45] Caractère holistique de la formation

[46] Mathématiques ou autres

[47] Caractère inductif de la formation

situations étudiées qui rendrait ce travail propice à une appropriation individuelle ultérieure portant sur les pratiques. Il y a évidemment des modalités particulières à mettre en place pour ce faire, pour en plus trouver une ZPDP « moyenne »[48]. Et là le formateur a un rôle majeur (d'où la nécessité que nous suggérons de leur formation) !

***Utiliser les recherches déjà faites pour inférer les besoins ressentis et supposés en séances de formation***

Les recherches sur les pratiques inspirées de la double approche, appuyées sur les recherches didactiques antérieures, sont « par nature » propices à l'étude des pratiques en classe. Elles peuvent en effet être transposées à des séances de classe isolées pour faire émerger et repérer les besoins ressentis, dans la mesure où à la fois les déroulements et ce qu'ils présupposent et la complexité du métier y sont pris en compte explicitement, à partir des activités des élèves justement. On conçoit l'importance dans une formation de formateurs de les outiller pour qu'ils puissent avoir un accès critique à des recherches, sans s'y perdre.

C'est aussi à partir de notre appréciation de ce qu'est le travail de l'enseignant pour et en classe, des hypothèses générales sur les apprentissages que nous adoptons (présentées dans la partie III, chapitre 3)[49], notamment en référence aux théories de Piaget et de Vygostki adoptées aux mathématiques et aux situations scolaires, et de travaux didactiques déjà effectués que sont élaborés les besoins supposés par les formateurs pour les enseignants sur chaque contenu à enseigner. Ces besoins supposés sont conçus en termes de palettes de possibles, en relation avec les recherches sur le relief et les scénarios sur une notion donnée.

***Retour théorique sur le rôle du formateur***

Les formateurs doivent être de notre point de vue davantage que de très bons enseignants expérimentés[50]. Certes leur expérience[51] leur permet de partager l'outillage dont nous supposons qu'il est très utile à former les enseignants. Par exemple ils adoptent facilement la posture d'enseignants dans les analyses de vidéos et peuvent adhérer à l'exercice attendu d'analyse sans jugement, même si cela peut être difficile au début de se détacher de leurs critères propres d'appréciation, voire même d'analyser séparément les activités attendues et les déroulements pour mieux en percevoir les relations. Tout se passe comme si leur stabilité personnelle jouait comme un élément leur donnant suffisamment d'assurance pour dépasser leur point de vue individuel et intégrer d'autres points de vue, grâce aux analyses précises proposées. Mais pouvoir se décentrer de son expérience est un réquisit pour le travail attendu en formation, avec l'aide du vocabulaire professionnel introduit, partagé et à faire partager. Cela dit la connaissance profonde du milieu enseignant permet aussi à ces formateurs enseignants expérimentés et « outillés », sans doute mieux qu'à quiconque, de détecter les besoins ressentis et d'être suffisamment proches des enseignants[52] pour travailler sur leurs pratiques, et pas seulement sur des listes d'exercices par exemple. Mais c'est la formation qui les outille davantage, qui leur donne des clefs à la fois pour mettre en mots les besoins, pour profiter de la littérature professionnelle et pour élaborer des scénarios « à l'envers » (Abboud-Blanchard & Robert, 2013). Ces « mots pour le dire », dont certains sont hérités des recherches, constituent un vocabulaire professionnel précis, petit à petit partagé, qui participe y compris à l'évolution des pratiques par les analyses qu'il facilite et leur discussion (un peu comme des pseudo-concepts (Vygotski)).

[48] Partagée par beaucoup de participants…
[49] Cf. travaux de Piaget et de Vygotski, pp. 258-260.
[50] Critère principal retenu par l'inspection…
[51] Dans le master pro, il est nécessaire d'avoir au moins 5 ans d'expérience pour être inscrit.
[52] Il y a le fondement de la différence avec les positions de Clot – cette proximité n'est pas suffisante à nos yeux.

Pour conclure ce premier regard, il nous semble important de souligner qu'à nos yeux, il y a des différences incontournables entre l'utilisation des outils ou les analyses de vidéos en recherches et en formation (Robert & Vivier, 2013) tout comme il y a des différences incontournables entre enseignement des mathématiques et formation. Ce livre a comme ambition d'apporter quelque clarté à ce sujet …

## Limites et questions *a priori*

La question des lecteurs potentiels du livre sera abordée plus loin (limite à sa diffusion).
Les formations visées ne sont qu'une partie des formations possibles, et les liens entre diverses composantes pouvant intervenir en formation ne sont pas abordés.
Que ce soit dans nos recherches ou pour les formations, il faut souligner que les activités des élèves sont en partie inaccessibles : on n'a accès qu'aux activités possibles, pas effectives, et qui plus est, dans les dispositifs mis en place, pas pour chaque élève. D'ailleurs on ne voit pas les (différents) élèves sur les vidéos – c'est dû à des exigences déontologiques mais pas seulement : le grain de nos analyses ne nous permettrait pas d'intégrer ce type de données. Il y a évidemment là une limite objective du travail engagé, qui amène à cette restriction aux activités possibles. Des compléments doivent être apportés si on veut aborder les différenciations par exemple. Enfin les extraits mis sur le site sont courts, trop courts sans doute, souvent du fait de la restriction imposée par l'interdiction de faire voir les élèves – et, qui plus est, le fait que ces extraits soient sur un site contraignent les lecteurs à utiliser à la fois le livre et internet, ce qui est aussi restrictif !
D'autres éléments interviennent dans les apprentissages, sociaux, affectifs, …, qui sont pris ici comme des paramètres (et presque pas comme des variables), même si le chapitre 2 de la partie III permet au lecteur de réfléchir à l'enseignement en ZEP. De même, non seulement on n'aborde pas les connaissances mathématiques des enseignants, mais encore on n'aborde que des aspects rationnels, conscients de l'enseignement.
Des questions se posent sur les formations décrites dans le livre : par-delà l'amorce à laquelle on fait très attention, comment les pratiques « bougent », quelle robustesse présentent nos scénarios, comment le savoir ?
Plus généralement, sur les évaluations des formations, peu d'éléments sont apportés, si ce n'est l'insistance de la difficulté de l'entreprise, mettant en jeu un quadruple chantier imbriquant la qualité de la formation, celle des formateurs, celle des pratiques des formés et celle des apprentissages de leurs élèves… D'autres questions se posent en amont, car il existe d'autres conceptions des formations, liées à d'autres analyses de pratiques et à d'autres choix.

Les différences entre les formations de formateurs, d'enseignants, initiales, continues … ne sont pas suffisamment travaillées. Certes un certain nombre de variables sont esquissées en relation avec le public concerné et les vidéos notamment, mais il reste encore beaucoup d'éléments à mettre en question et en relation. Les éléments développés plus haut sur les débutants et les enseignants expérimentés peuvent donner des idées initiales – partager peu d'outils avec les débutants, ne pas viser tout de suite les projets globaux[53]… La question pourrait être de déterminer par quoi remplacer l'appui sur l'expérience en classe pour les débutants. Dans la littérature (Crahay, Wanlin, Issaieva, & Laduron, 2010 ; Boraita & Crahay, 2013) on trouve beaucoup d'articles sur les croyances des futurs enseignants et leur changement, comme visée des formations – cela reste sans doute insuffisant mais pourrait constituer un des éléments sur lesquels s'appuyer, au début, enrichi dès que des stages sont effectués par ce qui est en germe dans les premières pratiques.

[53] Cela rentre en contradiction avec un certain nombre d'analyses d'autres didacticiens.

Autre question : qui sont, ou peuvent être les formateurs ? La question n'est même pas posée dans le livre, mise à part l'exigence pour les participants d'avoir 5 ans d'ancienneté au moins. Le livre ne présente qu'une partie de leur formation, en amont de leurs pratiques de formateurs, et cela restera le cas au terme des deux années prévues. Certes un séminaire post-master-pro est organisé, avec 3 ou 4 séances annuelles, pour qu'ils puissent se retrouver et discuter de nouvelles questions, notamment avec des chercheurs mais leur formation reste limitée à l'amont de leur activité de formateur. De plus leur position peut être difficile, entre l'enclume et le marteau, ils peuvent avoir par exemple à développer des injonctions ministérielles qui n'ont pas leur assentiment personnel…

Enfin les éléments explicitement liés aux conceptions et rapports au savoir des participants et à leurs connaissances mathématiques sont laissés volontairement implicites. Mais ils apparaissent dans les discussions et c'est par l'intermédiaire des activités des élèves et des hypothèses correspondantes sur les apprentissages qu'ils peuvent être atteints. Il y a là une limite certaine de ce type de formations, ce qui nous amène à insister sur leur caractère partiel. Par exemple les formations de formateurs ne se limitent pas à ce qui est présenté dans le livre, elles sont complétées comme indiqué en note 3.

## Une question entre didactique et didactique professionnelle : quel est le rôle de l'analyse des pratiques dans la formation de formateurs et des enseignants ? Retour sur le travail de formateur et son importance dans notre point de vue.

Le rôle de l'analyse de l'activité des enseignants dans leur formation et dans celle de leurs formateurs à partir de visionnements de vidéos tournées en classe est pluriel. La réponse à cette question peut être l'occasion de revenir d'un point de vue proche de la didactique professionnelle (Pastré, 2011) sur le rôle du formateur et l'intérêt que nous défendons de leur formation.

Le formateur donne accès à un questionnement, outillé, plus ou moins systématique, à l'échelle du travail en classe sur un exercice, sur les relations entre les activités possibles des élèves et les choix (locaux) des enseignants en matière de tâches et de déroulements correspondants aux tâches. La mise en place de ce questionnement, en partie nouveau pour les participants, fait partie intégrante des analyses et a un grand rôle, et, comme il porte sur des éléments des pratiques proches de chaque enseignant, il nous semble adoptable, même s'il faut du temps. Encore faut-il que ce questionnement ait ses raisons d'être, soit accessible, et puisse enrichir les pratiques ou les formations, ce qui passe dans notre vision, par l'enrichissement des activités des élèves. De fait la donnée de l'accès au questionnement et son ampleur sont des variables à adapter au public.

De ce fait, en formation de formateurs le questionnement partagé est systématique, introduit assez rapidement (deux mois, au début, toujours à partir d'exemples) et sera justifié au fur et à mesure de l'année en référence à la théorie de l'activité.

Les outils du questionnement sont les moyens d'analyser les tâches, en termes de repérages des connaissances à utiliser et de caractérisation des mises en fonctionnement attendues et d'analyser les déroulements. Cela met en jeu "tout" ce qui peut influencer les activités des élèves en provenance de l'enseignant (du moins consciemment), ces activités des élèves qui constituent de fait le pivot des analyses de l'activité des enseignants en classe, même si d'autres déterminants jouent dans les choix.

Les analyses de vidéo se font collectivement (même s'il y a un présentateur) en comparant les analyses des activités attendues (faites avant) et les activités possibles. Leur rôle est de faire utiliser le questionnement précédent pour dégager ces comparaisons et ensuite de faire réfléchir en termes d'alternatives. Inévitablement il y a des réponses variées, voire des non-réponses qui interrogent, et plus généralement des prises de conscience des diversités (là où elles n'étaient pas toujours perçues), des naturalisations (peut-être ignorées), voire des prises de conscience de certains caractères partiels des choix habituels (pas d'activités a minima sur certaines sous-tâches par exemple) ou même de certains manques (le professeur ne se tait jamais par exemple).

Ces prises de conscience ne sont pas trop "douloureuses" car il n'y a aucun jugement dans la démarche adoptée et un intérêt majeur pour le questionnement, encore une fois proches des (besoins) ressentis[54]. Tout cela crée une ouverture, associée à une ZPDP. Le formateur s'appuie sur cette ouverture associée aux prises de conscience et aux questionnements pour éventuellement formaliser des besoins ressentis un peu nouveaux, et les rapprocher des besoins qu'il suppose, en enrichissant la palette des possibles, localement d'abord, sur les tâches analysées, en reprenant les alternatives déjà évoquées par exemple, puis, inévitablement encore, plus globalement. Mais pour le coup il n'y a pas d'élargissement (on appelle ça "remontée") qui suive un modèle systématique. C'est une des raisons qui nous conduit à dire qu'il faut former les formateurs : une grande disponibilité de leur écoute et de leurs réponses est en jeu. Il y a lieu de s'adapter à "ce qui est sorti" pour passer d'une tâche à plusieurs, voire au scénario, voire aux programmes, voire au relief, ou d'un déroulement aux contraintes sociales ou personnelles etc.

Enfin, pour les formateurs il s'ajoute un travail sur les pratiques des enseignants et leur formation : d'abord à partir d'analyses de vidéos bien choisies puis plus "magistralement", on dégage la complexité, la cohérence, et certains résultats comme la stabilité de la composante médiative chez les expérimentés (même si le mot n'est pas utilisé), la surcharge du local chez les débutants... Côté formations ce ne sont pas des analyses de l'activité de l'enseignant qui justifient ce qu'on apporte mais des hypothèses sur le développement des pratiques (cf. ZPDP). On justifie ainsi les formations à partir de vidéos. Un travail sur la littérature professionnelle est aussi nécessaire, notamment pour s’habituer à l’exercice de la critique de ces articles et aussi pour savoir y trouver des compléments sur le relief notamment. La présentation par chaque participant d’un extrait de vidéo tournée dans une de ses classes et l'élaboration en petits groupes d'un scénario de formation virtuel jouent le rôle de mises en application de ce qui a été travaillé.

## Autres points de vue sur les pratiques en relation avec les formations et sur les formations de formateurs

Cela dit il y a d’autres choix possibles que ce soit pour les formations d’enseignants ou de formateurs, dont le rôle n’est d’ailleurs pas toujours mis en avant comme dans notre conception. Souvent liés à des analyses en amont des pratiques des enseignants, voire des apprentissages des élèves. Nous esquissons quelques-uns de ces points de vue, indistinctement liés au premier degré, aux formations initiales ou continues ou aux formations de formateurs. Peu de ces références font une place à part à la formation de formateurs, ce qui ne veut pas dire qu’il n’y en ait pas, dans les faits, cela signale seulement vraisemblablement un manque de spécificité théorisé. L’exhaustivité n’est évidemment pas dans nos possibilités – de plus nous ne pourrons qu’esquisser des différences avec nos propres choix sans pouvoir dégager des avantages ou des inconvénients des diverses démarches, fautes d’évaluation (cf.ci-dessus).

[54] Par exemple les mots « il faut » ou « il faudrait » sont exclus des commentaires …

***Dans le premier degré, à partir de la double approche***

Il y a d'abord un certain nombre de travaux menés dans le premier degré, à partir de la théorie de la double approche, proches des nôtres mais un peu différents (Charles-Pézard, Butlen & Masselot, 2012). Les chercheurs ont davantage étudiés les niveaux micro et locaux d'organisation des pratiques, en dégageant des gestes et routines développés par les enseignants et associés à des choix différents de gestion et de contenus. Ils ont aussi différencié les niveaux globaux en mettant en évidence différentes tensions (contradictions) et en y associant des choix spécifiques : entre logiques d'apprentissage et de socialisation, réussite immédiate et apprentissage etc… Enfin les formations qu'ils ont particulièrement étudiées s'adressent à des enseignants débutants nommés en ZEP – ce sont des accompagnements, à la fois dans les classes respectives et collectives, selon les moments de l'année (correspond à trois types de situations de formation). Leurs analyses les amènent à distinguer des niveaux de développement, de plus en plus difficiles à atteindre : garantir une certaine paix scolaire, exercer une vigilance didactique, réussir la dévolution des consignes, mener la synthèse des productions d'élèves, institutionnaliser en s'appuyant sur cette synthèse.

***Différentes conceptions des analyses et du développement des pratiques***

Toute une série de recherches anglo-saxonnes sur les pratiques se réfère aux travaux de Schön puis de Shulman (1986) (qui n'ont pas travaillé spécifiquement sur les mathématiques). Des chercheurs comme Ball & Forzani (2009) ont repris ces travaux et les ont adaptés aux mathématiques. La reconnaissance de l'importance de la réflexivité dans la réflexion professionnelle, associée à la reconnaissance de l'intérêt de prendre en compte la profession et la catégorisation des connaissances professionnelles en connaissances spécifiquement liées aux contenus, aux contenus enseignés, à la pédagogie, ou à la pédagogie sur des contenus particuliers ont amené à ces PCK et autres qui servent de fondements à certaines formations. Cependant, de notre point de vue, cela peut s'appliquer à préciser les composantes personnelles, mais cela ne suffit pas à aborder les pratiques elles-mêmes.

D'autres chercheurs, notamment didacticiens des mathématiques, préconisent de partir d'un enseignement de didactique formalisé (comme Chevallard, 2006 à partir de la TAD par exemple) – c'est un abord plus complexe que le précédent mais dont nous discutons la possibilité de mise en place. Tout se passe comme si on voulait faciliter une certaine rupture souhaitée dans les pratiques professionnelles, jugées inadéquates dans leur ensemble[55], en donnant dès l'entrée dans le métier des ressources différentes, théoriques, liées essentiellement aux contenus à enseigner. Cela pose deux questions par rapport à notre position : l'intégration de ces enseignants dans leur établissement, on est loin des ZPDP…, et la prise en compte du métier, que nous jugeons indispensable au même titre que le reste, et qui est considérée dans ces approches comme seconde …

Faire « vivre » aux participants ce qu'on voudrait qu'ils fassent vivre à leurs élèves avec une double institutionnalisation (homologie et transposition) a longtemps été choisi comme entrée dans les formations de débutants (Bloch, 2005 ; Margolinas & Rivière, 2005). Ce qui nous questionne ici c'est la posture adoptée en formation – plus étudiante que professionnelle, on est loin des proximités que nous recherchons.

Signalons un séminaire organisé à l'IFE (Former les enseignants en sciences physiques et en

[55] Il ne s'agit pas de stigmatiser les enseignants individuellement bien entendu. On pourrait plutôt évoquer un modèle de révolution culturelle pacifique.

mathématiques, janvier 2010) comportant des séances sur les questionnements sur les formations et sur un premier bilan d'un certain nombre d'expériences existantes (les nôtres ne sont pas présentes). Les questions de transfert entre ce qui est travaillé en formation et les pratiques en classe sont très présentes sous diverses formes ainsi que les questions un peu théoriques. Un récent livre canadien sur les formations d'enseignants (premier et second degré) (Proulx & Gattuso, 2010) tente de dégager des tendances et perspectives actuelles dans le pays : beaucoup d'articles sur le second degré abordent surtout les connaissances mathématiques dont devraient disposer les enseignants et les modalités du travail à organiser pour les rapprocher des mathématiques à enseigner, tant sur les contenus que sur les manières de travailler.

Certains auteurs, pas spécifiquement matheux, développent des stratégies de développement professionnel liées à l'auto-confrontation ou à la méthode du sosie, inspirées de la clinique de l'activité telle que Clot (2001) la développe. Cela a été repris par Clot et Ruelland-Roger (2009) pour les enseignants. Il nous semble que ces travaux ne donnent pas la même importance que nous aux contenus enseignés et à leur prise en compte dans l'activité des enseignants. Tout se passe comme si ils suivaient une « hiérarchie » différente de la nôtre dans ce qui peut provoquer prise de conscience et enrichissement des pratiques, donnant plus d'importance à un accès direct à la composante personnelle là où nous essayons d'investir les composantes cognitives et médiatives comme intermédiaires.

***Sur la formation des formateurs***

Le livre de Altet, Paquay & Perrenoud (2002) présente un point de vue général sur la question. Les auteurs abordent la question de la professionnalisation des formateurs, en émergence. Ils insistent sur les diversités des statuts, des fonctions, des dispositifs. Dépassant la formation d'adultes et l'intervention de l'enseignant expert, quelques autres caractéristiques sont dégagées, qui ne sont pas adoptées par tous les formateurs, comme l'analyse de situations de formation réelles, la réflexivité, les lectures auto-formatrices, les échanges entre formateurs et, très généralement l'accompagnement sous toutes ses formes. Emergent aussi des représentations plus nouvelles de la professionnalité des formateurs, comme le fait de partir des pratiques, dans leur complexité, de ne pas prescrire mais de favoriser des choix, d'aider à construire des compétences et de connecter des savoirs d'action et des savoirs issus des recherches. On constate des convergences certaines avec nos oreintations.

# III. UN DEUXIEME POINT DE VUE DE CHERCHEUR EN « AVAL » DU LIVRE : CRITIQUES, QUESTIONS

## Des manques dans le livre

Le plus dommageable est sans doute le manque d'analyses de moments d'exposition des connaissances ou de corrections sous des formes variées – avec les vidéos correspondantes : en classe les enseignants ne font pas seulement chercher des exercices ! Et le pivot que représentent les activités des élèves dans les analyses présentées doit être remplacé car dans ces moments-là les activités des élèves sont encore plus inaccessibles. Une piste est de répertorier plusieurs types de « cours », institutionnalisations suivant des activités, exposition de nouvelles connaissances suivies d'activités, avec des analyses de contenus mettant en jeu les objets et les cadres et registres de présentation, les outils et exercices résolus devant les élèves, leurs relations. Les déroulements des cours serviraient à traquer les liens entre ces contenus visés et des activités d'élèves (déjà faites ou à venir) et, plus généralement, les proximités que l'enseignant établit ou non entre ce qu'il expose et des pré-activités « simulées » des élèves, les faisant passer d'une simple écoute à quelque chose de plus. C'est ce que nous appelons « proximités-en-acte ». Les questions aux élèves et les questions d'élèves, ainsi que le traitement des réponses est évidemment un élément important à prendre en compte, avec le moment où elles interviennent. Il peut y avoir des proximités d'ordre général, en termes d'animation, ou pouvant contribuer à familiariser les élèves avec le sujet en jouant sur des généralisations ou des exemplifications (notamment par des commentaires méta, des images, des métaphores, des exemples), ou plus précises, servant à leur donner des liens et des points de repères (structuration explicite du cours), à leur indiquer quoi retenir par exemple ou quoi « imiter ». On peut imaginer des proximités plus cognitives, entre ce qui est présenté et ce qu'on suppose être déjà-là ou presque déjà-là chez les élèves, interprété dans une visée constructive. Cette dernière peut se révéler à travers des reprises de formulations de plus en plus symboliques par exemple, et/ou par des explicitations à partir d'éléments de réponses. Une analyse des fonctions du discours, comme celle déjà utilisée pour les analyses d'exercices (Chappet-Paries, 2013), peut être tentée.

On aurait aussi pu attendre la présentation du relief de davantage de notions à enseigner ainsi que des pistes de scénarios sur davantage de thèmes à enseigner. Les questions de modélisation ne sont pas abordées directement alors qu'elles font l'objet d'un certain nombre de formations d'enseignants. Il y a cependant une raison à cela : c'est en deuxième année de master qu'une unité d'enseignement leur est entièrement consacrée.

Par ailleurs on aurait pu également s'attendre à des exemples ou des extraits de séances de formation filmées et à des présentations de scénarios de formation, même virtuels, pour différents publics. Ces derniers sont d'abord des occasions pour les participants de réfléchir à l'ensemble des questions qui se posent pour la conception de tels scénarios, le produit fini n'est pas déterminant, surtout s'il n'est pas expérimenté. Cependant certains scénarios ou extraits de scénarios sont repris dans une brochure publiée par l'IREM.

## Nouvelles questions liées aux évolutions actuelles

Entre outils et objets, la conceptualisation reste-t-elle une référence visée pour les apprentissages, tout particulièrement en ZEP ? Dans quoi s'inscrit, de ce point de vue, ce qui est attendu de la culture numérique tant prônée par l'institution tous azimuts – on peut avoir l'impression que les aspects outils sont privilégiés, au détriment d'aspects globaux du savoir ?

Quels statuts donne-t-on aux savoirs pensés utiles, pensés concrets, déclarés scientifiques ? Par exemple cette fameuse question des élèves « à quoi ça sert » doit-elle être toujours interprétée en termes d'utilité ou plus simplement ne peut-on pas l'associer à une interrogation sur leur compréhension et leur difficulté à faire le lien avec ce qu'ils savent déjà et ce qu'ils imaginent devoir apprendre et utiliser, notamment dans le cas de notions « FUG », éloignées des connaissances antérieures ? Peut-on réduire les questions de motivation, si diverses, dépendant tellement des rapports au savoir des élèves, à des questions de choix de savoirs et de tâches ?
Enfin quel rôle peut-on donner aux formations des enseignants via internet ? Il y a là une vraie interrogation très difficile à aborder et pourtant il y a là un changement dans les pratiques…

## Est-ce une « ressource » ?

Se former seulement en lisant : qu'est-ce qui remplace pour le lecteur les « activités » organisées en formation ? Les vidéos sur le site peuvent-elles jouer en partie ce rôle ? A quelles conditions cela peut devenir une ressource, pour qui, pour quoi (formation, présentation, mise en jeu d'un collectif de professeurs ?). Autrement dit est-ce que cette présentation donne suffisamment accès à une véritable appropriation des analyses proposées et de leurs conséquences sur les pratiques ?

### Paroles de lecteurs, reviews

Nous avons demandé à un certain nombre de collègues ayant lu le livre de nous livrer leur impression de lecteurs. Nos questions ont porté sur le livre comme ressource : pour qui le livre est-il une ressource et laquelle ? Pour des analyses locales (tâches, prises en compte des élèves) ou globales (relief, scénarios…) ? Nous joignons en annexe 3 certains extraits de parole de lecteurs ayant suivi le master pro, les plus faciles à joindre pour nous. Ils confirment le fait que le livre apparait pour eux comme un complément, voire une révision du master… D'autres collègues qui ont lu le livre sans avoir suivi la formation estiment que c'est surtout aux formateurs que sa lecture peut être utile, ce qui renforce les dires précédents.

**Dans nos revues** (*les annales de Strasbourg, le bulletin de l'APM*), on a trouvé des critiques sur le titre (ce fut un choix des éditeurs !), et surtout sur le fait qu'on ne voit pas les élèves sur les vidéos (mais c'est interdit !)… Le fait que ce livre n'est pas destiné à des chercheurs, ni à des enseignants ne se posant pas ce type de questions n'est pas toujours pris en compte et finalement les critiques sont mitigées. Dans *Petit x,* les rédacteurs ont accepté de publier notre point de vue.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au fond implicitement est posée la question des relations entre didactique des mathématiques et enseignants. Ce qui est implicite dans ce qui est exposé, c'est que les recherches en didactique des mathématiques peuvent apporter des éléments utiles aux enseignants. Ce peuvent être des connaissances mathématiques liées aux notions à enseigner et à leur relief pour l'enseignement, ce peuvent être des éléments liés aux représentations métacognitives sur les mathématiques, leur enseignement, leur apprentissage (niveau global, composante personnelle). Ce peuvent être aussi des éléments plus liés la classe, séquences, éléments de gestion. Dans tous les cas, compte tenu de notre conception de la complexité des pratiques, nous postulons que ces éléments sont rarement utilisables directement, et doivent être adaptés, éprouvés par la pratique et alors inscrits dans la cohérence individuelle déjà-là. De plus ils ne sont pas « complets » - ils ne suffisent pas pour une année scolaire d'un niveau donné par exemple. Qui plus est, tout ne sert pas aux enseignants dans les recherches en didactique, il y a un tri à faire, ne serait-ce que du côté des développements méthodologiques qui n'ont pas d'intérêt direct. Enfin ces éléments ne peuvent pas diffuser "tout seuls" chez les enseignants (en général), notamment car ils ne sont pas issus de leur expérience, pas assez proches de leurs pratiques pour être adoptés de manière autonome, même s'ils peuvent servir ensuite, moyennant formation. Par exemple il est difficile de faire des analyses de tâche sans grille pré-établie sauf à n'envisager que la grille issue de l'expérience "facile, difficile, exhaustif", ce qui est insuffisant à nos yeux. C'est que cette grille est lourdement liée à nos hypothèses didactiques, sur les activités et les apprentissages. Mais à l'inverse on ne peut pas envisager de faire des analyses de tâches avec notre grille pour tous les exercices proposés, ce serait trop long et même trop fastidieux. Il faut donc choisir les énoncés un peu clefs qui donneront lieu à une attention spéciale. Il n'y a pas et ne peut y avoir de scénario "tout fait". Il n'est pas non plus question de trouver soi-même le relief sur une notion et il faut en passer par ce qui existe, où ce n'est pas toujours traité... En ce qui concerne les déroulements, c'est encore plus évident - même si "se taire" facilite l'engagement des élèves, il y a des moments où ce n'est pas possible, ce serait trop long si on laissait toujours le temps nécessaire, on doit repérer ce qu'ont fait les élèves et ce ne peut être que partiel, et choisir quand et comment intervenir, même si on connait les différents types d'aides... Il y a au moins deux raisons à ce décalage inévitable entre recherches et enseignants : 1) parce que ce que couvre la didactique n'est pas professionnel, les besoins "réels" ne sont pas étudiés en tant que tels - ce sont les apprentissages précis (limités à chaque fois) qui sont visés, charge aux enseignants d'en tenir compte, même si la didactique propose certaines choses pour eux, et 2) parce que les besoins ressentis par les enseignants ne sont pas non plus directement liés (voire sont encore moins liés) à ce que peuvent leur proposer les didacticiens. Qu'ils soient débutants ou expérimentés, pour des raisons différentes.

Dans ce schéma, les formateurs sont censés rapprocher, en ce qui concerne ce qui est provoqué en classe sur certains thèmes, des besoins ressentis, auxquels ils sont perméables, plus que les chercheurs, et des besoins supposés par les chercheurs, qu'ils partagent mais auxquels ils sont (ont été) formés... On retrouve bien notre problématique de notre formation de formateurs ...

Cette discussion a ouvert beaucoup de questions, et ce sont sans doute des recherches, mixtes, associant chercheurs, formateurs, enseignants qui permettront de recueillir des données pour avancer sur ce qui peut faire du livre une ressource. Le développement actuel des recherches collaboratives par exemple ouvre des perspectives un peu différentes, pouvant compléter les dispositifs de formation envisagés. Les échelles et les publics sur lesquelles portent ces deux types de dispositifs sont différents, même si la durée semble toujours nécessaire.

En perspective signalons déjà un tome 2, avec des scénarios de formation plus ou moins inspirés du tome 1 et discutés selon les publics et par thèmes… avec peut-être une édition électronique ?

Enfin, donnons la parole à l'éditrice : un livre ça coûte cher, ça doit se vendre… et la question de la diffusion de l'information est primordiale…Cela engage à être vigilant à la donnée des informations sur nos écrits, car pour qu'on puisse discuter d'un livre, encore faut-il que son existence soit signalée, et de manière adaptée !

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ABBOUD-BLANCHARD M. & ROBERT A. (2013) Strategies for training mathematics teachers. The first step: Training the trainers. Dans F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms. Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 229-245). Rotterdam : Sense Publishers.

ALTET M., PAQUAY L. & PERRENOUD P. (EDS) (2002) *Formateurs d'enseignants quelle professionnalisation* ? Bruxelles : De Boeck

BALL D.L .& FORZANI F. (2009) The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education, 60*(5), 497-511.

BLANCHARD-LAVILLE C. & GEFFARD P. (Eds) (2009) *Processus inconscients et pratiques enseignantes*. Paris : L'Harmattan.

BLOCH I. (2005) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x,* 81, 25-53.

BORAITA F. & CRAHAY M. (2013) Les croyances des futurs enseignants : est-il possible de les faire évoluer en cours de formaiton intiale et si oui comment ? Note de synthèse *Revue Française dePédagogie*, 183, 99-158

CHAPPET-PARIÈS M., ROBERT A. & ROGALSKI J. (2013) What 8th and 9th Grade Studdents with the same teacher do during a geometry class period ? Dans F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms. Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 229-245). Rotterdam : Sense Publishers.

CHARLES-PEZARD M., BUTLEN D. & MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en*

*ZEP, quelles pratiques, quelle formation ?* Grenoble : La pensée sauvage.
CHEVALLARD Y. (2004) Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation, *Texte d'un exposé présenté lors d'une journée de formation de formateurs tenue le 16 mars 2004 dans le cadre de l'IUFM d'Aix-Marseille*.
CHEVALLARD Y. (2006) Former des professeurs, construire la profession de professeur, Notes dans le cadre des *Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire* de la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation (section des sciences de l'éducation) de l'Université de Genève.
CLOT Y. (2001). Clinique du travail et action sur soi in Baudouin J.M. et Friedrich J . (Eds) *Théories de l'action et de l'éducation, Raisons éducatives*, pp 255-278. Bruxelles : De Boeck Université
CLOT Y. & RUELLAND-ROGER D. (2008) Enseigner les maths au lycée et au collège : un ou deux métiers ? *Recherche et formation,* 57, 51-63.
CRAHAY M., WANLIN P., ISSAIEVA E. & LADURON I (2010). Fonctions, structuration et évolution des croyances (et connaissances) des enseignants, Note de synthèse. *Revue Française de Pédagogie,* 172, 85-129.
LENFANT A. (2002) *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.
MARGOLINAS C, & RIVIERE O. (2005). La préparation de séance : un élément de travail du professeur. *Petit x*, 69, 32-57.
MASSELOT P. & ROBERT A. (2007) Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et Formation*, 56, 15-31.
PASTRE P. (2011) *La didactique professionnelle. Approche anthropologique du développement chez les adultes*. Paris : PUF.
PROULX J. & GATTUSI L. (2010) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Montréal : éditions du CRP.
ROBERT A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 57-80.
ROBERT A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 27(3), 271-312.
ROBERT A. (2010) Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré : Un point de vue didactique prenant en compte la complexité des pratiques. *Repères IREM,* 80, 87-103.
ROBERT A., PENNINCKS J., & LATTUATI M. (2013) Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, 92. 49-56.
ROBERT A. (2013) Une réflexion didactique sur les changements du métier d'enseignant de mathématiques et sa (nécessaire) cohérence : nouvelles donnes au collège et au lycée. *Repères IREM,* 93, 79-94.
ROBERT A. & POUYANNE N. (2004) Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation, *Document pour la formation*, n°5, IREM Paris Diderot
ROBERT A. & ROGALSKI J (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques. Une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences et des Mathématiques*, 2(4), 505-528.
ROBERT A. & VIVIER L. (2013) Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ? *Éducation et didactique*, 7(2), 115-144.
RODITI E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'harmattan.
ROGALSKI J. (2013) Theory of activity and developmental frameworks for an analysis fo teachers' practices and students' learning. In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms.*

*Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 3-22). Rotterdam : Sense Publishers.
SHULMAN L. S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4- 31.

ANNEXES

## 1) Analyses *a priori* de tâches mathématiques[56]

On répond à la question suivante : quelles connaissances sont à mettre en œuvre ? Avec quelles adaptations par rapport à ce qui est donné dans le cours ? Une première étape est donc de déterminer ces connaissances, en repérant si elles sont anciennes ou non, c'est-à-dire en cours d'acquisition, si elles sont supposées disponibles, c'est à dire non indiquées ou non. La deuxième étape consiste à déterminer les adaptations attendues. S'il n'y en a pas, on parle d'une tâche simple et isolée, correspondant à une application immédiate. Sinon, la tâche va donner lieu à des sous-activités de

- *Reconnaissances* de connaissances ou modalités de connaissances à utiliser ou/et choix, forcé ou non…
- *Traitements internes,* introduction d'intermédiaires, mélanges, mises en relation et interprétation en termes de changements de points de vue, cadres, registres pour une même connaissance, calculs, travail sur figures…
- *Organisation,* comportant l'introduction d'étapes, l'introduction de raisonnements, l'utilisation de liens entre questions…

**1) Composantes et niveaux d'organisation des pratiques**

On prend en compte 5 composantes (et on dégage par exemple des logiques d'action) – les deux premières sont travaillées à partir d'observables recueillis en classe, les trois suivantes à partir d'observables indirects :

a) **Composante cognitive** associée aux choix de l'itinéraire cognitif proposé aux élèves (scénario comprenant les contenus – cours et exercices - et gestion *a priori*)
b) **Composante médiative** associée aux choix de gestion en classe (travail des élèves et accompagnement des élèves), aux improvisations pour mettre en actes les préparations (enrôlement, aides)
c) **Composante institutionnelle** : traduit l'adaptation aux contraintes de programmes, aux horaires, aux demandes de l'institution, etc.
d) **Composante sociale** : traduit l'adaptation aux conditions sociales, aux élèves, à la composition des classes, à l'établissement et à ses habitudes, etc.
e) **Composante personnelle** : associée aux représentations, connaissances et expériences de l'enseignant – éventuellement des entretiens y donnent accès

On a identifié trois niveaux d'organisation de ces logiques d'action – **global** (celui des projets et représentations), **local** (celui de la classe, au quotidien), **micro** (celui des routines et automatismes). Ces trois niveaux interfèrent notamment dans les activités de l'enseignant, dont l'ensemble constitue le travail de l'enseignant en classe et pour la classe qui est un des aspects de ses pratiques (prises dans un sens très global).

## 2) Extraits de points de vue de lecteurs du livre : la difficulté d'un accès autonome

***Un point de vue de formateur ayant suivi le master pro*** : le livre m'a permis de me replonger dans les contenus du Masterpro avant de construire un nouveau module de formation initiale dans lequel nous utilisons l'analyse de vidéo avec des adaptations. Les vidéos sur le site nous ont aussi été utiles même si elles ne sont pas de première fraîcheur, les considérations sur la

[56] On donne ici une version un peu modifiée et allégée par rapport à celle qui figure dans le livre, qui porte sur les sous-activités et non sur les sous-tâches. Cependant il manque des types de sous-activités.

réciproque du théorème de Pythagore m'ont plus rappelé des souvenirs d'élèves que des considérations d'enseignants... J'aurais évidemment pu m'en sortir avec les documents récoltés pendant que je suivais le Masterpro mais le livre a pour avantage de les retrouver tous en un seul endroit avec une table des matières. Le livre m'a aussi (surtout) permis d'offrir aux collègues avec qui je travaille dans ce nouveau module un accès aux principaux concepts vu pendant le Masterpro sans l'avoir suivi. J'ai dû prendre du temps pour les expliciter mais ils pouvaient ensuite se référer au livre pour se les approprier …

***Deux points de vue d'enseignant ayant suivi le master pro :*** je pense qu'il y a pas mal d'extraits qui peuvent être utile à des enseignants (auto-formateurs) et des formateurs. Mais dans ce livre il y a selon moi plus que des articles mis bout à bout et cela n'est peut-être pas vraiment accessible à ceux qui n'ont pas été formé pour le comprendre (c'est ce côté "méta" qui fait que ce livre comme le master pro peut être utile pour la formation d'un formateur). […]. Ce livre est pour moi une image fidèle de la formation dispensée en master pro (elle-même n'étant pas nécessairement facile d'accès) ; il ne peut peut-être pas remplacer des mois de formation mais il en contient le message (lui aussi n'étant pas si accessible : il m'a fallu plusieurs mois pendant et après la première année pour comprendre où vous vouliez en venir et pouvoir l'utiliser sans avoir peur de dire n'importe quoi)… C'est sûr que l'analyse de vidéo est un des points forts et innovant du master pro. L'analyse de vidéo est très riche non seulement pour réfléchir à l'activité du professeur et celle des élèves mais également pour faire comprendre à un futur formateur qu'on peut s'intéresser à cette activité (et qu'une formation ne doit sans doute pas juste montrer qu'elle est la super pratique de tel ou tel super enseignant comme c'est trop souvent le cas).
**Le deuxième** : … j'ai bien apprécié de revoir des éléments de didactique toujours utiles, j'ai utilisé le chapitre 4 sur la symétrie orthogonale en 6ème : il m'a aidée à comprendre les enjeux, à organiser les exercices, à construire mes séances. Le chapitre sur les vidéos est très intéressant : je m'attendais même, vu le titre du bouquin à ce qu'il soit plus développé encore et montre que le travail sur vidéos a modifié (révolutionné ?) la formation, surtout la formation initiale ! Quand j'intervenais à ce niveau, j'avais trouvé que c'était vraiment un outil formidable : au lieu de parler de la classe, on est DANS la classe ! Sur le travail en groupes : […] je prévois davantage de moments ou d'échanges par deux : les séances en demi-groupes et les corrections de devoirs, toujours ennuyeuses en collectif, se passent mieux depuis qu'ils corrigent eux-mêmes et s'expliquent (un bon et un moins bon) […]

***Le point de vue d'un utilisateur « plus qu'intéressé », comme il s'intitule : celui du chercheur-formateur assurant la formation actuellement, et de nouvelles perspectives :***
[…] Le livre, *une caméra*, je l'ai eu en avant-première : envoyé pour relecture avant publication […] le livre « une caméra au fond de la classe » a été d'un grand soutien pour la préparation des séances de formation et notamment pour la première partie de l'année, de septembre à décembre, la plus difficile. Reste que la question de sa lecture « autonome » doit être posée : j'ai profité d'un accompagnement personnalisé de la part de l'auteur principal. Certes cela a permis à la formation de formateur de s'inscrire dans la continuité. Mais peut-on vraiment lire ce livre sans accompagnement ? Comme pour toute ressource, il reste sans doute une difficulté à se limiter au seul livre pour en adopter les messages. … Nul doute que les outils développés autour des vidéos, qui est une partie essentielle, sont utiles dès que l'on veut travailler avec ce type de données. Mais on peut aussi penser aux autres points du chapitre 3 (didactique, ZEP, évaluation, compétences) ou à ce que permettent d'apprécier les points de vue proposés sur l'enseignement-apprentissage lorsque l'on veut développer une sensibilité particulière aux différents acteurs. Ce dernier point, la sensibilité, est sans aucun doute le plus important pour moi. Complètement étranger à ce type de regard il y a trois ans, il constitue désormais un passage obligé de ma compréhension des phénomènes d'enseignement-apprentissage des mathématiques. A la fin de cette troisième année, je pense aussi à la suite

du master pro, car s’inscrire dans la continuité ne signifie pas reproduire à l’identique. Deux points sont envisagés qui n’apparaissent pas dans le livre : le travail sur vidéo avec les physiciens (initié depuis trois ans mais non évoqué dans le livre) et les productions d’élèves comme compléments aux vidéos (idée nouvelle). Les enseignants suivant la formation de formateurs sont souvent demandeurs d’un travail sur des productions écrites, et parfois certains en présentent d’eux-mêmes avec les vidéos. C’est bien compréhensible car c’est un travail qu’ils pratiquent au quotidien. Ainsi, l’appréciation des productions écrites des élèves a-t-elle une certaine proximité avec le travail de l’enseignant, pour mieux comprendre ces activités et arriver à ajuster ce travail notamment. Mais prendre en considération les productions écrites, c’est aussi prendre le risque de réduire le champ d’analyse et de restreindre la compréhension des apprentissages, ce qui n’est certes pas l’objectif. Prudence !

# RECHERCHES EN DIDACTIQUE DE LA PHYSIQUE : QUELQUES ENJEUX D'ACTUALITE, OBJETS ET CADRES

Cécile **de HOSSON**

LDAR (EA 4434 – Université Paris Diderot)

cecile.dehosson@univ-paris-diderot.fr

**Résumé**

Si l'amplitude et la diversité actuelles des recherches en didactique de la physique rendent périlleux, presque prétentieux, tout travail d'exposition exhaustif, il apparaît toutefois possible d'examiner quelques spécificités du travail du didacticien lorsque celui-ci s'intéresse aux processus de construction du savoir en physique. C'est à cet exercice que nous nous livrons ici, en adoptant un point de vue personnel, alimenté par nos propres travaux et par d'autres, proches de nos préoccupations scientifiques. La recherche en didactique de la physique est abordée sous deux angles différents (mais liés). Le premier étudie sa contribution à la définition des termes de la négociation entre la rationalité de la physique et celle du sens commun. Le second présente la recherche en didactique de la physique en tant qu'actrice de l'exercice d'une forme épistémologique de vigilance face aux contenus et aux démarches qui président aux choix institutionnels actuels (incitation à pratiquer un enseignement fondé sur l'investigation, à asseoir la physique sur un terrain plus « culturel » et moins formaliste, à introduire des éléments d'histoire des sciences, etc.).

**Mots clés**

Didactique de la physique, physique, sens commun, conceptions, démarche d'investigation.

### RECHERCHES EN DIDACTIQUE DE LA PHYSIQUE : QUELQUES ENJEUX D'ACTUALITE, OBJETS ET CADRES

## Introduction

La recherche en didactique de la physique étudie, pour les comprendre, les processus d'apprentissage, d'enseignement et de formation des lois, des concepts, des principes qui fondent la physique. L'analyse du chercheur en didactique est le plus souvent sous-tendue par le repérage de régularités, régularités qui peuvent porter sur le rapport des enseignants, des étudiants, des élèves, des institutions (scolaires, le plus souvent) aux savoirs de la physique. Si la recherche en didactique de la physique n'a pas de visée prescriptive, la plupart des travaux du champ nourrissent la formation des enseignants en soutenant une meilleure connaissance des sources possibles de difficultés d'apprentissage et des moyens d'y remédier.

Au-delà de cette présentation macro (que nous jugeons consensuelle) et compte-tenu du nombre et de la diversité des recherches actuelles (en France et à l'étranger), toute entreprise d'exposition exhaustive de l'ensemble des problématiques, des questions et des modes de travail des didacticiens de la physique apparaît voué à l'échec. C'est pourquoi nous avons choisi de nous intéresser ici à deux projets que semble poursuivre la recherche en didactique de la physique depuis son apparition dans le monde académique à la fin des années 1970'. Le premier vise la définition des termes de la négociation entre la rationalité de la physique et celle du sens commun ; le second ambitionne l'exercice d'une forme épistémologique de vigilance (externe) face aux contenus et aux démarches qui sous-tendent les choix institutionnels actuels. Nous illustrerons ces projets à la lumière de nos recherches ou de recherches familières, en demeurant consciente que ce choix réduit considérablement le spectre des travaux actuels du champ.

## 1. Définir les termes d'une négociation entre la rationalité de la physique et celle du sens commun.

### *Des erreurs persistantes, stables dans l'espace et dans le temps*

Il y a quelques semaines, on proposait à des étudiants de L3 de physique de prévoir (par un schéma) la façon dont serait affectée l'image d'une fleur formée par une lentille convergente si l'on masquait la moitié de cette lentille.

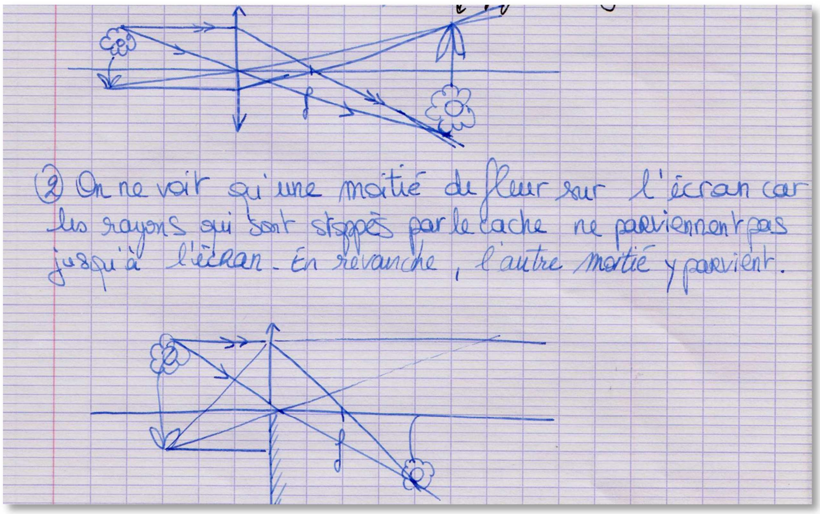



*Fig.1 : « On ne voit qu'une moitié de fleur sur l'écran… ». Réponse d'un étudiant de L3 de physique à qui l'on demande de prévoir la façon dont sera affectée une image formée par une lentille convergente si l'on masque la moitié de cette lentille.*

Cette situation, classique des recherches en didactique depuis les années 80' engage des règles de construction géométriques largement connues des étudiants de ce niveau (voir haut de la figure 1). Pour autant, ceux-ci persistent à prédire la disparition de la moitié de l'image (alors que seule sera affectée la luminosité de l'image et non sa forme –voir bas de la figure 1)[57], et cette prédiction demeure stable dans l'espace et dans le temps (Goldberg & McDermott, 1987, Rice & Feher, 1987, Kaminski & Mistrioti, 2000). Plus récemment, on trouvait dans une copie d'examen de physique de L1 un bilan des forces exercées sur un ressort (en mouvement

[57] Un objet peut être décomposé en un nombre infini de points sans dimension ; chaque point de l'objet est alors considéré (s'il est éclairé) comme un point-source qui émet de la lumière dans toutes les directions ; celle-ci peut être géométrisé par des droites (rayons) qui désignent le sens de propagation de la lumière émise par chacun des points de l'objet. Dans un contexte de modélisation géométrique (usuel dans l'enseignement secondaire et supérieur) d'une situation de formation d'image par une lentille convergente, un rayon issu d'un point-objet A passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié ; un rayon parallèle à l'axe optique dans le plan-objet est dévié par la lentille et passe par le foyer de la lentille dans le plan-image. L'intersection des deux rayons dans le plan-image est le point-image A' du point-objet A. Cette pratique « rituelle » (Viennot, 2006) d'échantillonnage semble favoriser les réponses « moitié de lentille > moitié d'image » et fait perdre le sens même de la notion d'image optique : à chaque point-objet correspond un point-image formé par l'intermédiaire d'un faisceau divergent (depuis le point-objet) qui converge après la lentille jusqu'au point-image ; un faisceau contient une infinité de rayons issus du point-objet si bien que n'importe quelle partie de la lentille, aussi petite soit-elle, suffit pour former le point-image correspondant.

horizontal) incluant la vitesse (voir figure 2). On voyait dans cette erreur (répandue) le signe d'une difficulté, pour le sens commun, à accepter qu'un objet puisse être en mouvement dans un sens opposé à celui de la force s'exerçant sur l'objet[58] (Viennot, 1979, Halloun & Hestenes, 1985).

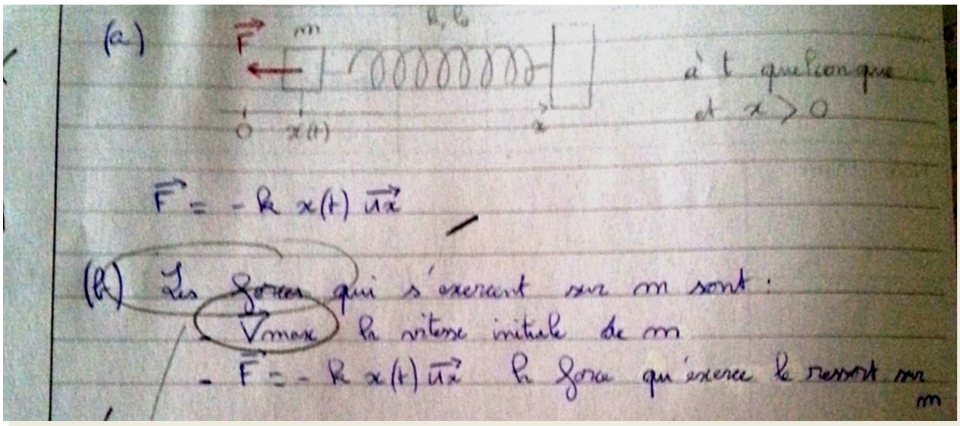



*Fig.2 : Réponse d'un étudiant de L1 à qui l'on demande de faire le bilan des forces s'exerçant sur une masse accrochée à un ressort que l'on vient de lâcher après l'avoir étiré vers la gauche jusqu'à au point 0.*

Les exemples de ce type sont nombreux, où l'on constate que des étudiants « scientifiquement éduqués » mobilisent préférentiellement des raisonnements de sens commun souvent contradictoires avec les règles et les principes qu'ils ont appris, lorsque les situations qui leur sont proposées diffèrent de celles que l'on trouve dans les évaluations institutionnelles classiques. Doit-on en conclure que ces étudiants ne sont pas au niveau ? Qu'ils n'ont rien appris ? Rien compris ? Doit-on rejeter la faute de leurs erreurs sur leurs enseignants ?

Le projet de la recherche en didactique des sciences (celle de la physique en particulier) est de se départir d'interrogations mettant en cause les compétences des individus (élèves, étudiants, enseignants) en positionnant la question de la persistance de ces erreurs au sein même de la physique et de son rapport avec le sens commun dans une dialectique de nature épistémologique. Se faisant, il se positionne dans le sillage de l'œuvre du biologiste Jean Piaget et de celle du philosophe Gaston Bachelard.

### *Les racines : la physique et le sens commun*

Comprendre la persistance des erreurs des élèves, des étudiants (des enseignants aussi) confrontés à des situations engageant des savoirs connus d'eux conduit à interroger le rapport que ces élèves, ces étudiants entretiennent avec ce monde que la physique questionne, avec la façon dont elle le questionne. Cela nécessite, dans un premier temps, de savoir de quoi l'on parle lorsque l'on parle de physique en tant que discipline savante. Pour Perdijon (2006) : « La physique étudie, par l'expérimentation et l'élaboration de concepts, la matière et le rayonnement en relation avec l'espace et le temps ». Elle établit des relations de nature causale (fonctionnelles) entre des grandeurs (mesurables) ; ces grandeurs renvoient à des concepts le plus souvent « formels », c'est-à-dire n'ayant pas de correspondant dans la nature et que l'on définit par des attributs, des propriétés (Lemeignan & Weil Barais 1993). En regard de cette définition, le sens commun se voit quelque peu malmené. Prenons un exemple. La causalité est généralement indissociable d'une organisation chronologique d'événements ; pour le sens commun, une cause précède toujours un effet (Halbwachs, 1974 Viennot, 1996).

58 Ceci est la traduction de la $2^e$ loi de Newton qui associe force et accélération. Si un objet décélère (un ascenseur avant d'atteindre sa destination finale en étant parti du rez-de-chaussée) il est soumis à une force vers le bas alors même qu'il continue sons ascension.

En physique, la plupart des lois engagent le signe « = » qui rend compte d'une simultanéité des causes et des effets, et en général, les grandeurs considérées pour un système donné (forces et accélération, intensité et tension, etc.) évoluent ensembles au même instant. Cet antagonisme est également à l'œuvre dans la définition et la manipulation des concepts dits « formels » que le sens commun tend à doter de propriétés matérielles afin de pouvoir s'en saisir de manière plus opératoire (les ombres deviennent des tâches noires, l'électricité et la chaleur des fluides, les images optique des entités qui voyagent et qui perdent des morceaux au passage de lentilles à moitié masquée). Ainsi posée, la physique semble s'être constituée par opposition au sens commun[59]. C'est en tout cas la position défendue par Bachelard : « Les sciences physiques et chimiques, dans leur développement contemporain, peuvent être caractérisées épistémologiquement comme des domaines de pensées qui rompent nettement avec la connaissance vulgaire » (Bachelard, 1938). La formation de l'esprit scientifique nécessiterait une destruction préalable d'un préexistant certes opératoire, mais tout à fait néfaste en termes d'accession à la rationalité scientifique. A propos du phénomène d'électrisation, Bachelard écrit :

> Que les corps légers s'attachent à un corps électrisé, c'est là une image immédiate de certaines attractions. De cette image isolée (…) l'esprit préscientifique va faire un moyen d'explication absolu (…). Le phénomène immédiat va être pris comme le signe d'une propriété substantielle, aussitôt toute enquête scientifique sera arrêtée (…). On pense comme on voit, on pense ce qu'on voit : une poussière colle à la paroi électrisée donc l'électricité est une colle, une glu. On est alors engagé dans une mauvaise voie où les faux problèmes vont susciter des expériences sans valeur, dont le résultat négatif manquera même de rôle avertisseur (…). (Bachelard, 1938, p.103).

L'idée de « rupture » a été depuis lors beaucoup discutée voire même rejetée (Schiele, 1984). Et la plupart des chercheurs en didactique semblent convaincus que la recherche d'une destruction est une entreprise inappropriée puisque des raisonnements de sens commun persistent à des niveaux élevés de formation scientifique. Par ailleurs, le sens commun ne pense pas « toujours mal » (Bachelard, 1938), et certaines tendances naturelles de la pensée forment de bons leviers de rationalité. Aussi, les recherches actuelles travaillent davantage à l'exploration de voies de négociation entre rationalité physique et rationalité du sens commun. L'une des tâches du didacticien consiste donc à identifier les traits de cette rationalité, dans un contexte de recherche où « l'instrument pour la photographie des idées fait défaut » (Viennot, 1996, p. 19).

### *Connaître le sens commun : les études de « conceptions »*

L'un des pionniers sur ces questions est certainement Jean Piaget. Biologiste de formation, Piaget va chercher à caractériser la façon dont l'enfant, au long de son développement biologique, entre en contact avec le monde qui l'entoure pour le rendre intelligible. Il fonde ce qui deviendra la psychologie du développement (ou psychologie cognitive) en étudiant, par entretiens cliniques et critiques, les structures de pensées qui se développent au fur et à mesure que l'enfant grandit. Piaget montre ainsi comment l'enfant « réinvente » le monde physique, donne un sens aux objets en faisant par exemple émerger « leurs » propriétés et fonctions. La figure 3 ci-après, extraite de nos travaux de recherche (de Hosson & Kaminski, 2002) illustre l'un des résultats des travaux Piagétiens : la plupart des enfants explique la vision par l'envoi de « quelque chose » depuis les yeux vers les objets. Pour Piaget, cela est dû au fait qu'entre 4 et 6 ans l'enfant est lui-même source de causalité par ses propres actions. Autrement dit, les liens de causalité ne sont reconnus par les jeunes enfants que lorsqu'ils agissent sur les objets, et non lorsque les objets agissent les uns sur les autres,

[59] Elle en emprunte les mots mais en les dotant de significations souvent incommensurables avec celles qu'ils avaient dans le registre de la langue courante.

indépendamment des actions des enfants. A ce stade, il y a « indifférenciation de l'opération et du causal » (Piaget & Garcia, 1971, p. 125). En outre, le « quelque chose » issu des yeux est généralement doté de propriétés matérielles comme en témoigne l'explication accompagnant le dessin de Stanislas ci-après.

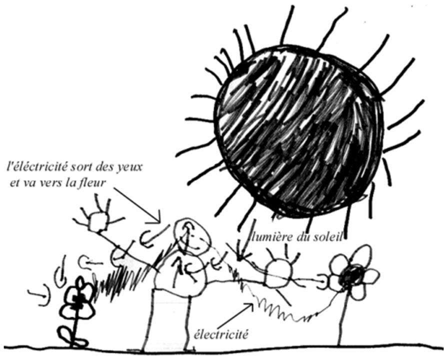



*Fig.3 : « La lumière, elle rentre dans les yeux et ça permet aux yeux d'envoyer un truc, de l'électricité peut-être, vers les choses et après ça prend la forme, la couleur, et comme ça on sait ce que c'est », Réponse de Stanislas, 5ans, à qui l'on demande une explication du phénomène de la vision (de Hosson & Kaminski, 2002).*

La raison pour laquelle les travaux de Piaget intéressent le didacticien tient autant aux résultats (qui touchent à la façon dont certaines notions/concepts et formes de raisonnement relevant de la physique se construisent chez l'enfant) qu'à la méthode mise en œuvre pour reconstruire l'évolution de la pensée enfantine. Ainsi, depuis près de 40 ans que la recherche en didactique de la physique existe[60], les formes de raisonnement risquant de faire obstacle à l'apprentissage sont identifiées par inférence : le chercheur va rechercher et reconstruire des formes génériques de raisonnement (conceptions) à partir de réponses d'étudiants (ou d'élèves) obtenues lors d'entretiens (individuels cliniques, directifs/semi-directifs/ouverts) et/ou de passations de questionnaires (fermés/semi-ouverts/ouverts, etc.).

Dans ce dernier cas, on propose au public, cible de l'enquête didactique, une classe de situations (voir figure 4) renvoyant à une même connaissance (donc, à une même difficulté supposée) et l'on examine la cohérence de l'ensemble des réponses et/ou des explications proposées[61]. Cette démarche de recherche a permis l'identification d'un nombre important de conceptions, de tendances de raisonnement, et ce, dans pratiquement tous les domaines de la physique actuellement enseignée[62]. Il est d'ailleurs frappant de constater que ces conceptions demeurent stables dans l'espace (on les retrouve inchangées d'un pays à l'autre) et dans le temps. Mais la mise en évidence des ces formes récurrentes de raisonnement n'est pas la finalité de la recherche en didactique de la physique. Elle constitue cependant une étape nécessaire à la définition des termes de la négociation entre la rationalité à l'œuvre en physique et la rationalité du sens commun.

---

[60] Dans le monde anglo-saxon, cette recherche est connue sous le nom de Physics Education Research. En France, la recherche en didactique de la physique est née dans les années 70' lorsqu'un petit groupe de physiciens de l'université Paris 7, intrigués par les erreurs récurrentes des étudiants de DEUG (y compris après enseignement) ont cherché à en comprendre les origines.

[61] Nous présentons en annexe un exemple de classe de situations engageant les 2 premières lois de Newton et permettant au chercheur d'inférer un raisonnement associant de manière inappropriée « force » et « vitesse ».

[62] On pourra se référer à la recension bibliographique très complète des chercheurs allemands Pfundt et Duit : http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html ou encore aux « facettes » telles que définies par le Nord-Américain Minstrell dans son *diagnoser* http://depts.washington.edu/huntlab/diagnoser/facetcode.html. Ces deux pointeurs permettront au lecteur de trouver les références utiles à l'identification des raisonnements les plus couramment mis en œuvre lors de l'apprentissage de la physique.

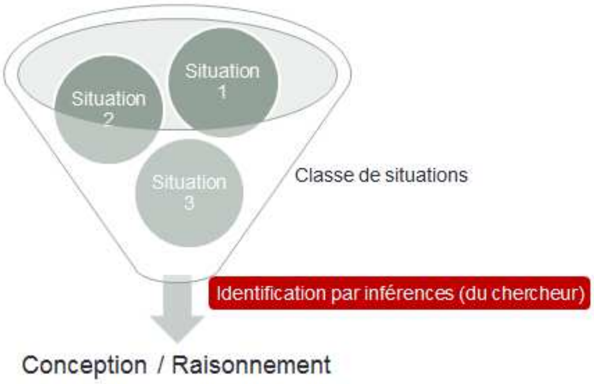



*Fig.4 : Modélisation d'un processus d'inférence de conception à partir d'une classe de situations renvoyant à une loi, à un principe physique identique.*

***Penser les termes de la négociation***

La négociation dont il est question ici promeut une prise en compte effective des structures de raisonnement susceptibles de brouiller le message de l'enseignement scientifique. Il s'agit de faire avec un « déjà-là » identifié pour le faire évoluer, tout en favorisant, chez les étudiants/les élèves, une prise de conscience de niveau *meta*. De manière assez naturelle, les chercheurs ayant contribué aux études de conceptions ont également produit et évalué un certain nombre d'outils spécifiques et adaptés.

Dans l'exemple ci-dessous, on demande à des étudiants de premier cycle universitaire de faire un bilan des forces exercées sur une valise soulevée verticalement et vers le haut. La plupart des réponses engagent une force vers le haut (celle de la main sur la valise) et une force vers le bas, celle de valise sur la main, assimilée au poids de la valise – voir figure 6). S'il apparaît satisfaisant pour le sens commun (le bilan des forces est en faveur d'une résultante vers le haut), ce bilan contredit la troisième de Newton, celle dite « des actions réciproques » selon laquelle la force de la main sur la valise ne peut être qu'égale à la force de la valise sur la main.

Une schématisation dite « éclatée » (Viennot, 1996) permet de pallier cette difficulté et de revenir au sens profond des lois qui régissent le mouvement des corps (ou systèmes). Le système auquel on s'intéresse ici est la valise ; elle est isolée des deux autres systèmes avec lesquels elle est en interaction : la main du porteur et la Terre (figure 6). Cet artefact graphique permet d'identifier les forces qui s'appliquent sur la valise, et sur la valise uniquement : il s'agit des forces exercées par les corps en interaction avec elle. La valise est donc soumise à deux forces : la force de la main et la force de la Terre (ie : le poids de la valise) ; elles sont colinéaires (verticales), de sens opposés, de normes différentes et la résultante de ces deux forces est verticale est vers le haut, ce qui est bien le sens de l'accélération : la valise monte. Conformément à la 3$^{e}$ loi de Newton, la force exercée par la valise sur la main est égale (en norme) et opposée (en sens) à la force exercée par la main sur la valise, simplement, elle ne s'applique pas à la valise, mais à la main ! C'est l'identification d'une assimilation inappropriée de la loi des actions réciproques qui guide ici le chercheur dans la construction d'une proposition qui présente l'avantage de redonner du sens à l'idée de « loi appliquée à un système » tout en prenant en compte une difficulté supposée persistante.

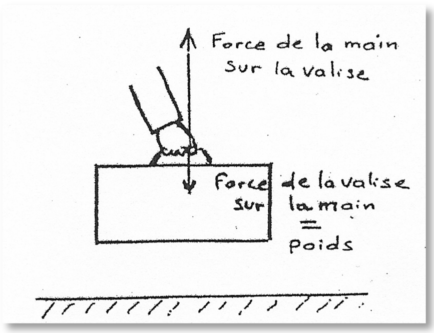



*Fig.5 : Situation-cible : un homme soulève une valise vers le haut*

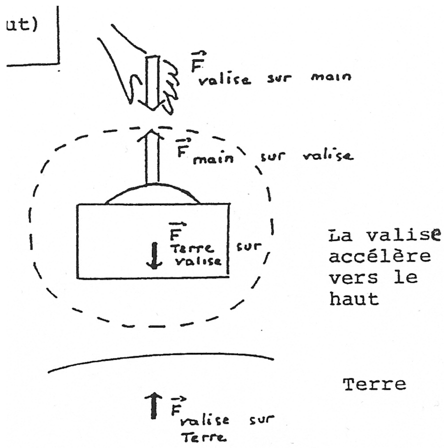



*Fig.6 : Proposition didactique : les schémas éclatés (Viennot, 1996).*

Les termes de la négociation peuvent aussi être recherchés dans l'histoire des sciences (avec toute la prudence que cela requiert[63]). Les travaux que nous menons depuis 2004 s'inscrivent dans cette perspective et ont pour objet la création d'un cadre unificateur d'élaboration de séquences d'enseignement dans lesquelles l'information historique devient un outil d'apprentissage des savoirs scientifiques. Cet engagement s'inscrit dans la droite ligne de notre thèse qui avait pour objet la construction et l'évaluation d'une séquence d'enseignement d'optique élémentaire à partir d'éléments d'histoire du mécanisme optique de la vision (de Hosson 2004). Au cours de cette recherche, nous avons conçu un parcours d'apprentissage visant la compréhension du rôle de la lumière dans la vision.

L'enquête didactique que nous avons menée afin d'identifier les difficultés des élèves à propos du rôle de la lumière dans la vision a montré que l'entrée de la lumière dans l'œil n'est reconnue (par les élèves interrogés) qu'au prix de la gêne qu'elle provoque, c'est-à-dire, dans des situations d'éblouissement. Or, dans de telles situations, la vision est difficile, voire impossible. Ce constat pose deux difficultés. D'abord elle conduit les élèves à affirmer que la vision des objets n'est possible que si la lumière n'entre pas dans l'œil ; ensuite, elle induit l'idée que les objets ordinaires, ordinairement éclairés ne renvoient pas la lumière qu'ils reçoivent. En d'autres termes, la vision d'un objet est possible si celui-ci est éclairé et si la lumière qui l'éclaire est suffisamment faible pour y « rester ». Le phénomène de l'éblouissement, tel qu'il se voit interprété par les élèves, constitue une difficulté majeure pour comprendre que la vision d'un objet résulte de l'entrée dans l'œil d'un observateur d'une partie de la lumière renvoyée par l'objet. A l'inverse, c'est l'observation de situations d'éblouissement qui semble être à l'origine de la première explication rationnelle du mécanisme de la vision. Elle est proposée par le savant arabe Ibn al-Haytham au 11e siècle dans son *Kitab al Manazir*. Nous nous sommes donc trouvée face à une situation où un même fait d'observation (l'éblouissement) conduit d'un côté à conclure que la lumière est *stimulus* de la vue, et de l'autre au contraire, à imaginer que lorsque la lumière entre dans l'œil, la vision est impossible. Nous avons donc cherché à reconstruire le cheminement ayant permis à Ibn al-Haytham de passer de l'observation du phénomène de l'éblouissement à l'énoncé d'une première explication du mécanisme optique de la vision dans laquelle la lumière (en tant qu'objet indépendant) est partie prenante. Cette reconstruction, réalisée à partir de l'étude de textes de première main (en particulier le *Kitab al manazir* dans la traduction anglaise d'A.I.

[63] Malgré la mise en évidence de ressemblances troublantes entre des raisonnements d'élèves et certaines idées historiques, la recherche en didactique de la physique a très tôt pris ces distances avec l'idée de « récapitulation onto-phylogènétique » (Saltiel & Viennot, 1985).

Sabra) s'est vue façonnée par la connaissance que nous avions des difficultés des élèves et nous a conduite à exhumer des éléments de l'histoire des théories de la vision minorés (voire ignorés) par les historiens. L'approche quantitative de la lumière construite par Ibn al Haytham à partir de l'analogie entre les effets de la lumière et la douleur est ainsi devenue l'idée centrale d'une séquence d'enseignement pour laquelle nous avons créé une ressource pédagogique : le *Dialogue sur les manières dont se fait la vision*. Il s'agit d'un dialogue fictif de type « galiléen » dans lequel trois personnages cheminent vers une explication rationnelle du mécanisme de la vision. Le dialogue s'ouvre sur une exposition de deux théories antagonistes (explicitement situées dans le contexte de la Grèce antique) dans lesquelles la vue est expliquée soit dans un sens œil>objet, soit dans un sens objet> œil. Il se poursuit vers une construction progressive du concept de lumière comme *stimulus* la vue. L'utilisation de ce dialogue s'est avérée fructueuse en termes d'apprentissage (et de motivation) aussi bien dans le contexte d'entretiens d'apprentissage avec des binômes d'élèves (de Hosson & Kaminski, 2007) que dans celui de situations réelles de classe de collège et de primaire (de Hosson & Delaye, 2009)

Nous l'avons déjà signalé, les propositions des didacticiens de la physique n'ont pas de finalité prescriptive dans la mesure où elles ne se posent pas comme des modèles à suivre. Cependant, le fait qu'elles soient le résultat de programmes de recherche garantit que leur impact ait été évalué *in situ.* Ainsi posées, les ressources produites dans le contexte de la recherche en didactique de la physique visent à élargir la palette des possibilités d'action des enseignants et de leurs formateurs. Encore faut-il que ces ressources soient connues et appropriables[64]. Nous voyons là un enjeu fort pour la formation des enseignants et pour la recherche elle-même : quelles sont les conditions d'un transfert opératoire des résultats de la recherche en didactique vers la formation des enseignants ? Comment évaluer l'impact de ce transfert sur les pratiques des enseignants et/ou des formateurs ? sur l'apprentissage des élèves/des étudiants ? Autant de questions qui animent aujourd'hui notre communauté.

## La recherche en didactique de la physique, actrice d'une forme épistémologique de vigilance : regard sur quelques choix curriculaires

Depuis quelques années, les programmes scolaires, les choix curriculaires, s'organisent et se créent indépendamment des résultats issus de la recherche en didactique[65]. Cela peut paraître paradoxal dans la mesure où, d'une part de plus en plus de travaux produisent des ressources évaluées en situation réelles de classe, et d'autre part, de nombreuses recherches ont montré l'inaptitude de certaines pratiques usuelles d'enseignement à modifier les raisonnements de sens commun ou à favoriser la conceptualisation et l'apprentissage à long terme. Cette situation n'est pas spécifique de la France. De nombreux curricula scientifiques sont le produit de sphères de décision éloignées de la recherche. Mais finalement, cette position d'actrice éducative indépendante de l'institution scolaire, permet à la recherche en didactique d'examiner les conséquences des choix qui président à la création des programmes scolaires avec une certaine objectivité. La « démarche d'investigation », sorte de paradigme d'enseignement des sciences, est devenu ces dernières années un objet abondamment

---

[64] Les revues professionnelles telles que le *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, ou *Grand N* publient régulièrement des articles que l'on pourrait qualifier de « vulgarisation » des résultats de la recherche en didactique de la physique.

[65] Il est intéressant de noter que cela n'a pas toujours été le cas. Les programmes de physique-chimie de 1992 portaient la marque des didacticiens présents au sein du Groupe de Travail Disciplinaire chargé de leur élaboration. On y trouvait des références explicites aux conceptions risquant de faire obstacle à l'apprentissage et des propositions de remédiation ; de façon plus subtile, les programmes de collège de 2002 faisaient référence aux travaux d'Ibn al Haytham pour l'enseignement de l'optique au collège.

questionné par les didacticiens de la physique[66].

Avant les années 2000, l'enseignement des sciences à l'école primaire semble avoir déserté les classes. Cet argument constitue l'un des leviers du Plan de Rénovation de l'Enseignement des Sciences et de la Technologie (PRESTE) mis en place en 2000 par l'Inspection générale de l'éducation nationale suite à un travail de terrain réalisé par l'Inspection dans les écoles « pilotes » qui travaillaient depuis quelques mois en collaboration avec la Main à la Pâte[67]. C'est dans le PRESTE, que le mot « investigation » apparaît pour la première fois pour qualifier l'approche pédagogique qui allait, dès lors, être privilégiée. Quelques années plus tard, était publié le Socle Commun des Connaissances et des Compétences en même temps que les nouveaux programmes de collège. La démarche d'investigation (DI) devient, en tant que label, l'approche pédagogique à favoriser pour l'enseignement des sciences (expérimentale et mathématiques).

Si l'on rentre un peu dans les détails, on s'aperçoit que le choix des concepteurs de programmes se porte sur la notion de « situation problème », notion dont la création remonte aux années 70' et à la réforme des cursus canadiens de médecine. Cette notion présente des similitudes frappantes avec l'idée de « situation-problème » telle qu'elle était pensée par Robardet plusieurs année auparavant (Robardet 1997), c'est-à-dire, une notion complexe aux dimensions variées (épistémologiques, didactiques, cognitives) et qui situe l'apprentissage des sciences dans une approche bachelardienne de résolution de problème et de franchissement d'obstacle. La prise en compte des « conceptions des élèves » apparaît comme une nécessité, leur connaissance par les enseignants également, ce qui n'ira pas sans poser un certain nombre de difficultés de mise en œuvre par les enseignants. On assistera d'ailleurs à un glissement progressif de la notion de situation problème vers l'idée de « situation déclanchante », sorte de mise en scène ludique pensée pour capter l'attention des élèves (Mathé et al. 2008). Plus récemment, c'est le lycée qui a vu apparaître la DI comme pratique pédagogique d'enseignement des sciences.

L'installation de la démarche d'investigation (ou plus largement, de l'enseignement des sciences fondé sur l'investigation) dans les programmes scolaires a certainement profité d'influences de nature diverses. Au-delà du rôle joué par la Main à la Pâte, une autre influence peut être recherchée du côté de l'Union Européenne. Dans le rapport « Rocard » (2007), un lien est établi entre la désaffection des étudiants pour les filières scientifiques et la nécessité de changement de méthode pédagogique pour l'enseignement des sciences. Les bienfaits de la DI sont posés comme des certitudes et conduisent les auteurs à conclure à la nécessité de l'étendre à l'ensemble des écoles du territoire européen. Les résultats des évaluations internationales PISA contribuent également à cette émergence. Et en effet, si l'on examine la nature de ce qui prétend être évalué par PISA, on retrouve des aspects des savoirs de sciences et des aspects de savoirs sur la science qui incluent des démarches scientifiques auxquelles

[66] Nous aurions pu montrer la façon dont la recherche en didactique interroge les choix institutionnels à travers d'autres exemples. Les incitations régulières à introduire des éléments d'histoire des histoires forment, de ce point de vue, un terrain fertile : de nombreuses ressources disponibles dans les manuels, dans les documents d'accompagnement, réduisent l'histoire des sciences à la simple hagiographie, valorisent des informations anachroniques, et ignorent le terrain cognitif auquel elles sont destinées si bien que l'on peine à identifier les intentions (en termes d'apprentissage) dont elles sont porteuses. Le travail d'analyse des fiches pédagogiques produites pour accompagner l'activité de mesure de la Terre par la méthode dite d'Eratosthène est, de ce point de vue, exemplaire (de Hosson & Decamp, 2011).

[67] Pour mémoire, ce dispositif d'accompagnement pour l'enseignement des sciences, créé en 1996 par G. Charpak, avait pour objectif de mobiliser les différents acteurs de l'éducation sur la question de l'insuffisance de l'Ecole en termes d'enseignements scientifiques. Les racines de la Main à la Pâte est à rechercher de l'autre côté de l'Altantique, à Chicago, où s'installait le programme Hand's On qui devait remobiliser les élèves des quartiers défavorisés.

sont associées les DI. Bien entendu, on ne peut ignorer d'autres influences : celles des pédagogies actives (on peut par exemple citer Dewey (1925) qui valorise l'*Inquiry* comme processus nécessaire à la construction du savoir en sciences), et celles des résultats de la recherche en didactique des sciences. De ces recherches ont émergé des propositions allant dans le sens d'un enseignement des sciences moins dogmatique et plus ouvert.

L'enthousiasme des promoteurs de la DI, celui des maîtres d'ouvrage (des enseignants, des formateurs) ne doit pas pour autant faire oublier qu'elle est un objet questionné par la recherche, en éducation en général, en didactique en particulier, et de ce point de vue, les questions qu'elle suscite sont nombreuses. Qu'en est-il par exemple des références épistémologiques : la DI présente-t-elle des traits communs avec les démarches de la science, celle des laboratoires; est-ce important que cela soit, d'ailleurs ? Quels types de savoirs se prêtent au jeu d'une mise en scène sous forme de DI ? Quels sont les apprentissages effectivement réalisés ? Et qu'en est-il de la formation des enseignants ? Quels outils peut-on leur fournir pour une mise en œuvre appropriée ? Autant de questions dont les réponses sont aujourd'hui loin d'être consensuelles mais dont on espère qu'elles éclairent les choix futurs des concepteurs de programmes.

## Conclusion

Il n'est pas question de réduire la recherche en didactique de la physique à ces deux dimensions de négociation et de vigilance. Les travaux présentés par les chercheurs francophones lors des dernières rencontres de l'Association pour la Recherche en Didactique des Sciences et des Technologies montrent la richesse de la production actuelle, diversité des centres d'intérêt et la pluralité des cadres et des méthodologies mobilisées[68]. On notera cependant un accroissement des recherches portant sur les pratiques des enseignants en lien (ou non) avec les activités des élèves, une ouverture notable vers de nouveaux objets (éducation à…, démarche d'investigation, questions socialement vives, etc.) et un intérêt plus accru pour des analyses de niveau micro situées au sein de cadres plus formalisés (PCK, TACD, double approche, etc.).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

DE HOSSON C. & KAMINSKI W. (2002). Les yeux des enfants sont-ils des "porte-lumière" ? *Bulletin de l'Union des Physiciens, 840, 143-160.*

DE HOSSON, C. & DECAMP, N. (2011). La procédure de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'Ératosthène » : un support pour une reconstruction didactique. *Grand N, 87, 77-91*.

DE HOSSON, C. & DELAYE, V. (2009). Comment voit-on les objets qui nous entourent ? A la découverte de la lumière, in. Djebbar A., de Hosson C. & Jasmin D. (eds), *Découvertes en pays d'Islam*, Paris : Le Pommier.

DE HOSSON, C. & KAMINSKI, W. (2007). Historical controversy as an educational tool. Evaluating elements of a teaching-learning sequence conducted with the "Dialogue on the ways that vision operates". *International Journal of Science Education, 29 (5),* 617-642.

DE HOSSON, C. (2004). Contribution à l'analyse des interactions entre histoire et didactique des sciences. Elaboration d'un support d'enseignement du mécanisme optique de la vision


[68] http://www.ardist.org/rencontres-scientifiques/colloques-scientifiques/actes-des-rencontres-de-marseille-2014/

pour l'école primaire et le collège et premiers éléments d'évaluation. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

DEWEY, J. (1925). *Logic: The Theory of Inquiry.* The later works.

GOLDBERG, F. & MCDERMOTT, L. (1987). An investigation of students' understanding of the real image formed by a converging lens or concave mirror. *American journal of physics, 1987,* n° 55, p. 108-119.

HALBWACHS, F. (1974). *Pensée physique chez l'enfant et le savant*. Delachaux et Niestlé.

HALLOUN, I. A., & HESTENES, D. (1985). Common sense concepts about motion. *Am. J. Phys, 53*(11).

KAMINSKI, W., & MISTRIOTI, Y. (2000). Optique au collège: le rôle de la lumière dans la formation d'image par une lentille convergente. *Bulletin de l'Union des Physiciens, 823,* 757-784.

LEMEIGNAN, G., & BARAIS, A. W. (1993). *Construire des concepts en physique: l'enseignement de la mécanique.* Paris : Hachette.

MATHE, S., MEHEUT, M., ET DE HOSSON, C. (2008). Démarche d'investigation au collège: quels enjeux? *Didaskalia, 32*, 41-76.

PERDIJON, J. (2006). *La formation des idées en physique*. Paris : Dunod.

PIAGET, J., & GARCIA, R. (1971). *Les Explications causales*. Paris : PUF.

RICE, K., & FEHER, E. (1987). Pinholes and images: children's conceptions of light and vision. I. *Science Education, 71(4),* 629-639.

ROBARDET, G. (1997). Le jeu des résistors: une situation visant à ébranler des obstacles épistémologiques en électrocinétique. *Aster, 24.*

ROCARD, M., CSERMELY, P., JORDE, D., LENZEN, D., WALBERG-HENRIKSSON, H., & HEMMO, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Luxembourg : Office des publications officielles des Communautés Européennes.

SALTIEL, E., & VIENNOT, L. (1985). ¿ Qué aprendemos de las semejanzas entre las ideas históricas y el razonamiento espontáneo de los estudiantes? *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 3*(2), 137-144.

SCHIELE, B. (1984). Note pour une analyse de la notion de coupure épistémologique. *Communication-Information: les représentations, 6 (2-3),* 43-98.

VIENNOT, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*. Paris : Hermann.

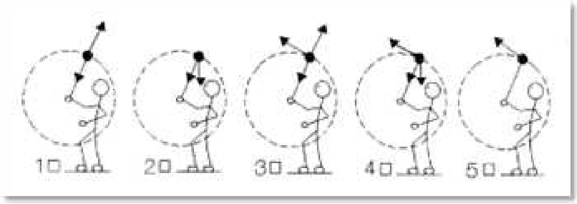
VIENNOT, L. (1996). *Raisonner en physique, la part du sens commun*. Paris-Bruxelles : deBoeck.

VIENNOT, L. (2006). Teaching rituals and students' intellectual satisfaction. *Physics education, 41(5)*, 400.

## ANNEXE 1 : EXEMPLE DE CLASSE DE SITUATIONS EN MECANIQUE NEWTONIENNE

- Au service, un joueur de tennis lance une balle en l'air. Représentez les forces qui s'exercent sur la balle juste après avoir quitté la main du lanceur.
- Un avion vole horizontalement et à vitesse constante; la résultante des forces de frottement qui s'exerce sur l'avion est représentée par la flèche grise. Représentez la résultante des forces de propulsion.

- Un individu immobile sur un tapis roulant avançant à vitesse constante lance une bille verticalement et vers le haut. A quel endroit cette bille retombera-t-elle ?
- Un enfant fait tourner une pierre attachée à un fil inextensible. Le mouvement s'effectue sans frottement. Quel schéma correspond aux forces qui s'exercent sur la pierre (dans le référentiel terrestre).




Les 5 situations suivantes renvoient aux deux premières lois de Newton et à la difficulté des étudiants à dissocier mouvement (au sens de vitesse) et forces (d'après Viennot 1979, Saltiel & Viennot 1985, Halloun & Hestenes 1985). Un étudiant qui raisonnerait en associant force et vitesse représenterait une flèche verticale et vers le haut sur la balle de la situation 1, une flèche horizontale et vers la gauche plus grande que la flèche représentée sur le schéma, indiquerait que la bille retombe derrière l'individu du tapis roulant et cocherait la case 3 (ou 4 ou 5) pour la dernière situation.

# L'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE EN SEGPA

Samuel **VOISIN**
ESPE de l'Académie de Caen
samuel.voisin@free.fr

**Résumé**

Dans notre thèse, nous avons questionné l'enseignement de la proportionnalité à des élèves de 11 à 16 ans relevant de l'adaptation scolaire et de la scolarisation des élèves handicapés. Les travaux de didactique des mathématiques ont montré l'inaboutissement fréquent du projet d'appropriation de la proportionnalité auprès des élèves jusqu'au collège et tout particulièrement en ASH. Afin de savoir si une adaptation peut se faire sans dénaturer le savoir, nous avons proposé une progression sur l'enseignement de la proportionnalité en classe de Quatrième SEGPA (Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté). Nous insistons sur l'importance de l'organisation des savoirs au sein de cette progression et sur la pertinence des contextes et des valeurs des variables didactiques numériques.

**Mots clés**
Proportionnalité, SEGPA, pertinence mathématique

## I. CONTEXTE DE NOTRE RECHERCHE

En France, la loi n° 2005-102 du 11 février 2005 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées, a pour objectif de garantir à toute personne handicapée l'accès aux droits fondamentaux reconnus à tous les citoyens. Elle est applicable depuis le 1er janvier 2006. Dans ce contexte, l'enseignement adapté revêt plusieurs formes et cache de très grandes disparités. Constitue au sens de la présente loi un handicap, toute limitation d'activité ou restriction de participation à la vie en société subie dans son environnement par une personne en raison d'une altération substantielle, durable ou définitive d'une ou plusieurs fonctions physiques, sensorielles, mentales, cognitives ou psychiques, d'un polyhandicap ou d'un trouble de santé invalidant. Le public de l'ASH peut donc relever de l'intégration ou de la scolarisation des élèves en grande difficulté d'apprentissage.

### I.1. Les SEGPA

La première phase de notre recherche a consisté en une analyse de pratiques ordinaires d'enseignement de la proportionnalité en SEGPA. Nous présentons ci-après le contexte particulier de la SEGPA. Il nous semble en effet important de préciser plusieurs éléments à propos des élèves et des enseignants de SEGPA.

### *I.1.a. Les élèves de SEGPA*

Afin de présenter les profils du public SEGPA, nous nous référons à la circulaire du 20 juin 1996 qui stipule que :

> « Les sections d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA) accueillent des élèves présentant des difficultés scolaires graves et persistantes auxquelles n'ont pu remédier les actions de prévention, de soutien, d'aide et d'allongement des cycles dont ils ont pu bénéficier. Ces élèves ne maîtrisent pas toutes les compétences attendues à la fin du cycle des apprentissages fondamentaux et présentent *a fortiori* des lacunes importantes dans l'acquisition des compétences prévues à l'issue du cycle des approfondissements. » Circulaire n°96-167 du 20 juin 1996 « Enseignements généraux et Professionnels Adaptés dans le second degré », BO n°26 du 27 juin 1996, RLR 501-5.

Les élèves de SEGPA sont donc bien repérés et désignés comme étant en difficulté. Cependant, dans le paragraphe qui suit, une nuance est apportée sur les difficultés que les élèves de SEGPA rencontrent dans leurs apprentissages :

> « Ils présentent sur le plan de l'efficience intellectuelle des difficultés et des perturbations qui ne peuvent être surmontées ou atténuées que sur plusieurs années et qui, sans relever du retard mental selon les critères définis par l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), se traduisent par des incapacités et des désavantages tels qu'ils peuvent être décrits dans la nomenclature des déficiences, incapacités et désavantages.
>
> Circulaire n°96-167 du 20 juin 1996 « Enseignements généraux et Professionnels Adaptés dans le second degré », BO n°26 du 27 juin 1996, RLR 501-5.

Depuis 2005, les Enseignements Généraux et Professionnels Adaptés s'inscrivent dans le cadre des actions menées au bénéfice des élèves en difficulté au collège. Ainsi, selon l'institution, les élèves des classes de SEGPA sont des collégiens au même titre que les autres. Ils sont donc assujettis au programme du collège ; cependant, ces programmes sont appliqués par les enseignants d'une façon spécifique. On observe ainsi souvent des retards dans l'introduction de certaines notions.

### *I.1.b. Les enseignants de SEGPA*

Au sein des SEGPA, nous trouvons deux catégories d'enseignants. Les enseignements disciplinaires en SEGPA sont statutairement assurés par des professeurs des écoles qui dépendent de l'ASH. Ils ont, la plupart du temps, suivi une formation de spécialisation. Les enseignements qui ont lieu dans les ateliers professionnels sont assurés par des professeurs de Lycées Professionnels. Ces ateliers sont constitués autour de champs professionnels (habitat ; hygiène, alimentation, service ; espace rural et environnement ; production industrielle ; vente, distribution, magasinage).

Dans les SEGPA, il existe différents systèmes de répartition des matières entre les enseignants. Les enseignants peuvent préférer un niveau ou une classe ou des disciplines. Ainsi, nous trouvons des fonctionnements différents. Certains enseignants de SEGPA préfèrent enseigner un petit nombre de disciplines à plusieurs classes, et se rapprochent du modèle des enseignants certifiés, d'autres qui sont ancrés dans l'organisation du premier degré revendiquent leur polyvalence et préfèrent prendre en charge un groupe classe et assurer ainsi les enseignements de disciplines très variées.

Même si les professeurs des écoles ont été formés à l'enseignement des mathématiques au primaire, et sensibilisés à l'enseignement des mathématiques au secondaire, ils ne sont pas nécessairement issus de filières scientifiques. Leur pertinence mathématique au sens de Bloch (2009) peut potentiellement faire défaut.

### *I.1.c. Les adaptations scolaires en SEGPA*

Selon les textes officiels en vigueur concernant l'adaptation scolaire, plusieurs pratiques relèvent d'une adaptation des enseignements à destination des élèves de SEGPA. On trouve

une adaptation des enseignements dispensés aux élèves qui passe par l'aménagement des situations, des supports et des rythmes d'apprentissage, l'ajustement des démarches pédagogiques et des approches didactiques. Cette adaptation favorise les pratiques de différenciation et d'individualisation pédagogique. Une autre piste proposée par l'institution évoque les pratiques de projet qui peuvent être mises en œuvre tout au long de la scolarité. Leur réalisation ne doit pas être conçue comme une fin en soi, mais comme un moyen d'inscrire les objectifs d'apprentissage définis par les programmes dans des dynamiques qui rendent les élèves pleinement acteurs de leur formation. Le recours à des situations de recherche ou de résolution de problèmes, quel qu'en soit le contexte disciplinaire est également présenté comme une pratique motivante pour les élèves. En effet, ces situations sollicitent et stimulent la réflexion et le réinvestissement et elles favorisent les interactions au sein de la classe. L'apprentissage peut aussi passer par la pratique régulière d'exercices d'entraînement visant l'élaboration de stratégies autant que l'acquisition d'automatismes. Enfin l'élaboration et l'organisation des traces écrites des élèves doivent faire l'objet d'une attention particulière. Elles peuvent être brèves mais devraient constituer des outils de référence et permettre l'organisation méthodique des connaissances.
Pour notre recherche, nous avons questionné plusieurs de ces modalités d'adaptation. Nous avons ainsi retenu l'aménagement des situations et l'ajustement des approches didactiques.

## I.2. L’enseignement de la proportionnalité en SEGPA

### *I.2.a. Les apports des recherches antérieures*

La proportionnalité a fait l’objet de nombreuses recherches en didactique des mathématiques. Nous ne présentons ici que certains résultats de ces travaux, notamment pour expliciter les choix que nous avons faits en vue de notre expérimentation concernant l’enseignement de la proportionnalité en SEGPA.
Dans sa thèse, Belmas (2001) a étudié l'apprentissage de la proportionnalité et les symbolisations chez des élèves en échec scolaire. Dans sa recherche, il développe l'idée d'un apprentissage conceptuel de la proportionnalité qui ne se substitue pas à l'apprentissage des techniques mais se surajoute. Nous nous sommes appuyés sur son travail et avons proposé un approfondissement du questionnement relatif à l’apprentissage des techniques. Notre progression propose une certaine articulation des présentations de techniques afin de donner progressivement du sens au coefficient de proportionnalité. L’apprentissage conceptuel est donc visé sous un angle particulier, celui d'une prise en compte des valeurs numériques afin de choisir au mieux les modalités de résolution.
L'enseignement de la proportionnalité a été conçu par Mopondi (1986) comme un support à l'étude du problème de sens dans la négociation didactique en vue de l’institutionnalisation d'un algorithme. Dans sa thèse, il a retenu trois algorithmes associés aux tâches relevant de la proportionnalité : la règle de trois, la vérification et la comparaison. Il a mis en évidence le fait que la fréquence de l’utilisation d’une procédure de résolution de proportionnalité et son efficacité sont liées au choix des valeurs numériques en jeu dans les situations. En partant de ce constat, nous avons choisi d’utiliser certains outils de la TSD pour l’analyse *a priori* de notre progression. En effet, les choix relatifs aux variables didactiques numériques ont une incidence sur la réussite des élèves confrontés à des problèmes relevant de la proportionnalité.
Dans sa thèse, Comin (2000) propose une vision de la proportionnalité sous l'angle de la relation fonctionnelle. Il insiste sur le rôle, au niveau didactique, de la propriété de linéarité multiplicative, qu’il nomme « rapport interne ». Il nous a semblé pertinent de nous appuyer sur ses travaux en insistant sur le statut et le rôle des grandeurs dans ces relations fonctionnelles. Néanmoins, Comin émet l'hypothèse d'une introduction des fractions dès les premières leçons dans l’enseignement au collège. Vu les difficultés rencontrées par les élèves de SEGPA dans l'acquisition des notions relatives aux fractions, notre travail d'adaptation a

notamment consisté à élaborer une progression qui ne fasse intervenir les fractions ni comme objet d'enseignement, ni comme outil.
Des deux paradigmes, fonction linéaire et théorie des proportions, nous avons choisi pour notre expérimentation la modélisation de la notion de proportionnalité par la fonction linéaire. Il nous a cependant fallu contourner les difficultés liées au registre algébrique de la fonction linéaire. Vu nos observations exploratoires, jusqu'en quatrième SEGPA, les élèves de SEGPA ne sont pas habitués au registre algébrique. Un changement de registre nous a semblé peu pertinent au regard des compétences observées chez les élèves.

### *I.2.b. Les ateliers, un lieu d'apprentissage*

D'après nos observations exploratoires, au sein des questionnements et des savoirs existant dans les ateliers, la proportionnalité est abordée comme un outil. Le contexte de la situation d'enseignement permet aux enseignants et aux élèves de valider une relation de proportionnalité. Le repérage des indices de la proportionnalité constitue un enjeu de savoir. Dans l'action, la recherche d'une quatrième proportionnelle s'effectue très souvent grâce à l'utilisation du produit en croix. Nous nous demandons dans quelle mesure cet outil ne constitue pas un obstacle supplémentaire à la constitution du champ de savoirs complexes relatifs à la proportionnalité dans les cours de mathématiques. Même si les ateliers constituent des lieux d'apprentissage, il semble important de signaler qu'une grande place est accordée à l'oralité dans l'introduction des savoirs.

### *I.2.c. Des pratiques ordinaires dans l'enseignement adapté*

Lors du travail exploratoire précédant notre expérimentation, nous avons mené des entretiens avec des enseignants de SEGPA, consulté des cahiers d'élèves, des devoirs notionnels et des fiches de préparation de séances en classe de Quatrième. Nous avons, à cette occasion, observé trois types d'introduction de l'enseignement de la proportionnalité. Ces données ont permis une première approche des modalités d'adaptation et nous ont donné l'occasion d'appréhender des choix pédagogiques et didactiques effectués par des enseignants de l'ASH. Nous avons observé des introductions de la proportionnalité dans différents registres. On trouve ainsi :

- une étude des grandeurs dans le cas d'un agrandissement de figure ;
- l'observation par les élèves des caractéristiques de la représentation graphique d'une situation de proportionnalité ;
- l'appui sur les recettes de cuisine et l'étude de relation entre deux grandeurs.

Nous avons été « interpellés » par le constat d'un recours systématique à l'utilisation des tableaux de proportionnalité avec un format standardisé à deux lignes. Les enseignants justifient cette utilisation fortement répandue en référence aux manuels consultés et aux usages sociaux. Le travail de repérage des indices de la proportionnalité dans les énoncés est souvent mené en classe par les enseignants. À l'opposé, le tableau constitue un signe de la proportionnalité (y compris si la situation ne relève pas du modèle proportionnel) pour les élèves de SEGPA.
Partant de ce constat, il nous a semblé pertinent de nous concentrer sur la tâche de repérage de ces indices de proportionnalité en proposant des contextes variés faisant sens pour les élèves de SEGPA. La tâche de modélisation dans un tableau s'en trouve (pour cette expérimentation) secondaire. L'utilisation des tableaux n'est qu'un artefact nécessaire dans notre expérimentation.

### *I.2.d. Un test exploratoire*

À l'issue de ces observations naturalistes, notre première action a été de tenter de mesurer,

dans des classes de SEGPA, les aptitudes et les pratiques des élèves et des enseignants concernant différentes tâches liées à la notion de proportionnalité. Nous avons, pour cela, élaboré un test qui nous a permis de mesurer, sur un petit échantillon, l'usage des différentes techniques relatives à la proportionnalité. Plusieurs conclusions ont pu être dégagées et nous présentons ci-après des résultats qui nous semblent les plus marquants.
Le taux de non réponse est important chez les élèves. Nous mettons en évidence un comportement des élèves de l'ASH que nous attribuons au fait que les élèves dans l'ASH n'osent plus essayer de peur de se tromper, ayant une mauvaise image d'eux-mêmes. Nous avons observé que la linéarité était peu utilisée même lorsque les valeurs des variables didactiques suscitent cette procédure. Nous en avons donc conclu que ces procédures devaient faire l'objet d'un apprentissage spécifique afin que les élèves s'en emparent.
L'utilisation du produit en croix a été fortement observée chez les élèves des classes de Quatrième et de Troisième ; néanmoins cette utilisation n'a pas été un gage de réussite. L'utilisation du produit en croix ne garantit pas l'exactitude des réponses. Qui plus est, cette utilisation nécessite davantage d'opérations que d'autres techniques. En analysant dans le détail les réponses dans différentes classes de SEGPA, nous pouvons conclure à une pratique homogène du produit en croix dans une des SEGPA observées. Une forte cohésion d'équipe, l'habitude du travail par projet sont autant d'explications à cette observation. Nous avons eu l'occasion de suivre des heures de coordination et de synthèse de cette équipe pédagogique. Les projets transdisciplinaires sont nombreux. Les professeurs d'ateliers sont sollicités par les professeurs des écoles et en retour impulsent des habitudes issues du monde professionnel.
Ces constats ont orienté nos choix relatifs à l'organisation des savoirs dans la progression que nous avons construite.
Un autre constat a eu une répercussion sur l'expérimentation menée pour répondre à notre problématique. Les élèves questionnés par ce test étaient confrontés à des énoncés textuels et il leur était demandé de laisser les calculs afin de pouvoir les interpréter. Près d'un quart des questionnaires ont été rendus sans aucune trace de calcul. Toute interprétation quant à l'utilisation d'une procédure était alors impossible. Dias (2008) évoque la difficulté à identifier des connaissances. En rappelant que ce sont les adaptations des élèves aux rétroactions du milieu qui témoignent de la mise en acte des connaissances, il note, dans le contexte de l'ASH, une certaine illisibilité des interactions avec le milieu (ses objets et ses acteurs) :

> - les signes produits ne sont pas toujours des mots (oral ou écrit) : ils sont difficiles à percevoir dans la classe pour des raisons d'impossibilité de contrôle de toutes les productions des élèves, mais aussi par la difficulté d'attribuer des indices de signification dans un milieu expérimental […] (Dias, *ibid.*, p. 122-123)

Il y a une différence entre l'activité des élèves et les traces qu'il nous est donné d'observer. Dans l'enseignement spécialisé, ces différences peuvent s'accentuer. Ainsi, Dias note plusieurs raisons à cette accentuation :

> - certains élèves ne révèlent qu'une petite partie de leurs connaissances pour éviter de prendre le risque d'une trop grande exposition à l'échec, ceci pouvant conduire l'enseignant à une sous-évaluation de leurs capacités,
> - d'autres ne sont pas à même de produire les signes nécessaires à la restitution de leurs connaissances (c'est le cas particulièrement avec les élèves souffrant de troubles sévères du langage),
> - enfin certains élèves manifestent un grand nombre de connaissances "en vrac" dont une faible partie est appropriée à la situation ce qui rend l'évaluation difficile pour l'enseignant. (Dias, *ibid.*, p. 123)

Des contraintes fortes liées au lieu de notre expérimentation rendaient impossibles des entretiens avec les élèves. Dans notre progression adaptée, nous avons donc proposé non seulement des énoncés textuels mais aussi des tableaux, afin d'inciter les élèves à symboliser les calculs par des flèches ou à écrire les calculs à proximité des cases. Ce choix peut laisser penser qu'il s'agit là d'une réduction des tâches proposées aux élèves, mais la question ne se situe pas à ce niveau. Il nous semble important d'affirmer ici qu'il s'agit d'une nécessité de la recherche. Si nous voulions observer les productions écrites des élèves et dégager du sens, nous devions les inciter à laisser des traces significatives. Nous sommes tout à fait conscients que l'utilisation abusive des tableaux ne permet pas aux élèves d'aborder entièrement l'étude de la proportionnalité dans les différents registres (géométrique, grandeurs, numérique, graphique). Nous émettons l'hypothèse que les tableaux constituent en eux-mêmes un registre de représentation sémiotique pour la proportionnalité.

### I.3. Du contrat didactique en SEGPA

Selon Bloch (2013), des effets de contrats sont clairement identifiés en ASH et diffèrent selon l'institution. « En SEGPA, on peut voir, à côté d'élèves en retard d'apprentissage, des élèves peu tolérants aux contraintes de la classe, et pour lesquels, parfois, apprendre c'est faire – une fois ! - une technique.». Dans l'ASH les types de handicap des élèves constituent une série des contraintes. Il existe d'autres contraintes qui induisent des dysfonctionnements didactiques dus à des prises de décision qui ne se révèlent pas toujours adaptées. « [...] le professeur est dans un pilotage contraint par l'extrême difficulté qu'il y a à manifester (côté élève) et à constater (côté professeur) des connaissances ; et (que) cette grande incertitude ne lui permet pas toujours de prendre les bonnes décisions. » (Bloch, *ibid.*). Dans la mise en œuvre, d'une part, les comportements attendus au cours des phases d'action ont tendance à être perçus, par les élèves, comme l'objectif visé par l'enseignant et d'autre part, l'enseignant éprouve des difficultés à observer, dans l'action, l'acquisition des connaissances. On observe alors des phénomènes d'enlisement et un retard dans l'avancement didactique des processus d'institutionnalisation.

Selon Favre (2004), des conditions particulières régissent et contraignent l'avancement du temps didactique dans une classe de l'enseignement spécialisé. La première condition retenue est le fait que l'enseignant se retrouve majoritairement avec des élèves en échec. La deuxième condition est l'organisation temporelle des enseignements de mathématiques qui se démarque de l'organisation classique. Favre distingue ainsi les échecs « antérieur (préalable), présent (effectif) et anticipé (potentiel) ».
Dans le cadre de notre recherche, la non maîtrise des tables de multiplication, l'incapacité à reconnaître ou identifier les facteurs dans un produit donné, la méconnaissance des critères de divisibilité, sont autant de manques qui ont des incidences directes sur l'enseignement de la proportionnalité. Ces échecs, qu'ils soient préalables, effectifs ou potentiels gênent l'acquisition de nouvelles connaissances ou la réintroduction de connaissances anciennes. En effet, le manque d'efficacité ou de réussite dans les procédures de calcul freine la réussite des élèves dans les tâches relatives à la proportionnalité.
Les élèves de SEGPA ont déjà été confrontés à des apprentissages relatifs à la proportionnalité depuis plusieurs années dans leur scolarité antérieure. Pour notre expérimentation nous avons donc effectué un choix raisonnable mais non orthogonal aux connaissances des élèves, ceci pour permettre un accès au sens et aux apprentissages. Plusieurs questions ont guidé ce choix : Qu'ont-ils retenu de la proportionnalité au primaire notamment ? Des techniques relatives à la proportionnalité sont-elles déjà figées ?

## II. PROBLEMATIQUE ET ORGANISATION DE L'EXPERIMENTATION EN SEGPA

La question de l'adaptation des enseignements à un public particulier est donc plurielle. Nous parlons de public particulier dans le sens où ce public est défini selon certaines particularités que nous avons déjà exposées précédemment. Nous ne voulons pas stigmatiser une catégorie d'élèves mais nous ne pouvons nier les difficultés que rencontrent les élèves de SEGPA et,

plus largement les élèves relevant de l'ASH, dans l'exercice de la citoyenneté (trouver une formation, un emploi, s'adapter aux mutations professionnelles ...).
Quelles formes prend l'adaptation selon les publics concernés, selon les savoirs à enseigner ?
Au delà des difficultés épistémologiques liées à la proportionnalité, ce qui a motivé notre recherche est la prise en compte du collectif dans les actions d'enseignement. Ainsi notre problématique questionne la possibilité de construire un mode d'accès au savoir qui prenne en compte les spécificités de gestion de classe des SEGPA, sans sacrifier les situations et les contenus. Nous avons proposé une progression que nous avons conçue en adaptant des exercices de l'enseignement ordinaire et en proposant une organisation spécifique des savoirs.
Lors de la construction de cette progression sur la proportionnalité à destination des élèves de SEGPA, notre but était de fournir un support adapté à cet apprentissage, sans oblitérer le sens de cette notion, ni « écraser » les variables didactiques impliquées. Pour cela nous avons adapté essentiellement des situations extraites de manuels de l'enseignement ordinaire de façon à conserver un niveau de difficulté suffisant et à varier les contextes des problèmes.
Un autre élément à prendre en compte est notre souhait de présenter aux élèves de SEGPA la notion de proportionnalité entre grandeurs sans avoir besoin de recourir aux fractions.
Dans cette progression nous avons fait le choix de présenter, en premier lieu, les techniques de linéarité - plus intuitives si l'on se réfère à nos premières observations et aux programmes de l'enseignement primaire. Nous avons ensuite organisé une construction du statut et du rôle du coefficient de proportionnalité. Pour ce faire, le passage par l'unité joue le rôle charnière dans cette progression. Si l'on excepte les unités, l'observation de l'égalité entre le coefficient de proportionnalité et l'image de l'unité est, selon nous, une alternative à la conceptualisation du coefficient de proportionnalité comme grandeur quotient (quand il y a des grandeurs).
Nous avons décidé de ne pas trop nous éloigner des pratiques ordinaires du contexte de SEGPA, ainsi notre progression se veut proche des ressources disponibles.

## II.1 Des choix qui régissent notre progression

Nous avons décidé de présenter dans un premier temps des situations affichées comme étant de proportionnalité avant de questionner les élèves sur le caractère proportionnel ou non des situations proposées. Ceci nous permet de présenter les différentes techniques aux élèves.
Nous avons fait le choix de de pas faire figurer d'indication de gestion puisque les manuels en sont généralement dépourvus.
Enfin, nous avons décidé d'utiliser les tableaux puissent qu'ils nous permettent d'identifier les procédures utilisées par les élèves ou l'enseignant.

### *II.1.a. Notre progression*

Nous avons abordé à la fois la linéarité additive dans le sens direct et la linéarité multiplicative dans le sens direct dans une séance et la linéarité additive dans le sens réciproque et la linéarité multiplicative dans le sens réciproque[69] dans une autre séance. Nous avons souhaité ne pas regrouper la linéarité additive dans les sens direct et réciproque d'une part et la linéarité multiplicative dans les sens direct et réciproque d'autre part puisque le gel des procédures est un effet de contrat bien identifié dans l'ASH.
Les élèves de SEGPA ont des difficultés à reconnaître la division comme étant l'opération

69 Cette nomenclature des procédures est définie dans notre thèse. Voici, sans précautions sur les symboles, l'essentiel :

Linéarité additive dans le sens direct : $f(x+y)=f(x)+f(y)$
Linéarité additive dans le sens réciproque : $f(x-y)=f(x)-f(y)$
Linéarité multiplicative dans le sens direct : $f(kx)=kf(x)$
Linéarité multiplicative dans le sens réciproque : $f(x:k)=f(x):k$

réciproque de la multiplication. L'identification d'un produit ou la détermination d'un facteur connaissant le produit et un autre facteur leur posent problème. Il est avéré que les élèves de SEGPA sont plus familiers du modèle additif que du modèle multiplicatif *i.e.* qu'ils sont plus à l'aise dans la détermination d'un rapport arithmétique que dans la détermination d'un rapport géométrique. Nous nous sommes donc efforcés de ne pas insister sur la qualification du coefficient de proportionnalité comme grandeur quotient. Nous avons ainsi proposé un milieu qui comporte à la fois des rapports arithmétiques et des rapports géométriques pour les séances concernées par les techniques relatives à la linéarité.

#### *II.1.b. Des représentations schématiques pour chaque technique*

Dans leur article de 2006, Levain, Le Borgne et Simard relatent une expérimentation menée en SEGPA sur la résolution de problèmes mathématiques. Les auteurs ont mesuré l'impact d'un protocole d'aide à la résolution de problèmes. Ce protocole est basé sur l'apprentissage et l'analyse de schémas représentant les différentes classes de problèmes. Ils mettent en avant que l'apprentissage de schémas se révèle coûteux pour les élèves du fait d'une surcharge cognitive. Pour notre expérimentation, nous nous sommes abstenus de proposer aux élèves l'étude de schémas représentant les différentes techniques de résolution de problèmes relevant de la proportionnalité. Nous avons, en revanche, proposé ces différents schémas à l'enseignant de SEGPA qui a mis en œuvre notre progression. Ces représentations sont détaillées dans notre thèse (Voisin, 2013).

### II.2 Présentation des séances de la progression

Nous proposons ci-dessous une présentation succincte des séances de cette progression en nous focalisant sur les contextes proposés dans les différents exercices et sur les adaptations que nous avons prévues pour les élèves de SEGPA. Le lecteur trouvera les séances de notre progression en annexe.

#### *II.2.a. Séance 1 : Recette d'une pâte à crêpes*

La séance 1 a été prévue comme un questionnement initial sur les relations entre grandeurs dans le cadre de la proportionnalité. Une recette de pâte à crêpes est donnée sous forme d'une liste de sept ingrédients avec les quantités prévues pour quatre personnes. Trois élèves fictifs sont supposés faire cette recette chez eux mais pour deux personnes, pour huit personnes et pour six personnes. L'analyse sémantique de l'énoncé doit amener les élèves de SEGPA à préciser la notion de proportionnalité dans le cas des recettes. La formulation usuelle dans l'enseignement ordinaire est : « la recette proposée par chaque élève sera identique à celle proposée sur l'énoncé si les proportions entre les ingrédients sont respectées ». Cette formulation prend appui sur la théorie des proportions mais ceci ne fait pas sens pour des élèves qui ne se servent pas des fractions. Une autre validation peut être effectuée par les élèves de SEGPA. Il s'agit d'une validation par l'observation de relations de linéarité qui sont prévues par le milieu. Trois relations de linéarité sont possibles : « le double », « la moitié » et « moitié plus ». Les élèves de SEGPA sont ainsi amenés à observer des relations entre mesures d'une même grandeur (le nombre de personnes) et à appliquer cette relation de linéarité pour toutes les autres grandeurs.

#### *II.2.b. Séance 2 : Les principes de linéarité de la proportionnalité additive et multiplicative dans le sens direct*

Au cours de la séance 2, trois exercices sont proposés dont les valeurs numériques sont choisies de manière à inciter les élèves à observer et utiliser des relations de linéarité additive et multiplicative dans leur sens direct. Nous nous intéressons aux indices sémantiques de la

proportionnalité dans chacun de ces trois exercices.
Le premier exercice a pour contexte un individu qui roule à vélo. Les élèves doivent comprendre que cet individu ne se fatigue jamais sur les parcours proposés et qu'il est d'une régularité sans faille. Pour ce faire, nous proposons la formulation usuelle « cet individu roule toujours à la même vitesse ». Cette formulation est une adaptation qui permet aux élèves de SEGPA de comprendre que l'on peut utiliser la proportionnalité entre les grandeurs distance et temps dans le cas d'une vitesse constante.
Le deuxième exercice est de nouveau contextualisé par une recette de mousse au chocolat mais seulement deux ingrédients de celle-ci sont étudiés : le nombre d'œufs et le nombre de personnes. Les indices de la proportionnalité sont restreints à la formulation : « la même mousse au chocolat pour un autre nombre de personnes ». Là encore, les élèves de SEGPA sont amenés à travailler directement avec les valeurs numériques puisque les indices de proportionnalité sont partagés entre un implicite sur l'idée « d'une même mousse au chocolat » et sur une reconnaissance de relations arithmétiques et géométriques entre données numériques présentes dans l'énoncé.
Le troisième exercice se base sur un savoir social : « il y a proportionnalité entre le coût et la quantité achetée dans les cas de prix fixes à l'unité, au kilogramme ou au litre ». L'énoncé n'évoque pas de prix au kilogramme fixe puisque l'utilisation d'un tel coefficient de proportionnalité n'est pas visée à ce moment de la progression. Nous informons donc les élèves du caractère proportionnel de la situation par la formulation suivante : « ce tableau relevé chez un marchand est un tableau de proportionnalité ». Le tableau en question contient deux lignes qui représentent les deux grandeurs : la quantité en kilogrammes de pommes achetées et le coût en euros.

### *II.2.c. Séance 3 : Les principes de linéarité de la proportionnalité additive et multiplicative dans le sens indirect*

La séance 3 est constituée de trois exercices pour lesquels les valeurs numériques sont choisies de manière à inciter les élèves à observer des relations de nature arithmétique (différence) ou de nature géométrique (quotient). Les élèves sont ainsi incités à utiliser la linéarité entre les mesures de grandeurs proportionnelles.
L'exercice 1 comprend des indices sémantiques qui permettent aux élèves d'identifier une relation de proportionnalité : « crêpes, cuisinier, mélanger, ingrédients » et « proportionnalité ». Dans la première partie de l'énoncé, il est sous-entendu que le cuisinier connaît son métier et doit s'assurer du caractère proportionnel de la situation. Ainsi les deux grandeurs en jeu – le nombre d'œufs et la quantité de farine en grammes – sont bien proportionnelles. Si les élèves n'en ont pas encore pris conscience, la suite de l'énoncé précise que les élèves doivent compléter le tableau de proportionnalité.
La même technique est utilisée dans l'exercice 2. Les grandeurs proposées sont un nombre de personnes qui mangent dans un restaurant et une quantité de riz en grammes. Soit les élèves savent déjà que les quantités servies dans un restaurant sont standards et qu'il y a donc proportionnalité entre ces deux grandeurs ; soit nous enrichissons leur répertoire des contextes de proportionnalité. Les élèves de SEGPA ont suivi des cours en atelier « Hygiène Alimentation Services » durant lesquels ils sont amenés à prendre connaissance de règles concernant la restauration en collectivité. Dit autrement, les restaurateurs proposent des quantités fixées indépendamment de l'appétit des clients.
Dans l'exercice 3, il est précisé aux élèves que « le prix est proportionnel au nombre de bouteilles d'eau achetées ». Cette formulation est une adaptation que l'on peut observer dans la vie courante de la formulation plus rigoureuse : « le coût est proportionnel à la quantité d'objets achetés lorsque le prix à l'unité est fixe ». On observe donc ici une adaptation du vocabulaire : « prix » au lieu de « coût » et une absence de mention de prix fixe à l'unité. Cette absence est due à notre intention de proposer aux élèves le passage par l'unité dans la

séance suivante. Cet exercice constitue donc une transition dans notre progression.

### *II.2.d. Séance 4 : Le passage par l'unité et l'introduction du coefficient de proportionnalité*

La séance 4 est composée de trois exercices. Le premier est conçu pour présenter une identification d'un coefficient de proportionnalité grâce au passage par l'unité. Les deux suivants permettent un réinvestissement de cette technique du passage par l'unité.
Le contexte retenu pour le premier exercice est l'étude de la relation entre deux grandeurs proportionnelles que sont le coût en euros et la quantité de café en kilogrammes achetée. Dès le début de l'exercice, il est rappelé aux élèves que le prix du café est fixé au kilogramme. C'est un indice fort de la proportionnalité dans le sens où c'est aussi un savoir social. Les élèves sont amenés par le jeu sur les valeurs numériques à utiliser la linéarité et à calculer le prix en euros d'un kilogramme de café. Dans un deuxième temps de cet exercice, nous proposons une formulation rattachée au coefficient de proportionnalité : « avec ce prix au kilogramme ». Les élèves sont ainsi mis en position de questionnement sur la relation numérique entre la grandeur quotient « prix au kilogramme » et le prix en euros d'un kilogramme.
L'exercice qui suit vise le même but : calculer l'image de l'unité de la première grandeur afin d'utiliser cette mesure soit dans le cas de la linéarité multiplicative soit dans la construction de la grandeur quotient. Le contexte précisé aux élèves relève du mouvement uniforme. La grandeur quotient n'est pas la vitesse mais la distance parcourue en fonction du nombre de tours de pédales qu'un individu effectue pour se déplacer à vélo. Les indices de la proportionnalité sont basés sur l'emploi du mot « même » : « Franck fait du vélo sur le même plateau et sur le même braquet ; pour chaque tour de pédale il avance du même nombre de centimètres ». Cette acception du mot « même » doit évoquer chez les élèves la notion de proportionnalité. La formulation de la phrase évoque une relation fonctionnelle entre les grandeurs ce qui permet de donner du sens au coefficient de proportionnalité comme grandeur quotient. Afin d'aider les élèves de SEGPA à reconnaître une situation de proportionnalité dans cet exercice, nous précisons dans le texte qu'il s'agit effectivement d'une relation de proportionnalité.
Le dernier exercice de cette séance a pour contexte le prix payé en euros en fonction du nombre de tours de manèges effectués. Là encore les mesures de ces grandeurs incitent les élèves à calculer le prix d'un tour de manège par l'utilisation de la linéarité. La question est explicitement posée de la manière suivante : « Quel est le prix d'un tour de manège ? ».
Durant cette séance, les élèves sont amenés à observer la relation fonctionnelle entre les grandeurs. Ceci se fait par formulation sur les relations entre les grandeurs grâce à l'utilisation du paradigme : « en fonction de ».

### *II.2.e. Séance 5 : Le coefficient de proportionnalité et le passage entre les lignes*

La séance 5 est prévue pour faire étudier aux élèves de SEGPA les relations entre les lignes de tableaux de proportionnalité. Dans cette séance, composée de quatre exercices, les élèves sont confrontés à des signes de la proportionnalité. Nous munissons en effet les tableaux de flèches opérateurs entre les lignes. Les indices d'une relation de proportionnalité sont disponibles dans la première case de chaque ligne puisque nous faisons figurer les grandeurs ainsi que les unités retenues pour leur mesure. Par ailleurs, il est demandé aux élèves de compléter les bulles qui représentent l'aspect fonctionnel entre les grandeurs. Ainsi les élèves de SEGPA peuvent, dans un premier temps, déterminer le coefficient de proportionnalité puis l'appliquer dans le sens direct ou dans le sens réciproque.
Dans le premier exercice, il s'agit de la quantité de lait en centilitres en fonction du nombre de personnes. La contextualisation est à la charge des élèves (imaginer un goûter ou une recette). Calculer le coefficient de proportionnalité revient ici à trouver un facteur connaissant le

produit et l'autre facteur. Les élèves appliquent donc le coefficient de proportionnalité dans le sens direct après l'avoir calculé.
Dans le deuxième exercice, les grandeurs sont les mêmes qu'au premier exercice, mais cette fois-ci le coefficient de proportionnalité est explicitement marqué comme opérateur entre les lignes. Les élèves doivent calculer des images et des antécédents. Autrement dit, ils sont confrontés à l'utilisation du coefficient de proportionnalité dans le sens direct et dans le sens réciproque.
Dans le troisième exercice, nous donnons plusieurs signes montrant le caractère proportionnel de la situation. En plus de la flèche opérateur entre les lignes, figure dans le texte l'information « c'est une situation de proportionnalité ». Cette information nous semble nécessaire puisque cette situation est une conversion de durées. Les conversions peuvent ne pas relever de la proportionnalité (température en degrés Celsius, en degrés Fahrenheit, en degrés Kelvin), mais nous avons fait le choix de présenter le caractère proportionnel de la conversion en minutes des heures et réciproquement.
Le quatrième exercice est décontextualisé de toute grandeur. Les élèves doivent compléter à l'aide de la calculatrice un tableau de proportionnalité. La première tâche est le calcul du coefficient de proportionnalité puis, dans un deuxième temps, les élèves ont à appliquer ce coefficient de proportionnalité dans le sens direct et dans le sens réciproque.
Ce dernier exercice est une transition entre la séance 5 et la séance 6. En effet, nous avons fait le choix de proposer aux élèves un tableau de proportionnalité en y adjoignant un coefficient de proportionnalité. En ne proposant aucune référence aux grandeurs, nous avons voulu privilégier l'aspect fonctionnel de ce dernier.

### *II.2.f. Séance 6 : Reconnaissance de tableaux de proportionnalité*

La séance 6 est composée de six exercices dont deux sont contextualisés avec des grandeurs. Les élèves ont à se prononcer sur le caractère proportionnel éventuel dans chacun des cas. L'objectif visé est la réutilisation des techniques présentées dans les séances 1 à 5 dans le but de valider ou d'invalider une relation de proportionnalité dans le registre numérique et dans celui des grandeurs. Les deux exercices contextualisés proposent respectivement pour l'un, une relation entre la quantité de pêches en kilogrammes et le prix en euros et pour l'autre, le prix en euros et la quantité d'essence en litres que l'on a pu acheter. La première relation fonctionnelle est celle d'usage et fait appel au prix au kilogramme. La deuxième relation est volontairement inversée par rapport aux usages sociaux. Les élèves sont incités à se questionner sur la place des grandeurs dans chaque ligne. Il serait plus cohérent socialement d'étudier le coût en euros en fonction de la quantité de litres de carburant. Nous avons d'ailleurs choisi, pour cet exercice, un coefficient de proportionnalité demi-entier pour cette relation plus usuelle entre les grandeurs afin d'observer les pratiques des élèves. En d'autres termes, nous avons voulu permettre aux élèves de relativiser l'ordre des lignes et privilégier l'étude de la relation fonctionnelle entre des grandeurs.

## III. COMPTE-RENDU DES EXPERIMENTATIONS

Nos observations ont été analysées en référence à deux cadres théoriques distincts : la Théorie des Situations Didactiques et la Double Approche (Robert et Rogalski, 2002). Il est nécessaire de clarifier la méthodologie utilisée pour l'analyse et l'interprétation des données recueillies lors de notre expérimentation. Ces deux cadres théoriques sont utilisés conjointement mais chacun a son utilité spécifique. C'est ce que nous montrons ci-après.

## III.1. Interprétants observés relatifs aux élèves

### *III.1.a. Outils d'analyse*

Dans l'analyse de nos observations, nous avons utilisé le modèle milieux/répertoires/symboles défini par Bloch et Gibel (2011). Ce modèle se réfère à la TSD et à la sémiotique peircienne. Il se développe en trois axes dans l'étude des niveaux de milieux M-2 (milieu objectif ou heuristique), M-1 (milieu de référence) et M0 (milieu d'apprentissage).
Dans l'analyse des raisonnements, il s'agit d'observer ce que les élèves donnent à voir des raisonnements (ces raisonnements dépendent du milieu dans lequel les élèves se situent). Il s'agit aussi de prendre en compte les représentations observées (ces représentations traduisent des raisonnements produits dans la situation par les différents protagonistes).
Bloch et Gibel proposent de relever différents types de justifications en situation de validation ou de décision. La justification est syntaxique lorsque l'argumentation se réfère à des règles formelles (par exemple une démonstration de la validité du discours à l'aide des règles permises). La justification est sémantique lorsqu'il y a argumentation de la pertinence et de la validité des modèles. Cette pertinence est établie en se référant aux objets mathématiques pris en compte pour l'argumentation. La justification est pragmatique lorsque la validité et l'intérêt de la procédure sont pris en référence à l'adéquation du modèle.
Gibel (2009) définit le répertoire didactique de la classe comme l'ensemble des moyens sémiotiques que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement. La fonction du répertoire est de faciliter la formulation des actions rendues nécessaires par la situation.
Nos observables sont constitués de discours, de propositions, de questions, de relances et de productions écrites sur les cahiers ou sur le tableau de la classe. Dans tous ces observables, nous avons entrepris de classer ce qui est du ressort de l'argumentation, afin de voir si cette argumentation est d'ordre sémantique ou d'ordre syntaxique.
Nous avons également relevé les traces d'utilisation de techniques par les élèves afin de vérifier si le répertoire de la classe était en adéquation avec les pratiques de chacun.

### *III.1.b. Interprétations*

La confrontation à la contingence de notre progression nous a permis de mettre en évidence plusieurs manques ou choix discutables en rapport avec les tâches ou avec l'articulation des exercices que nous avons proposés. A titre d'exemples nous revenons sur les séances 4 et 6.
Nous revenons ainsi sur la séance 4. L'analyse *a posteriori* montre que le prix au kilogramme du café (fixé à 16 euros) est une valeur numérique qui n'a pas permis aux élèves d'identifier le rôle fonctionnel du coefficient de proportionnalité. Nous pourrions proposer un prix de 10 €/kg ce qui pourrait permettre aux élèves d'observer des liens entre les valeurs numériques.
Pour la séance 6, l'analyse *a posteriori* montre qu'il serait sans doute plus pertinent de réorganiser les exercices. Les exercices dépourvus de contexte gagneraient à être proposés à la suite des autres puisque les élèves ont éprouvé de réelles difficultés pour ces exercices. Enfin, les exercices 1 et 2 devraient être placés en toute fin de séance puisque ce sont ceux qui demandent de sérieux efforts de mobilisation des connaissances.
L'utilisation de nombres rationnels non décimaux pose problème aux élèves de SEGPA. Pour un élève de SEGPA, un nombre doit s'écrire avec « une quantité finie de chiffres après la virgule », sinon on ne peut pas travailler avec. Ce constat corrobore notre volonté de ne pas cumuler les difficultés liées à l'enseignement de la proportionnalité et celles liées à l'enseignement des nombres rationnels non décimaux. Il semble cependant nécessaire d'adjoindre des compléments sur la division au préalable de notre progression.

## III.2. Interprétants observés relatifs à l'enseignant

La Double Approche articule deux points de vue. Le premier, la didactique des mathématiques, cherche à analyser les pratiques d'enseignants singuliers en classe sur un contenu d'enseignement précis, en considérant les mathématiques potentiellement données à fréquenter. Le second, l'ergonomie cognitive, inclut le point de vue de l'enseignant exerçant son métier dans une institution parmi d'autres enseignants, en prenant en compte les personnes. La Double Approche considère plusieurs points de vue : global, local et micro. Pour notre expérimentation, le niveau global n'intervient pas puisque ce n'est pas l'enseignant qui a conçu la séquence. Au niveau local, nous avons observé les adaptations éventuelles du scénario proposé qui peuvent révéler des aspects de ses pratiques. Il s'agit de relever et d'analyser les gestes et les routines spécifiques du professeur lors de la mise en œuvre des séances proposées. À un niveau micro, l'analyse consiste à étudier ce qui est automatique, implicite, presque à l'insu du professeur : par exemple dans le discours, ce qui n'est pas préparé et relève des rituels du professeur, les gestes élémentaires, les déplacements, l'élaboration et la nature des traces écrites privilégiées au tableau.

### *III.2.a. Outils d'analyse*

Afin de distinguer le plus objectivement possible les résultats qui relèvent de la progression de ce qui relève plus spécifiquement de l'enseignant, nous avons utilisé les outils de la Double Approche que sont les cinq composantes : cognitive, médiative, personnelle, sociale et institutionnelle, pour analyser les pratiques de l'enseignant. L'analyse selon les composantes de la Double Approche didactique et ergonomique des pratiques a permis de relever des régularités pour l'enseignant observé et nous avons pu interpréter ces régularités selon la classification en *i-genres* et *e-genres* au sens de Butlen, Peltier et Pézard (2004).
Ce centrage sur les interactions et les faits et gestes de l'enseignant a été rendu possible par l'analyse des transcriptions de séances filmées. En effet, la caméra était posée face à l'enseignant ce qui permettait d'observer tous ses faits et gestes.

### *III.2.b. Interprétations*

Nous nous sommes longuement entretenus avec l'enseignant qui s'est porté volontaire pour mettre en œuvre dans sa classe notre progression. Nous avons tenu compte de son parcours professionnel. Nous nous sommes ensuite intéressés aux régularités que nous pouvions observer dans les cours lors de la prise en charge de notre progression par cet enseignant. Ce focus sur l'enseignant nous a permis, au moment de l'analyse des observations de proposer des interprétations plus spécifiques dépendant de notre progression.
Grâce à l'observation du répertoire des élèves, nous pouvons attester que des apprentissages ont eu lieu même si deux élèves ont manifesté ce « gel des procédures » mentionné au début de cet article. Les élèves ont globalement réactivé toutes les techniques présentées dans les séances 1 à 5 au moment des questions soulevées dans les exercices de la séance 6. Les élèves ont donné des arguments qui relevaient de la sémantique et parfois de la syntaxe. Ainsi nous avons pu observer des élèves qui argumentaient en faveur d'une incompatibilité d'un résultat au regard des grandeurs mises en jeu dans la situation. D'un autre côté, nous avons observé de réelles difficultés pour les élèves de SEGPA à percevoir des relations géométriques entre des nombres entiers ou décimaux.
Le vocabulaire n'a pas toujours fait sens pour les élèves de cette classe. Nous avons ainsi observé des élèves qui calculaient plusieurs coefficients de proportionnalité afin de savoir s'il y avait bien proportionnalité. La détermination des rapports dans ce cas, tout comme l'emploi des fractions, n'a pas fait sens chez ces élèves.
Nous n'avions pas pris en charge dans notre progression des apprentissages spécifiques sur la

division et sur la reconnaissance de cette opération comme étant réciproque de la multiplication. Il semblerait pourtant nécessaire de proposer un tel travail aux élèves avant de les confronter à notre progression.

## CONCLUSION

Une des hypothèses de notre expérimentation était que les élèves de SEGPA peuvent effectivement acquérir des savoirs associés à la proportionnalité en apportant peu de perturbation aux ressources et pratiques ordinaires. Nous pouvons attester que lors de notre expérimentation les élèves ont mobilisé les connaissances présentées dans la progression. Leur répertoire didactique s'est enrichi. Même si dans l'analyse *a posteriori* nous avons identifié des lacunes ou des erreurs, des apprentissages ont eu lieu. Les techniques ont été réutilisées et les contextes retenus ont permis des rétroactions. Au moins à court terme…
L'appropriation de la progression construite nécessite des connaissances mathématiques non triviales chez l'enseignant qui la met en œuvre. De plus, cette progression doit s'accompagner d'une guidance mettant en avant le rôle clef de la quatrième séance. En effet, l'identification d'un facteur de linéarité multiplicative et sa transformation en un coefficient de proportionnalité relève de l'étude des grandeurs et des liens entre leurs mesures.
Par ailleurs, l'identification par l'enseignant de l'utilisation d'une technique par un élève pose problème. Nous avons pu observer des confusions entre le coefficient de proportionnalité et son aspect fonctionnel et un facteur de linéarité multiplicative. Nous proposons dans notre thèse (Voisin, 2013) des représentations symboliques des différentes techniques de recherche de quatrième proportionnelle.
Enfin, une présentation des méthodes de validation ou d'invalidation d'une relation de proportionnalité entre deux suites semble *a fortiori* nécessaire dans le cas de tableaux à deux lignes et deux colonnes, et ceci avant que les élèves ne s'approprient le produit en croix.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BELMAS, P. (2001). *Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez les élèves en échec scolaire*. Thèse de sciences de l'éducation, Université Paris V, Paris.
BLOCH, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves : Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x*, 81, 25-52.
BLOCH, I. (2013). Elèves en difficulté à l'entrée au Collège : Quelques repères pour penser l'enseignement des mathématiques. *Petit x*, 93, 29-51.
BLOCH, I. & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : Étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228. Grenoble, La Pensée Sauvage.
BUTLEN, D., PELTIER, M.-L., PEZARD, M. (2004). Des résultats relatifs aux pratiques des professeurs débutants ou confirmés enseignants les mathématiques en Zep/Rep. In Peltier-Barbier, M.-L. (Eds.), *Dur d'enseigner en Zep*, 69-81. Grenoble, La Pensée Sauvage.
COMIN, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse de didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, École doctorale de mathématiques-informatique.
DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : Un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. *Étude exploratoire dans des situations d'enseignement et de formation au sein de l'enseignement spécialisé.* Thèse, Université Lyon 1, École doctorale informatique et information pour la société.
FAVRE, J.-M. (2004). Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de

la multiplication dans une classe de l'enseignement spécialisé. *Actes du séminaire national ARDM de didactique des mathématiques*, 109-126, Durand-Guerrier, V. & Tisseron, C. (Eds), IREM Paris 7.

GIBEL, P. (2009). Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements en situation a didactique à l'école Primaire. In Kuzniak, A. & Moustapha, S. (Eds) *Enseignement des mathématiques et développement : Enjeux de société et de formation - Actes du colloque EMF 2009* (GT9, 286-292).

LEVAIN, J.-P., LE BORGNE, P., SIMARD, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA, *Revue Française de Pédagogie*, 155, 95-109.

MOPONDI, B. (1986). *Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l'institutionnalisation d'un algorithme : Notion de proportionnalité au Cours Moyen*. Thèse de didactique des mathématiques, Université Bordeaux I.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une Double Approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2, 505-528.

VOISIN, S. (2013). *L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA : Contraintes, Spécificités, Situations*. Thèse de sciences de l'éducation, Université Bordeaux 2, École doctorale sociétés, politique, santé publique.

# ANNEXES

## Annexe 1. Séance 1 : Recette d'une pâte à crêpes

Trois copines Claire, Justine et Sabrina ont appris à faire des crêpes au collège. La recette est une préparation pour quatre personnes. Quand elles rentrent chez elles, elles décident de faire des crêpes avec cette recette mais Claire veut en faire pour 8 personnes, Justine veut en faire pour 2 personnes et Sabrina veut en faire pour 6 personnes. Compléter les tableaux.

| Ingrédients pour la pâte à crêpes | Claire |
|---|---|
| pour 4 personnes | pour 8 personnes |
| 250 millilitres de lait | |
| 120 grammes de farine | |
| 2 œufs | |
| 10 grammes de sucre vanillé | |
| 6 g de sel | |
| 20 grammes de beurre | |

| Ingrédients pour la pâte à crêpes | Justine |
|---|---|
| pour 4 personnes | pour 2 personnes |
| 250 millilitres de lait | |
| 120 grammes de farine | |
| 2 œufs | |
| 10 grammes de sucre vanillé | |
| 6 g de sel | |
| 20 grammes de beurre | |

| Ingrédients pour la pâte à crêpes | Sabrina |
|---|---|
| pour 4 personnes | pour 6 personnes |
| 250 millilitres de lait | |
| 120 grammes de farine | |
| 2 œufs | |
| 10 grammes de sucre vanillé | |
| 6 g de sel | |
| 20 grammes de beurre | |

## Annexe 2. Séance 2 : Les principes de linéarité de la proportionnalité (+ et x)

### *Exercice 1*

Mathéo roule en vélo, toujours à la même vitesse. Il met 10 minutes pour parcourir 3 km et 15 minutes pour parcourir 4,5 km. Compléter le tableau de proportionnalité.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Parcours à vélo en minutes | 10 | 15 | 25 | ... |
| Kilomètres parcourus | 3 | 4,5 | ... | 6 |

### *Exercice 2*

Pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes, j'utilise 6 œufs. Quand je fais la même mousse au chocolat pour 15 personnes, j'utilise 10 œufs. Combien faudra-t-il d'œufs pour en faire pour 27 personnes ? Et pour 24 personnes ? Compléter le tableau.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de personnes | 9 | 15 | 27 | 24 |
| Nombre d'œufs | 6 | 10 | ... | ... |

*Exercice 3*

Compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous affiché chez un marchand.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Quantité de pommes en kg | 3 | 5 | 8 | ... | 13 |
| Prix en € | 5,40 | 9,00 | ... | 27,00 | ... |

## Annexe 3. Séance 3 : Les principes de linéarité de la proportionnalité ( - et : )

*Exercice 1*

Pour réaliser des crêpes un cuisinier doit mélanger des ingrédients, on s'intéresse ici au nombre d'œufs et à la quantité de farine en grammes. Compléter le tableau de proportionnalité.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Quantité de farine en grammes | 520 | 195 | ... | 260 |
| Nombre d'œufs | 8 | 3 | 5 | ... |

*Exercice 2*

Compléter ce tableau sachant que la quantité de riz en grammes est proportionnelle au nombre de personnes à table.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de personnes | 18 | 11 | 7 | ... | 6 | 4 | 3 |
| Quantité de riz en grammes | 1890 | 1155 | ... | 945 | ... | ... | ... |

*Exercice 3*

Compléter ce tableau sachant que le prix est proportionnel au nombre de bouteilles achetées.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de bouteilles d'eau | 30 | 24 | 6 | ... | 10 | ... | 4 |
| Prix en € | 12,60 | 10,08 | ... | 6,30 | ... | 1,26 | ... |

## Annexe 4. Séance 4 : Le passage par l'unité ; introduction du coefficient de proportionnalité

*Exercice 1*

Le prix du café est fixé au kilogramme.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Quantité de café en kilogrammes | 12 | 6 | 15 | 5 | 1 |
| Prix en € | 192 | ... | 240 | ... | ... |

Avec ce prix au kilogramme du café, compléter le tableau de proportionnalité.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Quantité de café en kilogrammes | 1 | 2 | 5 | 7 | 10 |
| Prix en € | ... | ... | ... | ... | ... |

*Exercice 2*

Franck fait du vélo en restant sur le même plateau et sur le même braquet, pour chaque tour de pédale, il avance du même nombre de centimètres. C'est donc une situation de proportionnalité. Compléter ce tableau.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de tours de pédales | 6 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Distance parcourue en centimètres | 840 | 700 | ... | ... | ... | ... |

***Exercice 3***

Compléter ce tableau de proportionnalité indiquant les tarifs d'un manège en fonction du nombre de tours.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de tours | 6 | 1 | 8 | ... | 12 |
| Prix en € | 6,30 | ... | ... | 10,50 | ... |

## Annexe 5. Séance 5 : Le coefficient de proportionnalité et le passage entre les lignes

***Exercice 1***

Compléter le tableau de proportionnalité.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de personnes | 4 | 7 | 13 | |
| Quantité de lait en cl | 20 | ... | ... | |

***Exercice 2***

Compléter le tableau de proportionnalité.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nombre de personnes | 4 | 7 | ... | ... | |
| | Quantité de lait en cl | ... | ... | 72 | 118 | |

***Exercice 3***

Compléter ce tableau de conversion (c'est une situation de proportionnalité).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Heures | 1 | 1,5 | 2,5 | 0,5 | 1,2 | ... | ... | |
| | Minutes | ... | ... | ... | ... | ... | 180 | 600 | |

***Exercice 4***

Compléter le tableau de proportionnalité grâce à la calculatrice.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 45,6 | 13,5 | 5,4 | 78,5 | ... | ... | |
| | 59,28 | ... | ... | ... | 4,55 | 105,95 | |

## Annexe 6. Séance 6 : Reconnaissance de tableaux de proportionnalité

Est-ce que les tableaux suivants sont des tableaux de proportionnalité ?
Expliquer vos réponses en indiquant les calculs ou en indiquant les passages entre les lignes ou entre les colonnes.

***Exercice 1***

| | |
|---|---|
| 12 | 16 |
| 20 | 30 |

***Exercice 2***

| | |
|---|---|
| 6 | 11 |
| 15 | 30 |

***Exercice 3***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 1,5 | 3 | 1,2 | 11 |
| 36 | 4,5 | 9 | 3,6 | 33 |

***Exercice 4***

| | | | |
|---|---|---|---|
| Poids des pêches en kg | 1 | 3 | 5 |
| Prix en € | 2,40 | 7,20 | 10,80 |

***Exercice 5***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1,8 | 2,1 | 2,4 | 2,7 |

***Exercice 6***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Prix payé en € | 9 | 12 | 15 | 21 |
| Quantité d'essence en litres | 6 | 8 | 10 | 14 |

# UNE ETUDE DE L'EVOLUTION DES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS PRIMAIRES VAUDOIS DANS LE CADRE DU DISPOSITIF DE FORMATION CONTINUE LESSON STUDY EN MATHEMATIQUES

Valérie **BATTEAU**

HEP Vaud, Lausanne et Université de Genève (Suisse)

valerie.batteau@hepl.ch

**Résumé**

Nous allons étudier l'évolution des pratiques d'enseignants en mathématiques à travers l'analyse des effets du dispositif de *Lesson Study* (LS). Ce dispositif de type collaboratif et réflexif réunit un groupe d'enseignants et de coaches-chercheurs. Dans quelle mesure ce dispositif permet-il de modifier les pratiques enseignantes ? Qu'est-ce qui change ou résiste aux potentiels changements dans les pratiques ?

Pour analyser une évolution des pratiques, nous situons notre travail dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique développé par Robert et Rogalski (2002).

Dans le dispositif de LS, les enseignants préparent collectivement une leçon puis l'un d'eux l'enseigne. Celui-ci doit se l'approprier créant ainsi des modifications même minimes. Nous étudions ces modifications en adaptant la méthodologie de Mangiante (2007) issue des travaux de Leplat (1997).

Nous envisageons d'introduire le concept de zone illusoire dans les pratiques (Blanton, Westbrook, & Carter, 2005), définie comme une zone dans laquelle l'enseignant croit mettre en place la possibilité d'actions pour les élèves sans que ce ne soit réellement le cas. Cette zone illusoire pourrait représenter un état transitoire dans le développement de l'enseignant.

**Mots clés**

Pratiques enseignantes, double approche, évolution des pratiques, zone illusoire, *Lesson Study*

## PRESENTATION DE LA RECHERCHE

Pour le projet de notre thèse, nous utilisons un dispositif de formation de *Lesson Study* (LS) qui est mis en place par une équipe de chercheurs de la HEP Vaud auprès d'enseignants primaires vaudois enseignant les mathématiques. Notre intention est d'étudier l'évolution des pratiques de quelques-uns de ces enseignants à travers l'analyse des effets de ce dispositif particulier. Dans quelle mesure, ce dispositif permet-il de modifier les pratiques enseignantes ? Qu'est-ce qui change ou résiste aux potentiels changements dans les pratiques ?

Ce dispositif de LS est une formation de type collaboratif et réflexif qui réunit un groupe composé de huit enseignants expérimentés et volontaires, accompagnés de deux coaches-chercheurs. Ce dispositif se fait sous forme de cycle en quatre étapes. Avant tout, le groupe choisit un sujet mathématique à enseigner en fonction des difficultés d'apprentissage des élèves ou/et des difficultés d'enseignement. Le sujet de la leçon étant choisit, les enseignants étudient les curriculums relatifs à ce thème (étape 1). Ils planifient et préparent la leçon, appelée leçon de recherche (étape 2). L'un des enseignants enseigne la leçon dans sa classe en présence des autres membres du groupe qui observent et récoltent des données sur l'activité des élèves et le déroulement de la leçon (étape 3). Enfin, ils analysent collectivement la leçon, discutent des améliorations éventuelles à partir des données des observateurs (étape 4) et replanifient éventuellement une nouvelle leçon qui sera donnée et observée selon les mêmes modalités dans la classe d'un autre enseignant. Une ou plusieurs réalisations peuvent avoir lieu autour de la même leçon. A l'issue du cycle, la leçon fait l'objet de l'écriture d'un plan de leçon final qui peut être diffusé.

## CADRE THEORIQUE

Dans notre contexte, les enseignants s'engagent dans une démarche de développement professionnel. Pour pouvoir analyser une évolution des pratiques, nous choisissons de situer notre travail dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique développé par Robert et Rogalski (2002). En effet, ce cadre théorique prend en compte la dimension du métier d'enseignant avec les marges de manœuvre que l'enseignant peut investir et les contraintes auxquelles il est soumis. Ce cadre permet d'analyser et d'interpréter les pratiques enseignantes. Il prend en compte les pratiques en classe et leurs effets sur les activités potentielles des élèves, mais intègre aussi l'univers du métier d'enseignant. Robert et Rogalski décrivent les pratiques selon cinq composantes : deux composantes liées aux déroulements en classe (composante cognitive et médiative) et trois composantes liées à la dimension du métier (composante personnelle, institutionnelle et sociale). L'analyse des pratiques en composantes permet de relever des régularités et des variabilités d'un même enseignant tout au long du dispositif. En s'appuyant sur l'analyse des pratiques en composantes, Butlen, Peltier-Barbier et Pézard (2004) catégorisent les pratiques en i-genre à partir de régularités interpersonnelles et intrapersonnelles observées dans les stratégies globales d'enseignement.
Dans notre contexte, les enseignants préparent collectivement la leçon de recherche puis l'un d'eux l'enseigne dans sa classe. Pour enseigner la leçon, l'enseignant doit se l'approprier et créé ainsi des modifications, même minimes. Nous allons utiliser le modèle d'analyse de Leplat (1997) issu de la théorie de l'activité qui a été développé par Mangiante (2007) en didactique des mathématiques, afin d'étudier les écarts entre la leçon de recherche préparée collectivement (tâche prescrite) et la leçon réalisée par un enseignant (tâche réalisée). L'activité de l'enseignant y est analysée à travers ce processus de modifications. Ce modèle d'analyse permet de décrire les trajectoires suivies par les enseignants.
Dans le contexte du dispositif de LS, comme les enseignants travaillent collectivement, ils peuvent évoluer aussi avec (voire grâce à) leurs pairs d'où l'idée d'introduire le concept de zones proximales de développement (ZPD) dans les pratiques enseignantes. Dans le champs de la didactique des mathématiques, Blanton (2005) a repris le concept de zone théorique de Valsiner (1987) comme moyen d'interpréter la ZPD des enseignants. De plus, elle introduit le concept de zone illusoire dans les pratiques comme étant une zone dans laquelle l'enseignant croit mettre en place la possibilité d'actions pour les élèves, mais en réalité, ce n'est pas le cas. Blanton émet l'hypothèse que cette zone illusoire peut représenter un état transitoire dans le développement de l'enseignant et peut servir de précurseur pour un changement dans les pratiques.

## QUESTIONS DE RECHERCHE

En s'appuyant sur les concepts de i-genre développés par Butlen (2004), nous cherchons à savoir dans quelle mesure une évolution des pratiques lors du dispositif peut être marquée par un changement de niveaux à l'intérieur d'un i-genre voire de i-genre.
En nous situant dans le modèle d'analyse de Leplat (1997) développé par Mangiante (2007),

nous nous intéressons à étudier comment les enseignants s'adaptent et s'approprient la leçon de recherche élaborée collectivement et ce que cela implique dans les changements ou non des pratiques. Comment le processus de modifications de la tâche prescrite à la tâche réalisée participe-t-il à un potentiel changement dans les pratiques ?
Concernant l'analyse des pratiques en terme de composantes, nous nous intéressons à étudier quelle part attribuer aux composantes cognitives, médiatives et personnelles, dans le changement ou non des pratiques. Et, quelles composantes dans les pratiques peuvent se modifier au cours du dispositif de LS ?
En nous appuyant sur les travaux de Blanton (2005), nous nous intéressons à savoir quels effets peut avoir le dispositif de LS sur la zone illusoire dans les pratiques des enseignants.

## DONNEES

Nous allons étudier plus particulièrement les pratiques de quelques enseignants parmi le groupe des huit enseignants.
Nous avons comme données de recherche : les enregistrements vidéos de séances de classe et de travail collectif, ainsi que des documents écrits (documents de préparation, plans de leçon, productions des élèves, notes des observateurs, rapports de leçon), et ceci pour une première séance de classe avant le dispositif de LS, puis pour plusieurs cycles de LS entre 2013 et 2015 et pour une séance de classe à la fin du dispositif.
Nous avons commencé à analyser les données : les pratiques de deux enseignantes pour le premier cycle de LS. Ces premières analyses nous permettent de mettre en œuvre et d'adapter le modèle d'analyse et la méthodologie aux données.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES


BLANTON, M. L., WESTBROOK, S., & CARTER, G. (2005). Using Valsiner's zone theory to interpret teaching practices in mathematics and science classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 33.

LEPLAT, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris.

MANGIANTE, C. (2007). *Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathematiques : prédermination et développement.* universite paris 7.

PELTIER-BARBIER, M.-L., BUTLEN, D., MASSELOT, P., NGONO, B., PEZARD, M., ROBERT, A., & VERGNES, D. (2004). *Dur d'enseigner en ZEP. DUR pour les élèves. DUR pour les enseignants. Analyse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire* (L. p. sauvage Ed.). Grenoble.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2(4),* 505–528.

VALSINER, J. (1987). *Culture and the development of children's actions: A cultural–historical theory of developmental psychology*: New York: John Wiley & Sons.

# SUR LES GESTES DE LA RECHERCHE EN MATHEMATIQUES : ELEMENTS DE COMPARAISON ENTRE ELEVES ET CHERCHEURS

Marie-Line **GARDES**

Laboratoire I3M, équipe DEMa – Université Montpellier II

marie-line.gardes@univ-montp2.fr

**Résumé**

Dans ce texte, nous présentons un outil méthodologique spécifique, la notion de geste de la recherche, pour étudier et mettre en perspective l'activité de recherche d'un mathématicien et d'élèves de terminale scientifique, engagés dans l'étude d'un problème non résolu en théorie des nombres : la conjecture d'Erdös-Straus.

**Mots clés**

Geste de la recherche, dimension expérimentale, processus de recherche, problème de recherche, problème non résolu, travail du mathématicien

## INTRODUCTION

Depuis près de 30 ans de nombreuses expériences, au collège et au lycée, ont été menées sur la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques. Un des enjeux est de mettre l'élève dans une position de chercheur lui permettant, sous certains aspects, la reproduction de l'activité du mathématicien. Dans notre travail, nous étudions les processus de recherche de différents publics (mathématiciens, élèves, étudiants) engagés dans la recherche d'un même problème non résolu en théorie des nombres. Notre objectif est de mettre en perspective les différents processus de recherche afin de développer et enrichir des ingénieries favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants dans le cadre de la recherche de problème, en prenant en compte le rôle de la dimension expérimentale dans le processus de recherche.

Nous avons choisi le domaine de la théorie des nombres principalement pour deux raisons. Tout d'abord, c'est un domaine mathématique relativement familier pour les élèves qui contient de nombreuses questions ouvertes. Nous pouvions ainsi trouver un même problème à proposer à des élèves et à des mathématiciens. De plus, la théorie des nombres est un domaine des mathématiques où la dimension expérimentale est importante dans le travail des chercheurs. Le problème que nous avons choisi pour conduire cette étude est la conjecture d'Erdös-Straus (Erdös, 1950). L'énoncé est le suivant : Pour tout entier naturel $n$, on peut trouver des entiers non nuls $x, y, z$ (non nécessairement distincts) tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. Ce problème répond aux critères que nous avons retenus puisque c'est un problème non résolu par la recherche mathématique, à portée des élèves et contenant un caractère expérimental, à savoir faire des aller et retours entre des essais pour différentes valeurs de $n$, des formulations de conjectures et l'élaboration de preuves.

Notre travail s'articule autour de trois grands axes : l'étude mathématique de la conjecture, le suivi du travail d'un mathématicien sur la résolution de ce problème et les expérimentations avec des élèves. L'affiche que nous avons exposée présente les recherches d'un mathématicien et les travaux d'un groupe d'élèves de terminale scientifique sur leur étude respective de la conjecture d'Erdös-Straus. Elle montre également une mise en perspective de ces deux recherches grâce à un outil méthodologique spécifique : une analyse en termes de gestes de la recherche.

## GESTES DE LA RECHERCHE

La notion de *geste* en mathématiques a été étudiée et développée en philosophie des mathématiques pour discuter des problèmes de fondements, des pratiques mathématiques et de leur développement (Cavaillès 1938, Châtelet 1993, Bailly & Longo 2004). En appui sur ces travaux, nous avons adapté et développé la notion de *geste* pour étudier les processus de recherche en mathématiques. La définition que nous retenons est la suivante :

> Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Gardes, 2013, p.155)

La notion de *geste* de la recherche permet de prendre en compte la dimension active d'un sujet qui cherche, le rôle de l'intuition et les aspects dialectiques de l'activité mathématique, en particulier entre l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. Pour la recherche de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons identifié sept gestes de la recherche : désigner des objets, réduire le problème aux nombres premiers, introduire un paramètre, construire et questionner des exemples, effectuer des contrôles locaux, transformer l'équation initiale et implémenter un algorithme (Gardes, 2013). Une analyse des processus de recherche en termes de gestes nous a permis de montrer comment un sujet agit pour avancer dans l'étude d'un problème. Nous présentons ci-dessous la recherche d'un mathématicien[70] et d'un groupe d'élèves de terminale scientifique[71].

Dans la recherche du mathématicien que nous avons suivi, nous avons identifié six gestes de la recherche (tous sauf transformer l'équation initiale). Son processus de recherche est complexe et les avancées dans l'étude du problème sont provoquées par un système de gestes, ces derniers s'appelant les uns les autres dans leur réalisation.
*Exemple :* Pour obtenir l'identité du résultat principal de ses recherches[72], le mathématicien a implémenté de nombreux algorithmes, à partir de la construction et du questionnement de nombreux exemples de décomposition de $4/n$ pour des valeurs de $n$ données, et grâce à la désignation des nombres en jeu (par exemple trouver que $d$ est un diviseur de $m^2$). Les hypothèses du résultat ($d$ divise $m^2$ et $4m - 1$ divise $n + 4d$) sont obtenues par questionnement de la nature des nombres en jeu, elles permettent d'assurer que $x$, $y$ et $z$ sont des entiers.

Dans la recherche des élèves de terminale scientifique que nous présentons, nous avons relevé quatre gestes de la recherche (réduire le problème aux nombres premiers, construire et questionner des exemples, effectuer des contrôles locaux, désigner des objets). Ce sont les gestes qui émergent au sein d'une démarche de type expérimental et qui favorisent sa mise en œuvre.
*Exemple* : A partir de décompositions pour $n = 3$, $n = 6$, $n = 12$, $n = 16$ et $n = 18$ (geste *construire et questionner des exemples*), les élèves ont formulé et testé plusieurs conjectures avant d'établir et démontrer, à l'aide de la nature des nombres en jeu (geste *effectuer des*

---

70 Nous la présentons ici succinctement. Pour plus de détails, consulter Gardes & Mizony (2011), Gardes (2013) et la page internet de Mizony.

71 Nous la présentons ici succinctement. Pour plus de détails, consulter Gardes & Mizony (2011), Gardes (2010).

72 Soit $n$ un nombre entier. S'il existe $m$ et $d$ deux entiers non nuls tels que $d$ divise $m^2$ et $4m - 1$ divise $n + 4d$, alors il existe $x$, $y$, $z$ des entiers non nuls tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.

*contrôles locaux*) le résultat suivant : pour les nombres pairs, l'équation d'Erdös-Straus a des solutions.

## CONCLUSION

Nos analyses montrent que cet outil est pertinent pour étudier la question de la transposition du travail du chercheur (Gardes, 2013). Les gestes identifiés dans les recherches des mathématiciens sont également relevés dans les recherches des élèves, quand ces derniers disposent des connaissances mathématiques favorisant leur émergence. Par exemple, nous avons relevé que le geste *implémenter un algorithme* n'émerge pas dans les recherches des élèves. Une hypothèse est que les connaissances mathématiques sous-jacentes (notions algorithmiques, programmation) sont difficilement mobilisables par les élèves, voire absentes de leur milieu objectif[73]. La notion de geste de la recherche permet de prendre en compte les aspects dialectiques de l'activité de recherche entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. En effet, l'émergence d'un geste est favorisée, d'une part par la mobilisation des connaissances mathématiques sous-jacentes, et d'autre part par la nature de la démarche de recherche mise en œuvre. En retour, sa réalisation au sein d'un système de gestes provoque des avancées dans la recherche, notamment l'élaboration de résultats partiels, et permet d'approfondir les connaissances mathématiques mobilisées et de développer des heuristiques de recherche. Pour le chercheur en didactique, la prise en compte d'un système de gestes contribue à l'analyse de la complexité des processus de recherche mis en œuvre au cours d'une résolution de problème, ainsi que de celle du travail mathématique effectif produit.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ERDÖS, P. (1950) On a diophantine equation. (Hungarian, Russian, English summaries), *Mat. Lapok 1*, 192-210.

BAILLY, F. & LONGO, G. (2003). Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique. Article consulté sur http://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/incompl-incert.pdf

CAVAILLES, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann.

CHATELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Éditions du Seuil.

GARDES, M.-L. & MIZONY, M. (2011). La conjecture d'Erdos-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur, *Repères IREM 87*, 79-90.

GARDES, M.-L. (2010). Démarches d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures : un exemple en terminale scientifique, *Petit x 83*, 51-78.

GARDES, M.-L. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de doctorat*. Université Lyon 1.

PAGE INTERNET DE MIZONY : http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/ (document : Sur la conjecture d'Erdös-Straus).


73 L'expérimentation a eu lieu avant l'introduction de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques du secondaire.

# ÉTUDE DU PROCESSUS D'ACCES A LA GEOMETRIE PAR LA CONSTRUCTION INSTRUMENTEE

Edith **PETITFOUR**

LDAR – Université Paris Diderot

edith.petitfour@univ-lorraine.fr

**Résumé**

Nous présentons dans ce texte quelques éléments d'un cadre théorique destiné à analyser le processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée, au sein d'un travail en dyade. Nous l'avons élaboré en développant des outils théoriques issus de la sémiotique et des sciences cognitives, à partir d'observations de plusieurs élèves dyspraxiques, en interaction avec un tiers, dans différents types de tâches de construction instrumentée, en classe de CM2 et de sixième.

**Mots clés**

Construction instrumentée – Dyspraxie – Géométrie – Gestes – Langage

## INTRODUCTION

Les méthodes d'enseignement de la géométrie plane, qui s'appuient sur des constructions instrumentées avec règle, équerre et compas, sont productrices d'échecs pour les élèves dyspraxiques visuospatiaux. La réalisation d'actions avec des instruments aboutit rarement à une production satisfaisante pour ces élèves, mais surtout, elle les empêche d'accéder au sens et d'exercer leur raisonnement en géométrie, alors qu'ils en ont les moyens conceptuels.

Dans notre recherche, nous tentons d'amener l'élève dyspraxique visuospatial à des apprentissages géométriques en nous appuyant sur ses compétences préservées (langage, mémoire et raisonnement), ainsi que sur un travail en dyade. Nous présentons dans ce qui suit quelques éléments de notre cadre théorique.

## REFERENCES THEORIQUES

L'activité géométrique élémentaire sur des objets *non ostensifs* (intuitions, idées, concepts) se développe à travers la manipulation d'une pluralité d'*ostensifs* de différents registres (Bosch et Chevallard, 1999). Ces ostensifs, signes produits par différentes actions intentionnelles (parler, écrire, dessiner, faire des gestes, manipuler un artefact), sont constituants *d'ensembles sémiotiques*, avec leurs modalités de production et de transformation, ainsi que leurs relations avec leurs significations (Radford, 2002). Considérant que les processus d'apprentissage se produisent de façon multimodale, nous empruntons à Arzarello (2006) le concept de *faisceau sémiotique*, qui permet de prendre en compte le développement dynamique des interactions entre les ensembles sémiotiques. Lors d'une activité de construction instrumentée réalisée en dyade, ces ensembles sont composés d'un ou plusieurs ostensifs (actions avec artefact, langage, gestes et objets graphiques). Notre cadre d'analyse a pour but d'étudier leurs articulations et leurs liens avec des apprentissages géométriques. Afin de cerner les difficultés spécifiques rencontrées par l'élève dyspraxique visuospatial, nous intégrons deux éclairages issus des sciences cognitives, l'un en psychologie cognitive à propos des différents types d'appréhension d'une figure (Duval, 1994), l'autre en neuropsychologie à propos du développement du geste (Mazeau, 2008 ; Mazeau et Le Lostec, 2010).

## ÉLEMENTS DU CADRE THEORIQUE

### 1. Actions avec les artefacts

Dans son environnement de travail, le sujet doit mettre en œuvre une suite d'actions complexes avec des artefacts pour obtenir la représentation graphique d'objets géométriques. La *réalisation effective* d'une action nécessite la mise en route des organes effecteurs, sensoriels et moteurs, il s'agit de l'aspect neuromoteur et musculaire de l'action. Toute action est précédée de sa représentation, qui en constitue l'aspect cognitif. Nous le déclinons en trois composantes. La *composante technique* répond à une visée constructive, la finalité étant de produire un objet graphique porteur des propriétés de l'objet géométrique. Elle est constituée de l'intention de l'action à réaliser avec l'artefact pour obtenir l'objet graphique. Elle est une étape d'une technique de construction élaborée par le sujet. Elle met en jeu des connaissances techniques concernant les relations entre trace graphique et partie(s) de l'artefact, et également des connaissances graphiques, relatives aux liens entre les objets ou propriétés géométriques et leurs représentations graphiques. Elle fait ainsi appel à des connaissances géométriques portées par les instruments. Au niveau de cette composante technique de l'action, des traitements visuospatiaux sont sollicités pour passer d'une représentation mentale *discursive* (appréhension des objets géométriques par leurs propriétés) ou *perceptive* (perception spontanée de l'objet graphique dans sa globalité) à une appréhension *séquentielle* des objets (en lien avec les propriétés que permettent d'obtenir les instruments).
Les deux autres composantes ont pour finalité l'obtention d'un objet graphique précis et soigné. Elles mettent aussi en jeu des compétences visuospatiales : le sujet doit anticiper mentalement l'encombrement spatial et la position relative des objets graphiques, des artefacts et du corps dans l'environnement. La *composante manipulatoire* est relative aux aspects corporels de l'action à réaliser avec l'artefact, elle fait appel à des compétences praxiques : il s'agit pour le sujet d'organiser et de coordonner ses mouvements dans le temps et dans l'espace pour aboutir à la réalisation de l'action décidée. La *composante organisationnelle* est constituée des interactions nécessaires entre le sujet et son environnement de travail pour instaurer de bonnes conditions d'obtention de l'objet graphique, elle fait appel aux compétences organisationnelles du sujet, qui devra être capable de planifier des actions élémentaires, en en concevant l'organisation selon un plan déterminé, pour favoriser la réalisation du projet de l'action complexe.
La composante technique de la représentation de l'action (l'intention, le projet, la décision) est consciente pour le sujet, qu'il soit dyspraxique ou non. Les deux autres sont non conscientes et automatiques pour le sujet standard, alors qu'elles ne le sont pas pour le sujet dyspraxique, malgré la répétition et l'entraînement, ce qui le conduit très souvent à l'échec dans la réalisation effective de ses actions. Nous proposons donc d'abandonner ces aspects pratiques de l'action (organisationnel et manipulatoire), qui n'apportent rien au niveau des connaissances géométriques, et d'activer la composante technique de la représentation de l'action, en exploitant les capacités langagières de l'élève dyspraxique, dans un travail en dyade où la manipulation effective est à la charge de l'autre. Dans ce contexte de communication orale, l'élève dyspraxique est amené à donner des instructions à celui qui manipule. Il peut le faire dans un langage verbal, accompagné de gestes.

## 2. Langage et gestes

Le langage est la capacité humaine de communiquer, en faisant usage d'une langue dans le cas du *langage verbal*, ou de gestes dans le cas du *langage gestuel*. Nous appelons *langage technique*, le langage qui informe des actions à réaliser avec les artefacts pour obtenir les tracés représentant les objets géométriques considérés, ces actions étant en relation avec des propriétés géométriques non exprimées. Ce langage répond à une visée constructive. Il est dit *technique géométrique* si la langue utilisée pour parler des objets est géométrique, *technique courant* si elle est courante, et *technique mixte* s'il y a mélange des deux.
Des gestes peuvent compléter ou renforcer le langage oral. Nous appelons *gestes mathématiques* les mouvements corporels, réalisés dans l'air ou sur un support, en relation avec l'activité géométrique. Le geste est *déictique* lorsqu'il est parcours ou pointage d'objet graphique ou de partie d'artefact ou lorsqu'il est représentation gestuelle d'un objet géométrique. Il est *mimétique* quand la manipulation de l'instrument est mimée, il est *iconique* quand il exprime une propriété mathématique. Ces gestes jouent un rôle non seulement dans la communication mais aussi dans le processus de conceptualisation, en permettant par exemple à l'élève de transmettre une information qu'il n'est pas encore capable d'exprimer de façon purement verbale. En cela, ces gestes sont porteurs de connaissances géométriques. Le langage technique géométrique, soutenu par des gestes mathématiques, pourra évoluer progressivement vers un *langage géométrique*. Ce langage est constitué de la langue naturelle et de la langue géométrique, avec son lexique et ses expressions spécifiques. Il a comme visée de définir les objets, relations et propriétés géométriques indépendamment des instruments utilisés et de l'environnement de travail.

# CONCLUSION

Notre cadre théorique nous permet de définir une méthode d'enseignement susceptible de conduire l'élève dyspraxique visuospatial à des apprentissages. Nous faisons l'hypothèse que l'élève dyspraxique peut entrer dans un processus de conceptualisation en géométrie sans effectuer la manipulation des instruments, mais en la guidant, à l'aide d'un langage technique, que nous avons défini, accompagné de gestes mathématiques, dans un dispositif de travail en dyade. Nous menons actuellement des expérimentations afin de vérifier cette hypothèse.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process, *Relime,* vol.9, extraordinario 1, 267-299.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/1, 77 - 123.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM,* 17, 121-138.

RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

MAZEAU, M. (2008). Conduite du bilan neuropsychologique chez l'enfant. *Elsevier Masson.*

MAZEAU, M., LE LOSTEC, C. (2010). L'enfant dyspraxique et les apprentissages. Coordonner les actions thérapeutiques et scolaires. *Elsevier Masson*.

# DES NOUVELLES PISTES POUR L'INGENIERIE DIDACTIQUE. EXEMPLE DE CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMERATION A L'ECOLE PRIMAIRE

Frédérick **TEMPIER**

LDAR – Université Paris Diderot

fk.tempier@gmail.com

**Résumé**
Ce court texte revient tout d'abord sur la méthodologie d'ingénierie didactique et ses limites pour la diffusion de résultats de recherche dans l'enseignement ordinaire avant de proposer un exemple d'ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.

**Mots-clés**
Ingénierie didactique, développement d'une ressource, numération, école primaire

## L'ingénierie didactique aujourd'hui. De nouvelles pistes.

L'ingénierie didactique (Artigue 1989, 2011) est une méthodologie de recherche « basée sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement […] dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*. » (Artigue 1989 p.286). L'école d'été de didactique des mathématiques de 2009 (voir Margolinas & al., 2011) a été l'occasion de questionner à nouveau cette méthodologie. Il y apparait notamment que la question de la diffusion des ingénieries à l'enseignement ordinaire reste posée (Artigue 2011, Perrin-Glorian 2011). Elle est un des deux défis pointés par Artigue qui montre l'intérêt pour la recherche en didactique des mathématiques, comme le proposait déjà Chevallard en 1982, de « poser le problème de l'action et des <u>moyens</u> de l'action, sur le système d'enseignement » (p.18), ce qui « requiert de questionner les visions de la transmission et de la diffusion qui pèsent sur le discours didactique et les pratiques, pour pouvoir penser de nouveaux rapports entre chercheurs et praticiens, concepteurs et usagers » (Artigue 2011, p.24).
Mais l'ingénierie didactique peut-elle permettre à la fois des avancées sur des questions de recherche tout en permettant la diffusion de ces résultats dans l'enseignement ordinaire ? Selon Perrin-Glorian (2011), « le problème n'est plus seulement celui du contrôle et de la mise en œuvre des principes théoriques qui guident l'ingénierie didactique. C'est aussi celui des possibilités d'adaptation des situations par les enseignants dans les conditions ordinaires de fonctionnement de l'enseignement avec la double perspective de l'étude de la robustesse d'une suite de situations et de la formation des enseignants » (p.57). Elle propose une « ingénierie didactique pour le développement et la formation » (p.69) permettant de questionner la diffusion, dans l'enseignement ordinaire, d'une ingénierie didactique « pour la recherche » (p.69). Cela demande de prévoir « plusieurs niveaux d'ingénierie (au moins deux mais peut-être plus) avec des objectifs différents » (Perrin-Glorian, 2011, p.68) : « un premier niveau […] pour tester la validité théorique des situations […] et dégager les choix

fondamentaux de l'ingénierie » (p.68) et un « deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont prises comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élèves...). » (p.68)

## Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource sur la numération à l'école primaire

Partant d'un constat de difficultés relatives à l'enseignement de la numération dans les classes, la première étape de mon travail de thèse[1] a consisté en une étude préalable de la transposition didactique (Chevallard, 1985) de la numération décimale de position à l'école primaire (Tempier, 2010). Elle a permis de mettre en évidence des manques concernant l'aspect décimal de la numération (les relations entre unités, dizaines, centaines, etc.) que j'identifie comme des contraintes institutionnelles. Un des objectifs de ma thèse est alors de chercher comment dépasser ce constat en construisant une ressource (site web) utilisable par des enseignants. Mes questions de recherche concernent alors la conception de situations et la détermination des éléments fondamentaux à transmettre aux enseignants (pour permettre une mise en œuvre ne dénaturant pas les enjeux définis par le chercheur) ainsi que des conditions sur une ressource pour permettre aux enseignants de prendre effectivement en compte ces éléments.

Cette étude s'appuie donc sur une ingénierie didactique pour le développement et utilise les cadres théoriques de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) et de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Ils permettent à la fois, à un premier niveau, de concevoir des situations théoriques et penser leur articulation, et, à un deuxième niveau, de concevoir une ressource permettant la diffusion de ces situations puis d'analyser les organisations mathématiques et didactiques mises en œuvre par les enseignants.

La ressource construite est proposée à des enseignants ordinaires de 3$^{e}$ primaire (non débutants, car ayant au moins cinq années d'expérience) qui l'utilisent pour mettre en œuvre une séquence pour l'introduction des nombres à quatre chiffres. L'évaluation de l'usage de la ressource par les enseignants, se fait, comme dans l'ingénierie didactique pour la recherche, par la confrontation d'analyses *a priori* et *a posteriori*. Cependant cela nécessite d'abord d'identifier la situation modifiée par l'enseignant pour étudier les modifications apportées à la situation proposée dans la ressource. Concernant l'usage qu'ils font de la ressource, l'étude se fait de manière plus empirique, à travers des entretiens avec des enseignants à la fin de leur séquence.

## Quelques résultats

L'étude de la conception d'une ressource particulière nous amène à dégager des principes qui pourraient être plus généraux pour une ressource pour des enseignants sur un thème mathématique :

- la ressource doit être suffisamment complète sur l'enseignement de la notion mathématique concernée : une présentation claire des objectifs, des variantes des situations principales qui guident la progression, une description des éléments essentiels des situations, des exemples d'exercices d'entraînement et d'évaluation et des aides pour l'institutionnalisation ;
- la ressource doit aussi apporter des éléments pour motiver l'enseignant à l'utiliser (notamment en pointant certaines difficultés d'élèves), des apports pour l'enseignant sur la notion concernée, des prolongements possibles en lien avec d'autres notions.

[1] Sous la direction de Catherine Houdement et Marie-Jeanne Perrin-Glorian

A propos de ce second point, l’expérimentation a montré que les enseignants ne lisaient pas souvent les apports qui sont donnés dans la ressource. Pour motiver les enseignants à un travail plus approfondi sur le principe décimal de la numération, au départ de mon travail, je faisais l’hypothèse qu’il était important de faire le lien avec d’autres notions et de montrer l’intérêt pour l’apprentissage des nombres décimaux l’année suivante. Mais l’expérimentation, a aussi montré l’intérêt de l’évaluation initiale, même si ce n’était pas pensé pour cela au départ. Elle a en effet permis aux enseignants de prendre conscience des difficultés de leurs propres élèves car des tâches différentes de ce qu’ils proposent habituellement permettaient de mettre en évidence ces difficultés. Pour certains enseignants je peux maintenant dire qu’il s’agit du principal apport de la ressource. Cela a permis de faire évoluer leur regard sur les connaissances des élèves.

J’ai aussi montré certaines résistances des enseignants dans le choix ou la mise en œuvre des situations mettant en jeu les conversions entre unités. Elles peuvent avoir pour origine le manque de visibilité de ce travail dans les programmes et manuels actuels en France, alors qu’elles sont essentielles pour s’approprier le principe décimal. J’envisage de poursuivre les expérimentations en travaillant de manière plus étroite avec les enseignants afin de mieux comprendre comment dépasser ces résistances. Par exemple il pourrait être intéressant d’associer davantage les enseignants à la conception d’exercices mettant en jeu des conversions à la fois pour mieux comprendre l’origine de ces résistances mais aussi pour que ces exercices soient plus facilement utilisables par leurs collègues.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARTIGUE M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9/3*, p.281-308.

ARTIGUE M. (2011). L’ingénierie didactique comme thème d’étude. In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage, Grenoble, p.15-25

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BUTLEN D., MASSELOT P., PEZARD M. (2004) In Peltier M-L (Ed) Dur, dur, dur d’enseigner en ZEP, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1982) Sur l’ingénierie didactique. Marseille : IREM.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique », *Recherches en didactique des mathématiques*, *19/2,* p.221-266.

MARGOLINAS, C., ABBOUD-BLANCHARD, M., BUENO-RAVEL, L., DOUEK, N., FLUCKIGER, A., GIBEL, P., ET AL. (Eds.). (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble: La pensée sauvage.

PERRIN-GLORIAN M.J. (2011). L’ingénierie didactique à l’interface de la recherche avec l’enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage, p.57-78

TEMPIER F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, *Grand N,* 86, IREM de Grenoble, p.59-90

# ENSEIGNER L'ALGORITHME POUR QUOI ? QUELLES NOUVELLES QUESTIONS POUR LES MATHEMATIQUES ? QUELS APPORTS POUR L'APPRENTISSAGE DE LA PREUVE ?

Simon **MODESTE**

Université de Montpellier, I3M, équipe Didactique et Épistémologie des Mathématiques

simon.modeste@univ-montp2.fr

**Résumé**

Récemment introduit dans les curriculums du lycée français, l'algorithme est un concept fortement lié à l'informatique, aux mathématiques et à la preuve et qui soulève de nombreuses questions didactiques. Notre travail de thèse (Modeste, 2012) propose une analyse épistémologique du concept d'algorithme dans le but d'étudier sa transposition didactique et de construire des situations didactiques.

Dans ce texte, nous présenterons tout d'abord une analyse épistémologique détaillée du concept en mettant en avant ses aspects fondamentaux. Cette étude nous servira d'appui pour proposer un modèle de conceptions (Balacheff & Margolinas, 2005; Vergnaud, 1990) pour l'algorithme du point de vue du savoir savant, prenant en compte l'ensemble des formes de l'algorithme et les aspects outils et objet (Douady, 1986) du concept. Nous montrerons alors dans quelle mesure ces résultats, validés expérimentalement par les analyses d'entretiens avec des chercheurs, ont permis de mener une étude de la transposition en jeu dans l'enseignement au lycée en France. À travers l'étude des instructions officielles, de manuels scolaires et de ressources en ligne, nous mettrons en évidence une transposition partielle du concept principalement orientée vers la programmation et l'usage de l'algorithme comme un outil. Enfin nous proposerons une caractérisation des problèmes fondamentaux pour l'algorithme et des perspectives pour la construction et l'étude de situations didactiques en algorithmique.

**Mots clés**

Algorithme, algorithmique, épistémologie, didactique, lycée, transposition didactique

***Remerciements***

L'auteur souhaite remercier Sylvain Gravier et Cécile Ouvrier-Buffet, encadrants du travail de thèse présenté ici.

## CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE

Le travail présenté dans ce texte est issu d'un travail de thèse soutenu en décembre 2012 à l'Université de Grenoble ayant pour titre « Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ? ». Nous n'allons pas présenter ici l'intégralité du travail. Nous nous focaliserons sur certains aspects en les replaçant dans le contexte du travail mené. Pour les détails du travail, nous renvoyons au manuscrit de thèse (Modeste, 2012).

## Contexte

On peut situer les motivations de ce travail de recherche à trois niveaux. Au niveau épistémologique, il est motivé par la volonté de prise en compte du développement de l'informatique et l'influence que ce développement peut avoir sur les mathématiques et leur pratique. Au niveau du contexte de l'enseignement des mathématiques, on peut constater l'introduction de nombreux éléments d'informatique dans l'enseignement secondaire et plus particulièrement d'éléments d'algorithmique (dans ou à côté du curriculum de mathématiques) ainsi que l'usage courant des TICE, qui peuvent amener des questions d'informatique dans la classe de mathématiques. Au niveau français, enfin, l'introduction en 2009 d'algorithmique dans les curriculums de mathématiques du lycée et la création en 2012 d'un enseignement de spécialité « Informatique et Sciences du Numérique » (ISN) en Terminale Scientifique poussent à s'intéresser aux liens entre mathématiques et informatique. Notre travail s'axe plus particulièrement sur un point central de cette interaction, le concept d'algorithme et l'algorithmique.

## Problématique

Ce travail se place dans une perspective classique en didactique des mathématiques (Artigue, 1990) : il propose un travail épistémologique sur le concept d'algorithme et l'activité algorithmique, qui permet de soutenir une étude didactique, celle de la transposition didactique et le développement de situations d'apprentissage.
Les questions abordées dans ce travail de thèse peuvent être regroupées autour de quatre pôles, relativement à leur thématique et aux méthodes proposées pour y répondre.

### *Épistémologie*

- Quels sont les éléments constitutifs spécifiques du concept d'algorithme ? Quels sont l'objet et les préoccupations fondamentales de la discipline algorithmique ? Quels liens entretiennent algorithme et preuve ?
- Peut-on parler d'activité ou de pensée algorithmique dans les mathématiques ? Dans l'informatique ? Quelles perspectives cela peut-il ouvrir pour une approche didactique ?
- Peut-on construire un modèle de l'activité algorithmique permettant de questionner la transposition didactique ?

Pour répondre à ces questions nous nous sommes appuyés sur l'analyse du texte et des discours du savoir savant. Nous présenterons seulement le travail autour de la première et de la troisième question.

### *Conception de chercheurs*

- L'analyse épistémologique développée s'accorde-t-elle avec la conception des chercheurs sur l'algorithme ? Quels apports à notre questionnement peuvent fournir les points de vue des chercheurs ?
- Peut-on repérer des variations dans les conceptions des chercheurs en fonction de leur discipline ?

Pour étudier ces questions nous avons conçu et mis en œuvre des entretiens avec vingt-deux chercheurs en mathématiques et informatique et analysé leur discours. Cette partie du travail, qui a servi à la fois de validation du modèle épistémologique présenté et de ressource pour mieux comprendre la place de l'algorithme dans les mathématiques et l'informatique ne sera pas développée ici.

*Transposition didactique*

- Quel rôle et quelle place sont attribués à l'algorithmique dans les programmes de mathématiques et d'ISN au lycée ? Quelles transpositions ont été effectuées ?
- Qu'en est-il des manuels de mathématiques du lycée ? Quels types de questions et de problèmes sont mis en jeu en algorithmique ?
- Quels types de ressources en ligne sont mises à disposition des enseignants en algorithmique ?

Pour répondre à ces questions, nous avons réalisé une analyse des programmes, de deux collections de manuels et des ressources en ligne des IREM, à l'aide des outils épistémologiques développés.

*Situations d'apprentissage pour l'algorithme*

- Comment caractériser les problèmes mathématiques à fort potentiel pour l'algorithmique ? Quels problèmes répondant à ces critères peut-on proposer ?
- Quels éléments épistémologiques sont à prendre en compte pour construire des situations didactiques autour de l'algorithme ? Quelles situations didactiques peut-on proposer ?

Tenter de répondre à ces questions nous a conduits à formuler des propositions de problèmes et de situations, leur analyse a priori à l'aide du modèle épistémologique développé et l'expérimentation d'une de ces situations.

### Plan de l'article

Dans un premier temps nous introduirons quelques exemples d'algorithmes à même d'illustrer nos propos. Nous présenterons, dans une seconde partie, le travail épistémologique développé. Une troisième partie traitera des résultats de l'étude de la transposition didactique de l'algorithme au lycée français, pour laquelle nous donnerons quelques illustrations. Enfin, nous présenterons des éléments relatifs à la conception de situations en algorithmique et la situation expérimentée.

## EXEMPLES ET DEFINITIONS PRELIMINAIRES

Nous commencerons par donner ici quelques définitions utiles pour la suite de l'article (en particulier pour les termes *algorithme* et *algorithmique*) et par étudier quelques exemples d'algorithmes choisis afin de mettre en avant et d'illustrer les éléments que nous formaliserons dans le travail de conception d'un modèle épistémologique.

### Algorithme, définition et exemples

*Définition*

Sur la base de la littérature du savoir savant, notamment (Aho, Hopcroft, & Ullman, 1989; Beauquier, Berstel, & Chrétienne, 1992; Bouvier, George, & Le Lionnais, 2005; Chabert, 2010; Cormen, Leiserson, Rivest, & Cazin, 1994; Garey & Johnson, 1979; Donald E. Knuth, 1973; Donald Ervin Knuth, 1996; Lovász & Plummer, 2009; Sedgewick, 1988), nous avons retenu la définition suivante, synthèse des différentes définitions que nous avons pu rencontrer :

Un **algorithme** est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, non-ambiguës et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille.

***Un exemple pour introduire et illustrer nos propos : cherchez la frontière***

Nous présentons et étudions brièvement un premier exemple pour illustrer et soutenir le travail des parties à suivre.
Ce problème est inspiré d'un problème proposé par Giroud (2011) dans son travail de thèse sur la démarche expérimentale en mathématiques. Nous l'avons simplifié par commodité.
On se donne une bande constituée d'un nombre fini de cases consécutives, que nous appellerons territoire, comme dans la figure 1. Parmi ces cases, l'une est de couleur noire et est appelée la frontière. Toutes les cases situées à droite de la frontière sont bleues, toutes celles situées à gauche sont rouges. Initialement, on ne connaît pas la couleur des cases. On peut interroger les cases, une à une, pour connaître leurs couleurs. Le but est de retrouver la case frontière.

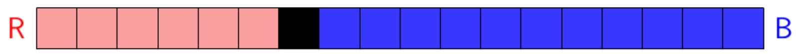
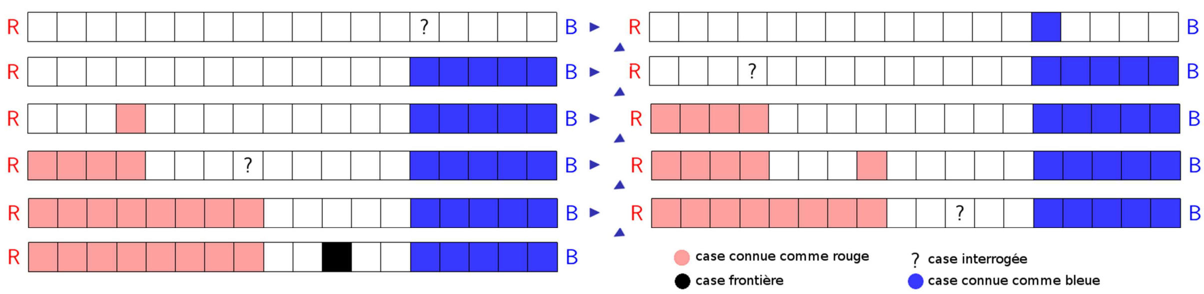



*Figure 1 : un territoire de 18 cases*

Lorsque l'on interroge une case, il y a trois possibilités :
- elle est noire, on a trouvé la frontière,
- elle est rouge, la frontière se situe à droite de la case interrogée,
- elle est bleue, la frontière se situe à gauche de la case interrogée.

Dans les deux derniers cas, on se retrouve à chercher la frontière dans un nouveau territoire, plus petit, constitué des cases tout à droite (ou tout à gauche) de la case interrogée.
En interrogeant ainsi une nouvelle case, on réduit le domaine de recherche et l'on finit par




trouver la frontière. La figure 2 donne un exemple d'une recherche d'une frontière.

*Figure 2 : exemple de recherche d'une frontière, trouvée en 4 coups.*

Si l'on cherche comment retrouver la frontière en interrogeant le moins de cases possible (quelle que soit la taille du territoire et l'emplacement de la frontière), on doit toujours interroger la case (ou l'une des deux cases) qui divise(ent) le territoire en deux territoires de tailles équilibrées. C'est un algorithme de recherche par dichotomie.
Cet algorithme donne une méthode systématique pour retrouver la frontière de manière effective, quelle que soit la taille du territoire et la position de la frontière.
Nous n'entrons pas ici dans le détail de ce que signifie précisément « en interrogeant le moins de cases possible ». Nous précisons simplement qu'il s'agirait ici de trouver un algorithme optimal pour la complexité dans le pire des cas, c'est-à-dire un algorithme qui minimise c(n) où c(n) est le nombre maximum d'interrogations pour trouver la frontière dans un territoire de taille n (pris pour toutes les positions de la frontière). Cela met en jeu la notion de complexité d'un algorithme, c'est-à-dire l'évaluation de son efficacité à traiter les différentes instances du problème qu'il résout. Pour plus de détails sur la notion de complexité, nous renvoyons par exemple à Beauquier et al. (1992) ou Cormen et al. (1994). Trouver un algorithme optimal

pour un problème donné est un enjeu important. Connaître la complexité d'un algorithme optimal résolvant un problème donné permet d'associer cette complexité au problème. Cela permet de classifier les problèmes selon des classes de complexité. C'est le cas ici : la dichotomie étant l'algorithme optimal de recherche de la frontière et nécessitant un nombre d'interrogations logarithmique en fonction du nombre de cases, on peut dire que le problème de recherche de la frontière est logarithmique (cela se démontre, nous ne détaillerons pas ici).

### *Cherchez la frontière (variante)*

Intéressons-nous maintenant à une variante du problème de recherche de la frontière, en gardant les mêmes règles mais en ajoutant la règle suivante : il est interdit d'interroger plus d'une fois une case bleue. On rencontre alors 3 cas lorsqu'on interroge une case :

- elle est noire, on a trouvé la frontière,
- elle est rouge, la frontière se situe à droite de la case interrogée, et l'on cherche à résoudre le même problème sur le territoire plus petit situé à droite de la case interrogée,
- elle est bleue, on peut se restreindre à une recherche sur le territoire situé à gauche de la case interrogée. Mais nous sommes confrontés à résoudre un problème différent : ne pouvant plus interroger de case bleue, nous sommes contraints d'interroger à chaque fois la case la plus à gauche du territoire jusqu'à rencontrer la frontière.

Le problème est alors bien différent et l'algorithme optimal pour cette variante (pour la complexité dans le pire des cas) n'est pas celui qui interroge la case médiane du territoire.
On voit ici comment le problème étudié et les problèmes qui apparaissent lors de sa résolution influencent fortement la construction de l'algorithme de résolution.

## Algorithmique

### *Définition*

De la même façon que pour l'algorithme, nous avons retenu la définition suivante :

> L'**algorithmique** est l'activité ou le domaine qui a pour objet l'étude des algorithmes, c'est-à-dire, leur conception, leur description, leur analyse et l'étude des problèmes qu'ils permettent de résoudre.

### *Un exemple de résultat algorithmique négatif : le dixième problème de Hilbert*

Lors du congrès international des mathématiciens de 1900 à Paris, David Hilbert énonce ses célèbres 23 problèmes. Le dixième concerne la recherche générale des solutions entières des équations diophantiennes à plusieurs inconnues, que l'on peut formuler ainsi :

- Entrée : Un entier $n$ et un polynôme $P$ à coefficients dans $\boldsymbol{Z}$.
- Question : L'équation en $X_1, \dots, X_n$, $P(X_1, \dots, X_n)=0$ a-t-elle une solution dans $\boldsymbol{Z}^n$ ?

En 1970, Matiiassevitch démontre qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de résoudre ce problème, c'est-à-dire d'algorithme qui répondrait à la question pour tous entiers $n$ et polynôme $P$. Ce résultat et bien d'autres résultats de non-existence d'algorithmes, s'appuient sur la construction de modèles théoriques de ce qu'est un algorithme et de ce qui est algorithmiquement résoluble. C'est un champ complet des mathématiques qui s'est ouvert, qui a produit des résultats parmi les plus importants du XX^e^ siècle et dont le célèbre problème « P=NP » fait partie des problèmes du millénaire de l'institut Clay.

## ÉPISTEMOLOGIE DE L'ALGORITHME

Nos recherches nous ont d'abord amené à faire un premier travail épistémologique sans faire appel à une théorie particulière, en étudiant le texte du savoir savant (notamment les ressources citées précédemment). Nous avons décliné ce premier modèle en cinq aspects que nous avons appelés fondamentaux. Nous avons ensuite conçu un second modèle épistémologique plus avancé, permettant de palier à certaines difficultés qui apparaissaient dans le premier modèle. Pour que ce second modèle ait du sens, il est nécessaire de donner quelques détails relativement à ce travail préliminaire.

## Cinq aspects fondamentaux du concept d'algorithme

Un premier travail a donc consisté à repérer les aspects et les spécificités du concept d'algorithme. Nous avons ensuite regroupé ces aspects autour de cinq aspects fondamentaux, qui font écho à des points soulevés dans les exemples précédents. Ce travail s'est appuyé sur l'étude d'un corpus de textes académiques (cités précédemment) et des interviews menées auprès de chercheurs en mathématiques et informatique.

### *Effectivité*

L'effectivité réfère au fait qu'un algorithme apporte une réponse constructive et qui peut être effectivement mise en œuvre (en un nombre fini d'étapes, notamment) pour résoudre chaque instance du problème, par un opérateur (qui peut être humain ou machine). Il est nécessaire que l'ensemble des instructions à réaliser ne contienne pas d'ambiguïté pour l'opérateur afin que l'exécution de l'algorithme sur une instance donnée du problème ne dépende pas de l'opérateur mais seulement des instructions prescrites.

### *Résolution de problème*

Cela réfère à un point important, mis en avant précédemment, qui est le fait qu'un algorithme soit une réponse à un problème et que l'algorithme soit une résolution qui permet de traiter toute instance du problème. Ces instances sont spécifiées en entrée de l'algorithme et la sortie de l'algorithme associée est la solution spécifique à l'instance du problème. L'exemple précédent met très bien en avant l'importance de cette notion de problème et le fait qu'un algorithme n'a de sens qu'associé au problème qu'il résout.

### *Preuve*

Algorithme et preuve ont un lien extrêmement étroit. À la construction d'un algorithme s'associe une preuve de cet algorithme, c'est-à-dire la preuve qu'il résout bien le problème pour toute instance et la preuve qu'il le fait en un nombre fini d'étapes à chaque fois. Un lien peut être aussi fait entre preuves constructives (dont les preuves par récurrence) et algorithmes car de chaque preuve de ce type on peut extraire un algorithme sous-jacent, permettant de construire effectivement les solutions au problème. Les questions mathématiques relatives aux modèles théoriques (que nous évoquons juste après) mettent aussi en jeu des liens étroits entre algorithme, preuve et logique.

### *Complexité*

La complexité est l'étude du comportement du nombre d'étapes ou de l'espace nécessaire à la mise en œuvre d'un algorithme donné en fonction de la taille de l'instance étudiée. Cet aspect regroupe tout ce qui a trait à cette notion, comme les différents types de complexité (en temps en espace, au pire, en moyenne...), la notion de complexité d'un problème, et toutes les classes de complexité qui permettent de classifier algorithmes et problèmes.
Cette notion de complexité est complètement spécifique à l'algorithmique. Selon certains auteurs comme Knuth (1985), cette préoccupation de l'efficacité des processus de résolution

proposés pour un problème est même un des points essentiels qui distingue la pensée mathématique de la pensée algorithmique.

***Modèles théoriques***

Cet aspect fait référence à l'ensemble des éléments relatifs à la description et à l'étude de ce qui est algorithmiquement résoluble. Ces questions ont structuré et structurent encore un pan de la recherche en informatique et mathématiques et constituent un aspect essentiel du concept d'algorithme et de l'activité algorithmique.

***Intérêt de cette classification : une dialectique outil-objet pour l'algorithme***

Ces cinq aspects permettent de décrire une dialectique outil-objet pour l'algorithme, au sens de Douady (1986). Les aspects *effectivité* et *résolution de problème* relèvent de l'algorithme outil, les aspects *preuve*, *complexité* et *modèles théoriques* relèvent de l'algorithme objet. Cette distinction des différents aspects et la dialectique outil-objet a permis de mener de premiers travaux d'analyse des curriculums et de manuels (Modeste, 2009).

***Limites de ce modèle et motivation pour un modèle plus structuré***

Ce modèle « naïf » s'est avéré efficace pour étudier un discours sur l'algorithme mais beaucoup moins pour analyser l'activité d'un sujet ou des activités proposées dans des ressources. Il met aussi sur un même plan, dans la dialectique outil-objet, des éléments que nous ne considérons pas relever du même niveau de description. Cela apparaît en particulier lorsqu'on regarde l'aspect preuve. Alors qu'on peut faire usage d'un algorithme comme d'un outil de preuve, on classifie cet usage plutôt du côté objet car cela demande une prise de recul sur l'objet algorithme. De même, on peut ne pas souhaiter mettre sur le même plan la preuve algorithmique, qui est une forme de preuve et la preuve d'un algorithme, dont l'objet même est l'algorithme.
Pour dépasser ces difficultés, nous avons proposé un second modèle, plus structuré et faisant appel à un modèle théorique de didactique des mathématiques permettant de modéliser le savoir : la notion de conception du modèle ck¢.

## Construction d'un modèle de µ-conceptions pour l'algorithme

Afin de présenter ce modèle, revenons sur les outils théoriques choisis pour le construire et introduisons chacun des éléments pris en compte. Nous présenterons d'abord brièvement le modèle ck¢ que nous avons retenu et sa structure en Problèmes - Opérateurs - Système de représentation - Structures de contrôle. Nous préciserons ensuite des éléments liés au concept d'algorithme utilisés pour l'adapter à notre situation et prendre en compte le fait que l'on veut référer ici au savoir savant pour construire une référence épistémologique. Ceci donnera lieu à une définition spécifique de la notion de problème et une classification des différentes formes sous lesquelles un algorithme peut être décrit et manipulé. Enfin nous montrerons comment le modèle ck¢ et nos choix peuvent rendre compte de la dialectique outil-objet du concept d'algorithme et apporter des clarifications concernant la question de la relation preuve-algorithme soulevée au paragraphe précédent.

***Conceptions et µ-conceptions dans le modèle ck¢***

La notion de conception du modèle ck¢ (Balacheff & Margolinas, 2005) se base sur la notion de concept (Vergnaud, 1990) qui décrit un concept comme un triplet (**S**,I,*S*), où :

- **S** est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept,
- I est un ensemble d'invariants opératoires du concept, et

- *S* l'ensemble des représentations du concept.

La notion de conception de ck¢ reprend cette description en distinguant deux types d'invariants opératoires : des opérateurs qui décrivent l'action dans la situation et des structures de contrôle, qui structurent la relation entre opérateur et situation. Plus précisément, une conception C est décrite comme un quadruplet (P,R,L,Σ) avec :

- P un ensemble des problèmes donnant du sens au concept,
- R un ensemble d'opérateurs agissant sur les problèmes,
- L un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R, et
- Σ un ensemble de structures de contrôle qui décrivent la relation P-R.

Balacheff et Margolinas précisent :

> Nous appelons opérateur ce qui permet la transformation des problèmes ; ces opérateurs sont attestés par des productions et des comportements. Un système de représentation (langagier ou non) permet l'expression des problèmes et des opérateurs. Enfin, une structure de contrôle assure la non contradiction de la conception et contient au moins sous la forme d'oracles les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème. (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 80)

Nous nous intéressons ici à la description d'un modèle épistémologique autour du concept d'algorithme, en nous appuyant sur le savoir-savant. Nous voulons décrire ce qui est appelé une µ-conception dans le modèle ck¢, c'est-à-dire la conception « dérivée du corpus des savoirs consensuels (académiques) en mathématiques » (et en informatique dans notre cas) (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 98).

### *Une notion de problème adaptée*

Alors que les problèmes décrits dans une conception sont attestés par les déséquilibres du système sujet-milieu, il nous faut ici les décrire autrement dans une µ-conception. Nous choisissons, spécifiquement au cadre de l'étude du concept d'algorithme de prendre une définition de problème adaptée de la théorie de la complexité algorithmique, et donc proche de celle dont les problèmes sont attestés dans le savoir académique.

Nous décrirons un problème comme une couple (I,Q) où :

- I est l'ensemble des instances du problème,
- Q est une question générale qui peut se poser pour chaque instance du problème.

On peut par exemple décrire le problème de recherche du pgcd sous cette forme avec I l'ensemble des couples d'entiers non-nuls (c'est-à-dire $\mathbf{N}^{*2}$) et la question Q « Quel est le pgcd du couple d'entiers ? ».

Résoudre le problème algorithmiquement, c'est fournir un algorithme qui donne la réponse à la question Q quelle que soit l'instance proposée. Prouver un algorithme, c'est prouver qu'il donne toujours (c'est-à-dire après un nombre fini d'étapes) une réponse correcte pour toute instance du problème. On appelle *preuve de terminaison* la preuve du fait que l'algorithme donne une réponse après un nombre fini d'étapes pour toute instance et *preuve de correction* la preuve de la validité des réponses de l'algorithme pour toute instance.

### *Une µ-conception pour l'algorithme*

Sur la base de ce que nous venons de décrire, nous pouvons décrire une µ-conception pour l'algorithme ainsi :

- des problèmes donnés sous la forme Instance-Question,
- des opérateurs qui sont les algorithmes permettant de résoudre ces problèmes,
- des structures de contrôles qui relèvent de la preuve de ces algorithmes (terminaison et correction).

En ce qui concerne la description des systèmes de représentation (Σ), nous proposons, sur la base de notre étude épistémologique, trois systèmes de représentation pour décrire les algorithmes. Il s'agit en fait de trois grands groupes de types de représentations :

- La preuve algorithmique (PA) : il s'agit de la description d'un algorithme au travers d'une preuve (par exemple une preuve par récurrence). Dans ce cas, l'algorithme et sa preuve ne sont pas séparés.
- L'algorithme mathématique (AM) : c'est la description d'un algorithme dans un langage mathématique mettant en jeu certains éléments issus de la programmation. La preuve de l'algorithme peut alors être décrite séparément de l'algorithme lui-même.
- L'algorithme informatique (AI) : l'algorithme est décrit dans un langage de programmation. Sont alors distingués le texte de l'algorithme, sa sémantique, et sa validation.

***Dialectique outil-objet et place de la preuve***

La description précédente ne prend en compte qu'une partie de la µ-conception algorithme. En effet, elle ne considère que les problèmes qui peuvent être (ou non) résolus par un algorithme, c'est-à-dire pour lesquels les algorithmes sont les opérateurs. L'algorithme y est alors outil.
À ces problèmes il faut ajouter ceux portant sur les algorithmes ou questionnant les algorithmes : problèmes de complexité, de validité, de propriétés, etc. L'algorithme est alors objet.
Intégrer ces problèmes permet ainsi de décrire d'une autre manière la dialectique outil-objet pour l'algorithme avec ces deux familles de problèmes.
Ce choix permet aussi de préciser plusieurs niveaux de relation entre algorithme et preuve, d'une part au travers du système de représentation PA et d'autre part dans les deux familles de µ-conceptions outil et objet où la preuve relèvera de Σ dans le cas de l'outil et de R dans le cas de l'objet. Ces précisions permettent de clarifier les questions que soulevait notre premier modèle.

**Un modèle en six µ-conceptions**

Le modèle que nous proposons intègre donc six µ-conceptions reparties selon les trois systèmes de représentation présentés précédemment et selon les deux familles de problèmes décrivant la dialectique outil-objet. La figure 3, page suivante, donne quelques détails sur ces µ-conceptions. C'est à partir de ce modèle que nous avons pu produire l'analyse de la transposition didactique dont nous présentons les résultats dans la section suivante.

## TRANSPOSITION DIDACTIQUE AU LYCEE EN FRANCE

Le modèle précédent nous a permis de mener une analyse fine de la transposition didactique de l'algorithme au lycée en France. Nous avons pu étudier de manière effective différents types de données : instructions officielles (programmes et documents ressources), manuels, ressources pour la classe et la formation des enseignants. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la mise en œuvre du modèle épistémologique pour l'analyse mais nous nous restreindrons à présenter les résultats de cette analyse, assortis d'exemples illustratifs.

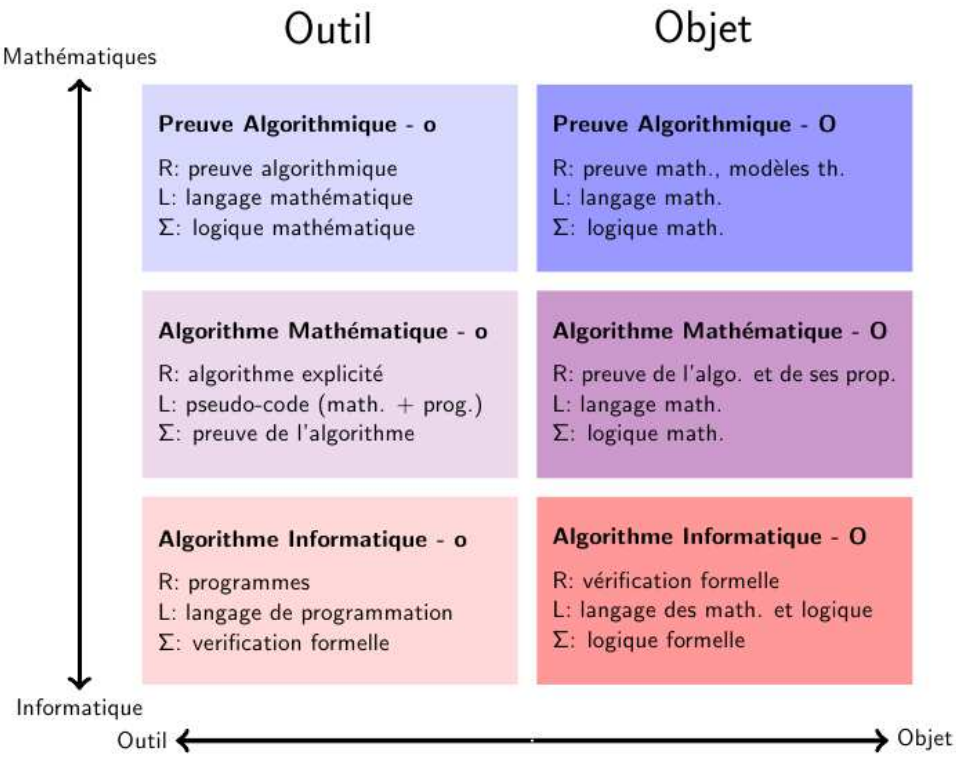



*Figure 3 : Résumé des éléments constitutifs des μ-conceptions de notre modèle. Les problèmes (P) relèvent de l'outil ou de l'objet, chaque conception décline ensuite opérateurs (R), système de représentation (L) et structures de contrôle (Σ).*

## Corpus de documents analysés pour saisir la transposition didactique

Nous avons étudié la transposition du concept d'algorithme au lycée à travers différents documents. L'algorithme coexistant dans la classe de mathématiques et la classe d'ISN, nous avons étudié les programmes des deux enseignements, en étudiant tous les niveaux du lycée général en ce qui concerne les mathématiques. La mise en place de l'algorithmique dans les curriculums de mathématiques a commencé en 2009 avec la classe de seconde et un document d'accompagnement a été produit. Nous faisons l'hypothèse que ce document vise à préciser les attentes curriculaires et constitue dans ce sens un vecteur important dans le processus de transposition, c'est pourquoi il fait partie de notre corpus. Les manuels sont un élément souvent très riche pour étudier la transposition didactique en France, ils permettent notamment de voir comment les instructions officielles se déclinent en tâches et nous informent sur le savoir enseigné. Nous avons étudié des collections complètes de manuels pour le lycée général : les collections Transmaths (Nathan), Math'x (Didier) et Indice (Bordas). Nous avons aussi analysé un autre type de ressources, disponible très rapidement après l'introduction de l'algorithmique au lycée : les ressources mises à disposition en ligne par les IREM. Il nous a semblé important d'inclure des ressources en ligne, car elles font pleinement partie des ressources de l'enseignant. Certains des groupes IREM ayant produit ces ressources ont aussi participé à la formation continue des enseignants à l'algorithmique, leurs productions sont donc un indicateur utile pour mesurer la transposition didactique dans le lycée français.

## Utilisation du modèle épistémologique pour l'analyse : deux exemples détaillés

Nos analyses de la transposition didactique s'appuient sur le modèle épistémologique de conceptions présenté. Nous illustrons son utilisation avant de présenter les résultats obtenus.

Nous choisissons pour cela l'exemple du traitement de la dichotomie dans le document ressource pour la classe de seconde[1] et dans une ressource de l'IREM de Lyon[2].

### *Dichotomie dans le document ressource de mathématiques de seconde*

Dans ce document, dont l'extrait concerné est en annexe, la dichotomie est présentée dans le cadre de la recherche d'un zéro d'une fonction. Une première activité, le jeu du nombre à deviner, est proposée pour introduire la dichotomie. Dans ce jeu, il s'agit de trouver un nombre compris entre 10 et 100, l'ordinateur répondant « c'est plus » ou « c'est moins » aux propositions du joueur. Un premier algorithme (en fait, un programme-papier, au sens ou nous le définissons plus loin) est proposé, il simule le joueur qui choisit le nombre. La programmation du jeu est proposée comme une première activité algorithmique. Ensuite, l'élève doit jouer contre le programme et essayer de gagner à tous les coups, c'est-à-dire en moins de 6 essais. À ce niveau, l'algorithme en jeu est la stratégie de dichotomie qui doit émerger du côté du joueur qui devine. On peut relever les éléments de la conception en jeu dans le tableau suivant :

| | |
|---|---|
| **P** | Instances : le choix d'un nombre gagnant entre 10 et 100.<br>Question : Trouver ce nombre en moins de 6 essais.<br>(Il s'agit évidemment d'une reformulation dans les termes de notre modèle, de même que dans la suite.) |
| **R** | Les stratégies possibles du joueur qui cherche le nombre (l'élève) : une règle qui dit quel nombre tester selon les réponses précédentes du programme. |
| **L** | Cette stratégie est sûrement attendue en langage courant, étant donné qu'elle est formulée (et justifiée) de manière très informelle :<br>Une bonne stratégie conduit à l'algorithme utilisant la dichotomie. Cette méthode consiste, en choisissant à chaque fois la valeur située au milieu de l'intervalle en cours, à réduire de moitié à chaque fois l'amplitude de l'intervalle dans lequel se trouve le nombre et comme $2^6$ est égal à 64, le dernier intervalle, sur cet exemple, est d'amplitude 1. |
| **Σ** | La citation ci-dessus montre aussi la justification de la méthode. La réussite systématique face à l'ordinateur constitue un autre contrôle de l'algorithme. Notons que la preuve de l'optimalité n'est pas proposée, ni de manière générale, ni dans ce cas particulier d'un intervalle d'entiers de 10 à 100 car il faudrait aussi prouver que 5 coups ne suffisent pas toujours. On peut aussi remarquer que l'argument de validité de l'algorithme est très peu détaillé. |

On reconnaît ici la conception AM-outil (conception outil de paradigme Algorithme Mathématique) avec une structure de contrôle (assez minimale) de l'ordre de la preuve mathématique. La conception AM-objet est-elle aussi présente ? Peu de questions sont posées sur l'algorithme lui-même, il est simplement précisé :

> Le choix des valeurs 10 et 100 qui encadrent le nombre à trouver, ainsi que le nombre d'essais est à mettre en débat dans la classe. En effet, selon le choix de ces valeurs, il sera ou non possible de déterminer à coup sûr la solution avec une bonne stratégie, ou on pourra seulement optimiser les chances de gagner.

Nous dirons que le potentiel de l'algorithme de dichotomie pour vivre en tant qu'objet est soulevé, mais qu'aucun opérateur n'est mis en jeu pour étudier cet algorithme. On ne peut pas vraiment considérer que la conception AM-objet soit présente. Relevons un autre point : le programme de jeu n'a pas de rôle algorithmique réel dans cette activité, étant donné que des élèves pourraient jouer l'un contre l'autre. Pourtant, programmer un adversaire virtuel semble aussi considéré dans le document comme une activité algorithmique (cela relève d'un amalgame algorithme-programme).

La seconde activité sur la dichotomie est la recherche d'un zéro d'une fonction par dichotomie. En recherchant les éléments de la conception en jeu, on obtient le tableau suivant :

---

1 Document *Ressources pour la classe de seconde – Algorithmique*, DGESCO, accessible à l'adresse : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/8/Doc_ress_algo_v25_109178.pdf

2 Document *Diviser pour* régner, IREM de Lyon, accessible à l'adresse : http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/diviserpourregner_avec_solutions.pdf

| | |
|---|---|
| **P** | Instance : une fonction *f* qui change de signe entre *a* et *b*.<br>Question : résoudre *f(x)=0* (sic). |
| **R** | Les opérateurs sont les instructions définies par le *pseudo-code* (introduit plus ou moins implicitement tout au long du document ressource). |
| **L** | Il s'agit de ce *pseudo-code* :<br>**Variables**<br>m , valeur milieu de l'intervalle « courant »<br>**Initialisation**<br>a et b, les bornes de l'intervalle [a ; b]<br>*f*, la fonction (rappel : *f* change de signe entre *a* et *b*)<br>**Traitement**<br>**Pour** i **variant de** 1 **à** 50<br>m **prend la valeur** (a+b)/2<br>**Si** *f*(m) **et** *f* (a) **sont de même signe alors**<br>a **prend la valeur** m<br>**sinon**<br>b **prend la valeur** m<br>**Sortie**<br>**Affiche** a et b |
| **Σ** | La validité de la méthode n'est pas questionnée. D'ailleurs, il n'est même pas précisé que la fonction s'annule au moins une fois (parce qu'elle serait continue ou d'autres hypothèses). La structure de contrôle qui semble valider l'efficacité de la méthode pour trouver le zéro est l'activité précédente, faisant émerger la dichotomie : « On transpose cette méthode ici ». Notons que cette méthode n'a été validée comme optimale que pour une recherche parmi un intervalle de 91 entiers. |

On est dans la conception AI-outil et la validation de l'algorithme est absente. La conception objet, qui pourrait apparaître ici, étant donné la richesse de la situation, n'est touchée qu'à travers une remarque sur la précision de la méthode en fonction du nombre d'itérations (c'est-à-dire par des considérations de méthodes numériques).

### *Une ressource de l'IREM de Lyon*

Cette ressource est à destination des enseignants et formateurs à la recherche d'approfondissements en algorithmique. Elle introduit le principe algorithmique « diviser pour régner » au travers de plusieurs exemples. Concernant la dichotomie, elle propose la comparaison de deux algorithmes donnés pour le problème de recherche d'un élément dans une liste strictement croissante. Le document met en jeu les conceptions Outils et objet du paradigme AI, présentées et illustrées dans les deux tableaux suivants.

On peut noter tout d'abord la présence de la conception AI-outil :

| | Conception | Extraits du document (illustration) |
|---|---|---|
| **P** | Instance : une liste triée strictement croissante et un élément *x*.<br>Question : Quel est le rang de *x* dans la liste ? | On se propose de comparer les deux algorithmes suivants (langage Xcas) qui ont pour objectif de chercher le rang d'un élément dans une liste dont les éléments sont supposés triés dans l'ordre strictement croissant. |
| **R** | Algorithmes séquentiels et de dichotomie décrits à l'aide des opérateurs du langage Xcas. | **Xcas**<br>`sequentiel(liste ,valeur):={`<br>`local rang;`<br>`rang:=0;`<br>`tantque liste[rang]<>valeur faire`<br>`rang:=rang+1;`<br>`ftantque;`<br>`retourne rang;`<br>`}:;` |
| **L** | Langage Xcas. | |
| **Σ** | Pas de structure de contrôle évoquée dans la ressource. | |

On note aussi la présence de la conception AI-objet :

| | Conception | Extraits du document (illustration) |
|---|---|---|
| **P** | Instance : un algorithme (sous forme d'un programme) *A* (instancié pour deux algorithmes : les recherches séquentielle et dichotomique d'un élément dans une liste triée)<br>Question : Combien au plus d'itérations de la boucle ont lieu pour une liste de taille $2^p$ ? | 1. Combien, au plus, d'itérations de la boucle auront lieu lors d'une recherche pour chacun des deux programmes ? Pour simplifier on se placera dans le cas où le nombre d'éléments dans la liste en de la forme $n=2^p$. |
| **R** | Opérateurs d'ordre mathématique (recherche du pire des cas, étude de suites...) | (b) Pour la recherche dichotomique. Notons $\upsilon_n$ le nombre maximum d'itérations. Pour $n=1$, on a $\upsilon_1=1$. Pour $n=2$, on a $\upsilon_2=2$. Pour $n=2^2$, on a $\upsilon_4=3$...<br>Pour $n=2^p$, les sous-listes contiennent au plus $2^{p-1}$ éléments. On a donc $\upsilon_{2^p} \leq 1+\upsilon_{2^{p-1}}$ (croissance de la suite $(\upsilon_n)$).<br>On en déduit $\upsilon_{2^p} \leq p+\upsilon_1$ c'est-à-dire $\upsilon_n \leq 1+\log_2(n)$.<br>Pour $n$ quelconque. On a : $n \leq 2^p$ où l'on a posé $p=[\log_2(n)]$. On a donc $\upsilon_n \leq \upsilon_{2^p} \leq 1+p$. Soit $\upsilon_n \leq 1+[\log_2(n)]$. |
| **L** | Langage mathématique et langage naturel. | |
| **Σ** | Raisonnements et outils de logique mathématiques valident l'action des opérateurs sur l'algorithme. | On a donc […] On en déduit […] Pour *n* quelconque […] On a donc |

Les aspects outil et objet sont donc présents dans cette ressource et on les repère à la fois par les problèmes abordés (reformulés ici dans notre cadre) mais aussi les opérateurs et contrôles mis en jeu. Dans cet extrait, c'est surtout autour de la complexité que l'algorithme existe en tant qu'objet. L'optimalité de l'algorithme de recherche dichotomique n'est pas évoqué ici bien que les questions se centrent sur la complexité.

### *Vers une application du modèle dans l'analyse des ressources*

Ces deux extraits, sur le même thème de la dichotomie, montrent deux conceptions de l'algorithme différentes, l'une centrée sur l'outil, dans AI et AM, l'autre mettant en jeu outil et objet, plutôt dans AI. Ce résultat n'est pas surprenant étant donné que les deux ressources n'ont pas le même objectif ni le même public. Cependant, on peut relever qu'aucun des deux ne traite l'optimalité de la méthode dichotomique dans le cas étudié.

On voit bien dans les deux extraits de ressources sélectionnés comment notre modèle de conceptions guide l'analyse, en mettant l'accent sur les problèmes soulevés mais aussi sur la présence ou non d'opérateurs et de contrôles et leurs caractéristiques. C'est ainsi que nous avons pu produire les analyses dont les résultats sont présentés maintenant.

## Savoir à enseigner en algorithmique au lycée : deux transpositions bien distinctes

En étudiant les programmes proposés en mathématiques et en ISN, nous pouvons prendre la mesure de la distance entre les deux transpositions.

### *Dans le curriculum de mathématiques du lycée*

En mathématiques, l'algorithmique est présente de la seconde à la terminale dans toutes les voies générales. On retrouve, dans chacun des programmes officiels, le même paragraphe d'algorithmique déclinant les mêmes objectifs pour le lycée. Dans le détail des contenus de chaque année, on retrouve différents algorithmes attendus explicitement ou le travail explicite de l'algorithmique à certains moments. Le document d'accompagnement de seconde explicite les type d'activités attendues en algorithmique et les choix d'utilisation et de présentation des algorithmes. Nos remarques les plus importantes sur ces instructions officielles, c'est-à-dire sur le savoir à enseigner, sont les suivantes :

- Le concept d'algorithme ne fait pas l'objet d'une définition dans ces curriculums.
- L'algorithmique y est présentée comme une démarche.
- Les concepts d'algorithme et de programme sont très peu distingués, voire confondus.
- L'algorithme est uniquement présenté sous son aspect outil.
- L'activité autour des algorithmes est assez souvent réduite à une activité langagière, dans le but de produire un programme.
- Le système de représentation principal et très majoritaire est AI.

Ces résultats montrent une première étape de transposition didactique de l'algorithme montrant une distance avec le concept tel que nous l'avons étudié plus haut. Les figures 4 et 5 présentent des extraits des instructions officielles illustrant nos analyses.

La grille ci-dessous peut donner quelques éléments en ce sens, non limitatifs il va de soi, et on adaptera ce questionnement aux situations effectivement rencontrées.

| Critère | Excellent | Bon | Moyen | Insuffisant |
|---|---|---|---|---|
| **Respect des bons usages** Le but visé par l'algorithme est explicité, et des commentaires précisent le déroulement. Les variables ont des noms bien choisis. | Aucune erreur | De petits détails sont négligés. Le but est difficile à déterminer | Des détails manquent, mais le programme tente quand même d'accomplir ses fonctions essentielles. | Ne répond pas au problème posé. Objectif impossible à déterminer |
| **Correction du code :** L'algorithme fonctionne. | Fonctionne correctement dans **tous** les cas. | Fonctionne pour des données (entrées) standard mais échecs mineurs sur des cas particuliers. | Échoue pour des données (entrées) standard, mais pour une raison mineure. | Échoue pour des données (entrées) standard, pour une raison importante. |
| **Interface utilisateur :** (entrées, sorties) Elle est claire et commode. | Aucune faute | 1-3 fautes mineures | Plus de trois fautes mineures ou une faute majeure | Plus d'une faute majeure |

*Figure 4 : Grille d'évaluation des algorithmes proposée dans le document d'accompagnement de seconde, on n'y retrouve que des critères relatifs à la maîtrise du langage de programmation et aux bonnes pratiques de programmation.*

### *Dans le curriculum d'Informatique et Sciences du Numérique*

Les instructions officielles de l'enseignement de spécialité de terminale scientifique Informatique et Sciences du Numérique (ISN) montrent une transposition bien différente.

Même s'il s'agit d'un enseignement uniquement à destination d'élèves de terminale scientifique, on relève des éléments qui vont au-delà d'une question de difficulté conceptuelle mais bien de choix de transposition didactique d'un objet, dont atteste la figure 5 :

- Une définition d'algorithme, assez proche de celle que nous avons rapportée, est donnée dans le programme.
- L'algorithmique est présentée comme une branche de l'informatique.
- La distinction est faite, dans le savoir à enseigner, entre algorithme et programme.
- L'algorithme est présent à la fois comme outil et comme objet (par exemple, par une référence à la notion de complexité).
- L'algorithmique n'est pas restreinte à la programmation : certains algorithmes sont explicitement mentionnés comme trop complexes pour être programmés par l'élève mais dont les principes doivent être connus.
- Comme corollaire de cela, on retrouve les systèmes de représentation AI et AM.

On retrouve donc ici des choix curriculaires qui font entrevoir un positionnement vis-à-vis de l'algorithmique très différent du précédent. Il peut même sembler, à première vue, paradoxal de retrouver ici certains éléments que nous aurions plutôt attendus en mathématiques, notamment les algorithmes non restreints à la programmation, la présence du paradigme AM, ou une définition du concept d'algorithme.

| Informatique et Sciences du Numérique | Mathématiques |
|---|---|
| Le programme est construit autour de quatre parties : représentation de l'information, **algorithmique**, langages et programmation, architectures matérielles.<br>[…]<br>Un algorithme **se définit** comme une méthode opérationnelle permettant de résoudre, en un nombre fini d'étapes clairement spécifiées, toutes les instances d'un problème donné. Cette méthode peut être exécutée par une machine ou par une personne.<br>[…]<br>On présente simultanément les notions d'algorithme et de programme **puis on les distingue**. […]<br>L'objectif est une compréhension de ces algorithmes et la capacité à la mettre en œuvre. | La **démarche algorithmique** est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique.<br>[…]<br>Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à **traduction** sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul. […]<br>À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de **rigueur** et de les entraîner aux **pratiques systématiques de vérification et de contrôle**. |

*Figure 5 : Extraits des programmes de mathématiques et d'ISN, des choix de transpositions didactiques très distincts apparaissent (mis en gras par nous).*

## Une analyse plus approfondie de la transposition didactique en mathématiques

Le travail d'analyse de la transposition didactique de l'algorithme dans l’enseignement de mathématiques du lycée français, soutenu par le modèle épistémologique développé, nous a permis de dégager plusieurs indicateurs relatifs au savoir enseigné. Ce que l'on retrouve dans les ressources et manuels est en totale continuité avec ce que proposent les programmes. L'algorithme est essentiellement traité comme un outil, le système de représentation très majoritaire est AI et l'activité est très souvent de l'ordre de la traduction dans un langage de programmation comme l'attestent les exemples de la figure 6 ci-dessous.

En ce qui concerne les ressources des IREM, il faut distinguer deux types de ressources : des ressources pour la classe et des ressources pour la formation des enseignants. La figure 7 montre la prédominance, pour la classe, d'activités de programmation et mettant en jeu l'algorithme uniquement comme outil.

**93 ALGORITHMIQUE**

**1.** Écrire un algorithme qui permet de calculer l'aire d'un rectangle en entrant ses dimensions.

**2.** Le programmer sur un logiciel ou une calculatrice.

**36 ALGORITHMIQUE** @ TICE

**1.** Créer un algorithme qui demande deux réels $a$ et $b$ et qui affiche quel est le plus grand des deux nombres $p = e^{\frac{a+b}{2}}$ et $q = \dfrac{e^a + e^b}{2}$.

**2.** Programmer cet algorithme et le faire tourner pour différentes valeurs de $a$ et $b$. Que conjecture-t-on ?

*Figure 6 : Deux exercices d'algorithmique. Manuels Math'x (Didier) seconde et terminale S : Des tâches de traduction de formules mathématiques dans un langage de programmation.*

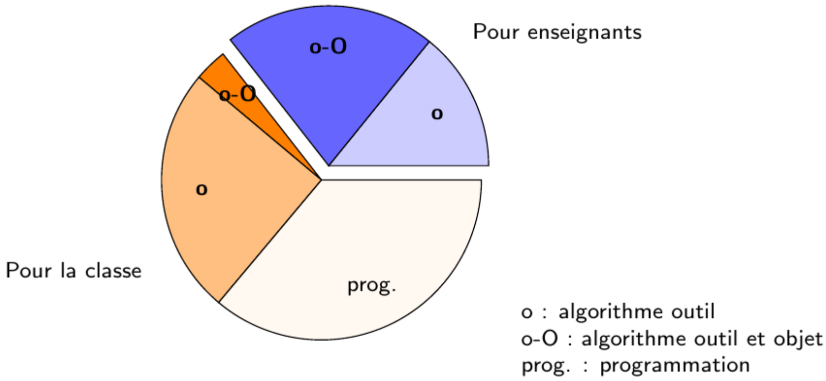



*Figure 7 : Répartition des ressources en algorithmique en ligne des IREM, entre ressources pour la classe et ressources pour la formation des enseignants et statut de l'algorithme dans ces ressources. Prédominance de l'algorithme outil et de la programmation pour la classe.*

L'algorithme, comme objet, n'apparaît pratiquement que dans les ressources pour la formation des enseignants. L'exemple de la figure 8 montre ce phénomène, en réservant aux enseignants les questions où l'algorithme est objet : les premières questions portent sur la construction et l'implémentation d'algorithmes (on est dans l'outil, comme indiqué sur la figure) et les deux dernières questions, mettant en jeu l'algorithme comme objet via la complexité (recherche d'instances induisant un certain comportement de l'algorithme et optimalité de l'algorithme), font l'objet d'une suggestion de ne pas les proposer aux élèves.

### 7.1 Je cherche un nombre entre 1 et 1000

*Prérequis algo :* Instructions conditionnelles et boucles conditionnelles.
*Prérequis math :* Mathématiques du collège. Récurrence pour la preuve de la dernière question.

Ce jeu se joue à deux joueurs A et B. Le joueur A choisit secrètement un nombre cible compris strictement entre 1 et 1000. Le joueur B doit deviner ce nombre en faisant le minimum de propositions. À chaque proposition du joueur B, le joueur A répond par « le nombre cherché est plus grand », « le nombre cherché est plus petit » ou « bravo, vous avez gagné » selon la position de la proposition par rapport à la cible à atteindre.

Exercice 1 :
Le but de cet exercice est de jouer contre l'ordinateur.
Question 1 – Proposer un algorithme pour que l'ordinateur tienne le rôle du joueur A.
Question 2 – Programmer et tester cet algorithme en langage Python. On utilisera les instructions suivantes :

```
from random import *  // pour importer la librairie
randrange(1000)       // pour tirer un nombre entre 1 et 1000
```

**[…]**

Question 5 – Écrire et tester cet algorithme en langage Python.

Algorithme outil

Question 6 – Quels sont les nombres à choisir pour que l'ordinateur trouve la solution en au moins 9 coups ?
Question 7 – Montrer que l'algorithme « optimum » permet de toujours trouver l'entier en au plus 10 essais.

**[…]**

Algorithme objet

*Remarque* – Dans une situation pour la classe, on utilisera les mêmes exercices sans les questions 6 et 7.

*Figure 8 : Extrait d'une ressource pour la formation des enseignants de l'IREM de Grenoble. Les questions 1 à 5 mettent en jeu l'algorithme outil, puis dans les questions 6 et 7 l'algorithme devient objet. La remarque finale montre une restriction de l'algorithme objet à la seule formation des enseignants (annotations à droite par nous).*

## Trois concepts didactiques pour éclairer la transposition didactique

L'analyse des ressources nous a amenés à proposer trois concepts didactiques, témoins des phénomènes de transposition didactique en jeu, et caractéristiques de ce que l'on retrouve dans l'ensemble des ressources pour le lycée étudiées.

### *Programme-papier*

Nous avons appelé programme-papier le fait de présenter les algorithmes comme des programmes (au niveau de la forme) et dans lesquels, bien que l'on ne soit pas sur une machine, on se soucie de points liés à l'implémentation et à la machine. La figure 9 donne deux exemples de tels programmes-papiers. Ces objets témoignent d'une activité concentrée sur le système de représentation AI, sur l'activité algorithmique restreinte à une activité langagière et, souvent, à un amalgame entre programme et algorithme.

**Variables**
$x_A$ , $y_A$ , $x_B$ , $y_B$ , $x_I$ , $y_I$
**Entrées**
**Saisir** $x_A$ , $y_A$ , $x_B$ , $y_B$
**Traitement**
$x_I$ **prend la valeur** $(x_A+x_B)/2$
$y_I$ **prend la valeur** $(y_A+y_B)/2$
**Sorties**
**Afficher** $x_I$ , $y_I$
**Afficher les points** A,B,I dans la fenêtre graphique.

VARIABLES : *a, b, x, y* nombres
ENTRÉES : Saisir *a, b, x*
TRAITEMENT ET SORTIES :
*y* prend la valeur $ax + b - 1/x$
**Si** $y = 0$ **Alors**
Afficher « solution »
**Sinon** afficher « pas solution »
**FinSi**

*Figure 9 : Deux programmes-papier issus du document d'accompagnement de seconde et du manuel Math'x (Didier) première S. On retrouve des éléments de saisies, d'affichage de texte*

*à l'écran ou de points dans un fenêtre graphique*

### *Algorithme-instancié*

Un algorithme-instancié est l'expression d'un algorithme dont les variables représentant l'entrée ont été remplacées par des valeurs précises. Un algorithme-instancié est à mi-chemin entre un algorithme et son exécution sur une instance. La figure 10 donne deux exemples d'algorithmes-instanciés. Ces objets posent un problème didactique vis-à-vis des relations algorithme-problème et algorithme-preuve, puisqu'on ne s'intéresse qu'à une instance donnée du problème. Quelle généralité représente la méthode décrite ? Comment montre-t-on que l'algorithme répond correctement à toutes les instances s'il n'y en a qu'une ? Si l'on décrit une méthode générale erronée sur une instance pour laquelle le résultat obtenu est valide, comment rejeter cette méthode ?

```
Mettre 5000 dans S
Mettre 0 dans N
Effacer l'écran
Tant que S est strictement inférieur à 8000
        Remplacer S par S*1,02
        Augmenter N de 1
        Afficher N et S
Fin du Tant Que
```

```
début
  Donner à res la valeur 1
  pour i de 1 à 10 faire
  | Donner à res la valeur res * i
  fin
  Afficher res
fin
```

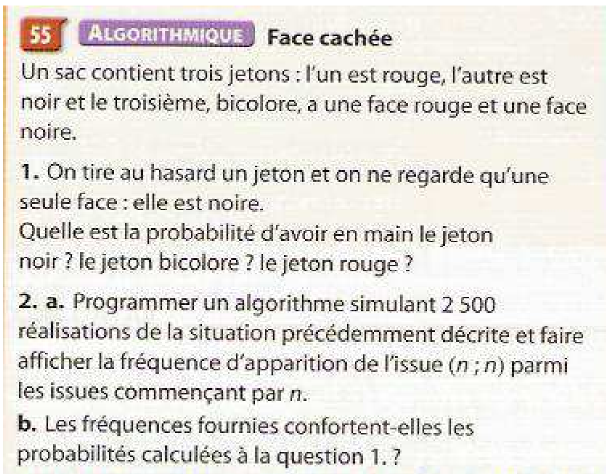
**Algorithme 7** : Factorielle "Pour"

*Figure 10 : Deux algorithmes-instanciés issus du document d'accompagnement de seconde et des ressources des IREM. On ne peut pas différencier ces procédures d'autres, erronées, qui donneraient le même résultat (N=24 pour le premier et res=3628800 pour le second).*

La présence d'algorithmes-instanciés est témoin d'une transposition didactique où l'algorithme est restreint à un outil ou à une formulation spécifique d'une méthode de résolution et où la notion d'instance est mise de côté.

### *Programme de modélisation-simulation*

Nous avons appelé programme de modélisation-simulation l'expression d'une méthode systématique visant à simuler un phénomène ou un modèle donné de ce phénomène. Il peut s'agir de simuler un jeu, une machine, une expérience, un modèle de comportement d'un appareil, etc. Il ne s'agit pas d'algorithme au sens où nous les avons définis, et il n'est pas possible d'exprimer le problème dont ces programmes de modélisations-simulations résoudraient un ensemble d'instances. Ces objets témoignent d'un amalgame entre algorithme et programme, car il s'agit uniquement ici de faire réaliser une ou plusieurs simulations pour, en général, conjecturer une propriété. La figure 11 donnent deux exemples de tels objets.


**55** ALGORITHMIQUE **Face cachée**

Un sac contient trois jetons : l'un est rouge, l'autre est noir et le troisième, bicolore, a une face rouge et une face noire.

**1.** On tire au hasard un jeton et on ne regarde qu'une seule face : elle est noire.
Quelle est la probabilité d'avoir en main le jeton noir ? le jeton bicolore ? le jeton rouge ?

**2. a.** Programmer un algorithme simulant 2 500 réalisations de la situation précédemment décrite et faire afficher la fréquence d'apparition de l'issue (*n* ; *n*) parmi les issues commençant par *n*.

**b.** Les fréquences fournies confortent-elles les probabilités calculées à la question 1. ?

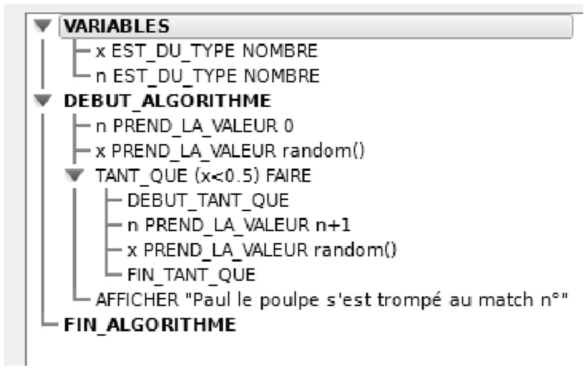

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  x PREND_LA_VALEUR random()
  TANT_QUE (x<0.5) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    x PREND_LA_VALEUR random()
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Paul le poulpe s'est trompé au match n°"
FIN_ALGORITHME
```

*Figure 11 : Deux programmes de modélisation-simulation issus du manuel Math'x (Didier) terminale S et des ressources des IREM. Il s'agit ici de simuler des expériences aléatoires.*

La présence de ces trois objets, programme-papier, algorithmes-instanciés et programmes de modélisation-simulation dans les ressources pour le lycée soutien les résultats de l'étude de la transposition didactique que nous avons présentés plus haut.

## VERS DES SITUATIONS POUR L'ALGORITHME

Sur la base du modèle épistémologique présenté précédemment, nous pouvons proposer une caractérisation des problèmes susceptibles de produire des situations d'apprentissage riches en algorithmique. Les critères que nous proposons sont les suivants :

- Le problème doit faire partie des problèmes pour lequel l'algorithme est outil de résolution, et mettre en jeu une famille d'instance.
- Le concept d'algorithme doit être indispensable à la résolution (il n'y a pas de résolution ne nécessitant pas d'algorithme).
- Le problème soulève des questions dans lesquelles l'algorithme est objet.

Nous ajoutons deux critères non nécessaires mais apportant un enrichissement :

- La résolution du problème peut mettre en jeu plusieurs systèmes de représentation.
- Le problème soulève de nouveaux problèmes qui peuvent être résolus algorithmiquement.

### Un problème de pesées

Nous proposons le problème suivant pour répondre à la caractérisation précédente.

> Problèmes des fausses pièces :
> Dans un ensemble de pièces indiscernables se trouvent des fausses pièces. Les vraies pièces pèsent toutes le même poids, les fausses aussi mais leur poids est différent de celui des vraies. À l'aide d'une balance Roberval à deux plateaux, peut-on retrouver les fausses pièces ? Si oui, quelle est la méthode qui permet de les retrouver en effectuant le moins de pesées possible ?

Plusieurs variantes peuvent être étudiées selon qu'il y a une ou au moins une fausse pièce, ou selon que l'on sait si les fausses pièces sont plus légères ou plus lourdes que les vraies ou non.
L'étude mathématique et didactique de ce problème a été menée dans (Modeste, Gravier, & Ouvrier-Buffet, 2010). Cette analyse révèle que le problème répond bien aux critères suivants :

- Le problème se résout algorithmiquement.
- Le concept d'algorithme est essentiel à la résolution.
- Il soulève des questions où l'algorithme est objet (complexité, comparaison, optimalité).
- Il peut mettre en jeu les systèmes de représentation PA et AM.
- Il soulève un ensemble de problèmes algorithmiquement résolubles ou pour lesquel on peut chercher des algorithmes.

Ce problème permet de mettre en jeu une dialectique outil-objet. Le fait qu'il s'agisse d'un problème d'optimisation est un facteur important dans cette perspective.
Des expérimentations ont été menées pour construire l'analyse a priori (Brousseau, 1998) de cette situation, sont aussi présentées dans (Modeste et al., 2010) et ont montré l'intérêt de ce problème. Le travail de thèse propose aussi une liste de problèmes à expérimenter.

## CONCLUSION

Ce travail de thèse permis la construction d'un modèle épistémologique du concept

d’algorithme, prenant en compte le savoir savant en mathématiques et en informatique. Le modèle produit a été validé et renforcé par confrontation aux conceptions de chercheurs.
Ce modèle s'est avéré pertinent et efficace pour étudier la transposition didactique du concept au lycée en France, en permettant d'analyser des ressources de différentes formes et aux objectifs variés. Cela permet de révéler une transposition partielle, concentrée sur une activité langagière à visée de programmation et limitant globalement l'algorithme à son aspect outil.
Le modèle permet aussi de proposer une caractérisation des problèmes ayant du potentiel pour l'apprentissage de l'algorithme, de proposer de tels problèmes et d'apporter des éléments, à la fois pour guider leur analyse mathématique mais aussi pour développer leur expérimentation et leur analyse a priori.

## Perspectives

Ce travail offre des perspectives pour proposer et expérimenter des activités en algorithmique et développer des ressources pour la classe. Le modèle proposé (ainsi que les concepts de programme-papier, algorithme-instancié, et programme de modélisation-simulation) peut fournir des éléments pertinents pour la formation continue et initiale des enseignants, dans un cadre où les liens entre mathématiques et informatique seront certainement de plus en plus présents dans les curriculums. Enfin, plus généralement, le travail mené montre l'importance de prendre en charge les interactions et les concepts à la frontière entre mathématiques et informatique, à la fois dans l'enseignement des mathématiques mais aussi dans la recherche en didactique des sciences mathématique et informatique. C'est un axe de recherche que nous souhaitons développer, dans la continuité du travail présenté ici.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


AHO, A. V., HOPCROFT, J. E., & ULLMAN, J. D. (1989). *Structures de données et algorithmes*. Paris: Inter Éd, D.L.

ARTIGUE, M. (1990). Épistémologie et Didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *10*(2.3), 241–285.

BALACHEFF, N., & MARGOLINAS, C. (2005). ck¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. MERCIER & C. MARGOLINAS (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1–32). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BEAUQUIER, D., BERSTEL, J., & CHRETIENNE, P. (1992). *Éléments d’algorithmique*. Masson.

BOUVIER, A., GEORGE, M., & Le LIONNAIS, F. (2005). *Dictionnaire des mathématiques*. Puf.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

CHABERT, J.-L. (2010). *Histoire d’algorithmes - du caillou à la puce* (2nd ed.). Belin.

CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., & CAZIN, X. (1994). *Introduction à l’algorithmique*. Paris: Dunod. http://opac.inria.fr/record=b1077377

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *7*(2), 5–31.

GAREY, M. R., & JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.

GIROUD, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Université de Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr

KNUTH, D. E. (1973). *The Art of Computer Programming, Volume I: Fundamental Algorithms* (2nd ed.). Addison-Wesley.

KNUTH, D. E. (1985). Algorithmic thinking and mathematical thinking. *The American Mathematical Monthly*, *92*(1), 170–181.

KNUTH, D. E. (1996). *Selected Papers on Computer Science*. Center for the Study of Language and Inf.

LOVÁSZ, L., & PLUMMER, D. (2009). *Matching Theory*. AMS Chelsea Pub.

MODESTE, S. (2009). *La place et le rôle de l'algorithme dans l'enseignement : vers un apprentissage de la preuve*. Université Joseph Fourier.

MODESTE, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Université de Grenoble.

MODESTE, S., Gravier, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2010). Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères IREM*, *79*, 51–72.

SEDGEWICK, R. (1988). *Algorithms*. Addison Wesley.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *10*(2-3), 133–170.

## Annexe

Extrait de : R*essources pour la classe de seconde – Algorithmique*, DGESCO, pp. 25-26 :

# 4 / Recherche de solution d'équation et d'extremum

## a. La dichotomie

| On se donne une fonction qui change de signe entre *a* et *b*. Résoudre l'équation *f(x)=0*. |
|---|

De nombreuses situations abordées dans l'année donneront lieu à la résolution graphique, numérique ou algébrique d'équations et d'inéquations.

Face à la multiplicité de ces problèmes, un algorithme automatisant cette tâche est légitime. Évidemment de nombreux outils logiciels intègrent les fonctionnalités numériques ou formelles permettant cette résolution.

### *Algorithme 5 : jeu du nombre à deviner*

Ce texte propose la programmation d'un petit jeu sur calculatrice, avant d'aborder la dichotomie.

| Programmer un jeu : deviner le nombre en six essais. |
|---|

On demande à l'utilisateur de deviner en moins de six essais un nombre tiré au hasard entre 10 et 100.

On lui indique à chaque fois si le nombre proposé est supérieur ou inférieur au nombre cherché. Sans stratégie, il est difficile d'y parvenir.

Le choix des valeurs 10 et 100 qui encadrent le nombre à trouver, ainsi que le nombre d'essais est à mettre en débat dans la classe. En effet, selon le choix de ces valeurs, il sera ou non possible de déterminer à coup sûr la solution avec une bonne stratégie, ou on pourra seulement optimiser les chances de gagner.

```
Variables
        N nombre choisi par l'utilisateur
Initialisation
        S, un nombre entier au hasard entre 10 et 100
        essai prend la valeur 1
Traitement
        Tant que essai est inférieur ou égal à 6
        |       Saisir N
        |       Si N est supérieur à S alors
        |       |       Affiche « c'est moins »
        |       └
        |       Si N est inférieur à S
        |       |       Affiche « c'est plus »
        |       └
        |
        |
        |       Si n=S alors
        |       |       Affiche « gagné »
        |       |       fin de programme
        |       └
        |       essai prend la valeur essai+1
        └
Sortie
        Affiche « perdu ».
```

Une bonne stratégie conduit à l'algorithme utilisant la dichotomie. Cette méthode consiste, en choisissant à chaque fois la valeur située au milieu de l'intervalle en cours, à réduire de moitié à chaque fois l'amplitude de l'intervalle dans lequel se trouve le nombre et comme $2^6$ est égal à 64, le dernier intervalle, sur cet exemple, est d'amplitude 1.

### *Algorithme 6 : recherche d'un zéro par dichotomie*

On transpose cette méthode ici. Cela donne l'algorithme suivant :

```
Variables
        m , valeur milieu de l'intervalle « courant »
Initialisation
        a et b, les bornes de l'intervalle [a ; b]
        f, la fonction (rappel : f change de signe entre a et b)
Traitement
        Pour i variant de 1 à 50
        |       m prend la valeur (a+b)/2
        |       Si f(m) et f (a) sont de même signe alors
        |       |       a prend la valeur m
        |       sinon
        |       |       b prend la valeur m
        |       └
        └
Sortie
        Affiche a et b
```

**Remarque :**

Les variables *a* et *b* changent de valeur au fur et à mesure de l'exécution de la boucle. Comme on exécute 50 fois celle-ci la largeur de l'intervalle initial est divisé par $2^{50}$ (environ $10^{15}$), ce qui donne un bon encadrement de la valeur cherchée.

# ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES DANS UN DOMAINE TECHNIQUE. ÉCOLES ET ACADEMIES DES MINES AU XVIIIe SIECLE

Thomas **MOREL**

Technische Universität Berlin

thomas_morel@msn.com

**Résumé**

Cet article propose une esquisse de l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les écoles et académies des mines. Dans l'Europe du XVIIIe siècle, l'exploitation minière constitue une source de revenus cruciale pour de nombreux états. La nécessité de former des ingénieurs, machinistes et administrateurs compétents va entraîner une institutionnalisation progressive de leur formation. Si les chronologies et les modalités varient d'une région à l'autre, les mathématiques occupent dans tous les cas une place de premier plan.

Dans une première partie, je me focaliserai sur l'institutionnalisation de la formation des géomètres souterrains, qui précède la création d'établissements d'enseignement proprement dits. La seconde partie décrit le lent et difficile processus d'institutionnalisation dans l'espace germanophone au cours du XVIIIe siècle. Une dernière partie est consacrée à un tour d'horizon des institutions et des rapports entre sciences mathématiques et sciences des mines dans divers pays européens.

**Mots clés :** histoire des mathématiques ; enseignement technique ; géométrie souterraine ; académie des mines de Freiberg ; académie des mines de Schemnitz ; Johann Friedrich Lempe.

## INTRODUCTION

Le but de cet article est de décrire un aspect de l'histoire des mathématiques pratiques au XVIIIe siècle, à savoir l'enseignement des mathématiques pour l'exploitation des mines. Pour des raisons sur lesquelles je reviendrai au cours de l'exposé, je parlerai dans un premier temps essentiellement de l'exploitation des mines dans l'espace germanophone, c'est-à-dire dans les états d'Europe centrale[1]. Cette thématique a été très peu travaillée, comme souvent lorsqu'on s'intéresse à l'histoire de l'enseignement des mathématiques pratiques. Une première raison est très concrète : les sources sont dispersées et peu facile d'accès. Plus fondamentalement, l'intérêt que la transmission de connaissances mathématiques pouvait avoir dans des domaines techniques comme les mines aux XVIIe et XVIIIe siècle a aujourd'hui largement été oublié. Des disciplines comme la « géométrie souterraine » ou, pour prendre un exemple complètement différent, « l'arithmétique forestière », nous semblent aujourd'hui étranges, alors même qu'elles étaient abondamment utilisées et discutées, et jouaient un rôle économique et social bien plus important que des disciplines prestigieuses comme la mécanique céleste.

[1] Cette publication s'inscrit dans le cadre du projet post-doctoral « *Markscheidekunst and Mathematics Teaching in the German Mining Academies* », que j'effectue à la *Technische Universität Berlin*, 2013-2016.

Ma question centrale sera : « Comment l'enseignement des procédés calculatoires et géométriques qui existaient depuis des générations dans les régions montagneuses d'Europe centrale s'est-il progressivement formalisé et institutionnalisé, jusqu'à prendre la forme d'académies des mines ? » Ce travail se base sur une exploitation systématique des archives des administrations et académies des mines des régions de Freiberg (Saxe, Allemagne) et Schemnitz (alors en Basse-Hongrie, dans la monarchie austro-hongroise, aujourd'hui en Slovaquie)[2]. En collectant des manuscrits mathématiques, mais aussi de nombreux documents administratifs, j'essaie de reconstituer les lents processus qui eurent lieu en Europe centrale au cours du XVIII[e] siècle et finirent par aboutir à la création d'écoles et académies des mines un peu partout sur le continent.

Un autre intérêt de cet article est ainsi d'apporter un éclairage différent sur des établissements célèbres comme l'*École des Mines*, créée à Paris en 1783, ou encore de l'*École centrale des travaux publics*, future École polytechnique, fondée en 1794[3]. On attribue à ces institutions, et dans une certaine mesure avec raison, un bouleversement de l'enseignement des mathématiques, en particulier dans la formation des ingénieurs. Il est vrai que la concomitance entre des événements politiques – la révolution Française et l'Empire Napoléonien – et l'essor de l'école de mathématiques française puis la révolution industrielle, interpelle[4]. Il semble presque que l'ingénieur moderne, qui a reçu une formation solide dans une école spécialisée, basée sur des méthodes fortement mathématisées, apparaisse spontanément entre 1800 et 1825. Mais il ne faut pas occulter le lent mouvement d'institutionnalisation à l'œuvre au cours du XVIII[e] siècle, dont cet exposé donne un aperçu en ce qui concerne le domaine des mines[5]. Les académies des mines ne seront donc pas ici présentées comme l'origine d'une nouvelle manière d'enseigner les mathématiques, mais au contraire comme l'aboutissement d'un long processus d'institutionnalisation.

À quoi servaient les mathématiques dans l'exploitation minière avant la révolution industrielle ? Comment les connaissances étaient enseignées, et selon quelles méthodes ? Pourquoi le modèle académique s'est finalement imposé face au perfectionnement de l'apprentissage maître-élève traditionnel ? Dans une première partie, je ferai le point sur la situation au début du XVIII[e] siècle, en décrivant le métier de géomètre souterrain et la transmission des connaissances sous forme de compagnonnage. Dans un second temps, je décrirai les premières tentatives – infructueuses – visant à créer des écoles où former les ingénieurs des mines. Le but est de rendre compte des enjeux complexes et multiples liés à l'institutionnalisation. La dernière partie dresse un panorama de l'enseignement des mathématiques dans les écoles et académies des mines à la fin du XVIII[e] siècle. Comme les enjeux sont complexes, il est cohérent que les solutions choisies par les états européens soient variées et adoptent des approches diverses vis-à-vis des sciences mathématiques.

## 1. LES GEOMETRES SOUTERRAINS, LEURS MANUSCRITS ET LEURS APPRENTIS

### 1.1. Géométrie et géomètres souterrains en Europe Centrale

Depuis le début de l'époque moderne, l'industrie minière a été très importante pour les États allemands et plus généralement en Europe centrale. Dès la fin du XV[e] siècle,

---

[2] Il s'agit principalement, à Freiberg, des archives de l'université technique (*Universitätsarchiv Freiberg*, UAF dans la suite du texte) et du fond ancien de la bibliothèque (TU BAF-UB) et, à Schemnitz, des archives minières (*Štátny ústredný banský archív*, ŠÚBA).

[3] Sur l'histoire de l'École polytechnique, l'ouvrage de référence est (Belhoste, 2003).

[4] Sur l'essor des mathématiques françaises dans la première moitié du XIX[e] siècle, voir (Grattan-Guinness, 1990).

[5] Pour un aperçu plus général de l'essor des mathématiques pratiques au XVIII[e] siècle, qui ne traite cependant pas de l'enseignement, voir (Frängsmyr *et al*, 1990).

l'exploitation de mines d'argent, d'or, de plomb et de cuivre prend son essor et joue un rôle de premier plan dans les débuts de l'industrialisation du continent[6]. De nouvelles villes sont fondées et des systèmes économiques et juridiques très organisés se mettent en place. Les royaumes créent des administrations des mines, chargées d'apporter une expertise technique et de permettre une exploitation en profondeur. Pour se faire une idée du niveau technique atteint dans les sciences mécaniques, métallurgiques et géognosique, il suffit de feuilleter le *De Re Metallica* publié en 1556 par Georgius Agricola, célèbre pour ses machines hydrauliques, mais où l'on voit déjà des géomètres souterrains[7].

Au cœur des États miniers, (*Bergstaaten*) les géomètres jouent un rôle central. Ils sont employés par l'administration et payés par les compagnies, ce qui doit garantir leur impartialité. Leur mission fondamentale est de faire respecter les limites de propriétés, d'où leur nom de *Markscheider*, qui désigne l'activité de borner une concession. Pour encourager l'exploitation, la prospection est partout autorisée et chacun peut obtenir une concession bornée. La difficulté vient des nombreuses règles qui visent à faire respecter les limites des propriétés sous terre, alors que celles-ci suivent des filons dont la trajectoire est peu prévisible.

À cette tâche initiale s'ajoutent bientôt d'autres devoirs. Le géomètre souterrain doit diriger le percement des galeries d'évacuation d'eau (*Wasserlösungsstollen*). Comme celles-ci atteignent couramment des longueurs de plusieurs kilomètres et que les travaux durent souvent des dizaines d'années, toute erreur se révèle extrêmement coûteuse. Il est ensuite chargé de relier les multiples puits de mines à ces galeries d'évacuation. Au milieu du XVIII^e^, un fonctionnaire des mines a cette remarque :

> « dans aucun autre domaine de la géométrie pratique le point ne doit être atteint aussi exactement, et dans aucun autre les erreurs ne se font plus sentir, pour l'œil comme pour le porte-monnaie, que dans la géométrie souterraine »[8].

Enfin, à partir du milieu du XVII^e^ siècle, les géomètres souterrains sont chargés de cartographier d'une part chaque exploitation de manière individuelle, et d'autre part chaque région minière, c'est-à-dire l'ensemble des puits reliés aux mêmes galeries d'évacuation des eaux. Concrètement, le géomètre souterrain doit descendre dans chaque puits, ce qui est à l'époque extrêmement dangereux. À l'étroit et mal éclairé, il doit ensuite relever la suite des angles, horizontaux et verticaux, de la ligne brisée que forme le puits, sans pouvoir vérifier ses mesures par d'autre mesures comme pourrait le faire un arpenteur à la surface. Portant ces données sur papier, il doit rendre visible et compréhensible l'enchevêtrement des galeries, faire respecter les droits de chacun et calculer la direction des futurs travaux.

## 1.2. Les manuscrits de géométrie souterraine

La profession et les devoirs du géomètre souterrain sont relativement bien connus. Du fait de son importance, les nombreux règlements des mines et les archives des administrations en parlent fréquemment[9]. Les difficultés commencent lorsque l'historien essaie de savoir non pas ce que ces praticiens faisaient, mais comment. Comme bien d'autres disciplines mathématiques pratiques, la géométrie souterraine est à l'époque un savoir protégé, qui n'est pas enseigné dans des universités ou dans des écoles. Les géomètres n'ont aucun intérêt à publier ou à laisser imprimer ces connaissances, qui les rendent indispensables et leur permettent de négocier face aux puissants actionnaires des mines (*Kuxen-Inhaber*). D'un autre côté, la discipline se structure en même temps qu'elle se complexifie. On assiste à des

[6] L'ouvrage de référence sur l'histoire de l'exploitation minière en Europe centrale est (Bartels et Slotta, 2012).

[7] Voir en particulier, dans (Agricola, 1556), livres 4 et 5.

[8] (Beyer, 1748, p. 313-314) Sauf indication contraire, toutes les traductions de l'allemand au français sont faites par l'auteur.

[9] Voir par exemple (Meixner *et al.*, 1980, p. 12 ; 37-43).

échanges entre les différentes régions minières, de nouveaux instruments apparaissent et le nombre des géomètres souterrains augmente. Comme elle appartient aux sciences minières, la géométrie souterraine profite de l'essor des connaissances sur la disposition des filons et du développement du droit minier. Les méthodes sont devenues trop complexes, et les problèmes à résoudre trop nombreux pour ne pas les coucher sur papier.

Voilà sans doute certaines des raisons pour lesquelles de nombreux manuscrits sont rédigés à partir de la seconde moitié du XVIIe siècle. Il s'agit de textes parfois signés et datés, qui se présentent comme de véritable compendiums ou manuels – certains possèdent même des tables des matières –, à la différence qu'ils ne sont pas imprimés[10]. Ils ont tous été écrits par des géomètres souterrains ou du moins par des administrateurs des mines possédant de bonnes connaissances sur ce sujet. Si leur structure est souvent similaire, il est cependant possible de distinguer des groupes de textes plus proches les uns des autres et de créer des généalogies entre eux. Ces textes doivent contenir l'ensemble des connaissances dont un géomètre souterrain peut avoir besoin dans sa carrière. Sans entrer dans une analyse détaillée de ces ouvrages, on peut distinguer plusieurs types de savoirs différents.

On trouve, d'une part, les savoirs fondamentaux, nécessaires pour pouvoir appréhender la résolution des problèmes spécifiques à la géométrie souterraine et, d'autre part, un vocabulaire technique spécialisé. Si les galeries et les filons peuvent, de notre point de vue, être modélisés par des figures mathématiques et réduits à des problèmes de positions relatives de droites et plans dans l'espace, ce n'est bien sûr pas ainsi que les géomètres souterrains les conçoivent. Les mineurs possèdent de multiples noms et verbes décrivant les objets et les actions relatives à leur métier. Ce langage technique (*Bergmannsprache*) est incompréhensible, y compris pour leurs contemporains, et nécessite des dictionnaires particuliers. On trouve ensuite une arithmétique particulière, puisque le système de mesure de longueur n'est pas décimal, tandis que plusieurs systèmes de mesure d'angles cohabitent. Il faut également enseigner le calcul, par exemple les règles de trois et de cinq, à des personnes qui ne sont parfois pas même allés à l'école secondaire et habitent dans de petites villes sans imprimeur, librairie ou bibliothèque. Les manuscrits doivent être un support indépendant qui permette à la fois l'apprentissage et l'exercice du métier.

Il faut ensuite des connaissances géométriques, qui vont de la connaissance du théorème de Pythagore à l'utilisation de la trigonométrie pour déterminer les longueurs recherchées par résolution de triangles. Une partie importante est consacrée à la description des instruments de la géométrie souterraine, indiquant comment les utiliser et les combiner. On trouve également des tables numériques. La plupart sont des tables de sinus qui permettent de résoudre les triangles et donc *in fine* de déterminer les longueurs demandées. Elles sont commentées et adaptées pour simplifier les calculs, et se conformer aux unités de mesures en vigueur dans les régions minières. Les manuscrits contiennent enfin des listes de propositions. Il s'agit des tâches que le géomètre souterrain peut avoir à accomplir, et des problèmes auxquels il est susceptible d'être confronté.

### 1.3. Enseigner les mathématiques pratiques au début du XVIIIe siècle

Ces manuscrits, qui n'ont jusqu'ici jamais été étudiés, constituent à mon avis un genre de littérature scientifique ou technique à part entière. Il est clair que leur but est double. Ils servent de vade-mecum, c'est à dire d'outil de travail pour le géomètre souterrain qui peut s'y référer dans la pratique de son art. Ils ont également clairement un but didactique et étaient forcément impliqués dans le processus de diffusion des connaissances. Ils ne sont cependant pas suffisants pour reconstruire la manière dont était enseignée la géométrie souterraine au sens strict, et plus généralement les mathématiques pratiques des mines, dans la seconde

[10] Une liste de ces manuscrits et des lieux où ils sont conservés, régulièrement mise à jour, se trouve à l'adresse suivante http://morelthomas.wordpress.com/documents/.

partie du XVII[e] et la première moitié du XVIII[e] siècle. Pour appréhender comment la géométrie souterraine était enseignée, il faut comprendre la structure sociale des États miniers. Nous pouvons ainsi éclairer l'utilisation des manuscrits en utilisant les archives et documents administratifs de l'époque.

Tout d'abord il est clair qu'il était, dès le XVII[e] siècle, possible de payer pour acquérir un enseignement en docimasie ou en géométrie souterraine, comme en témoignent non seulement les comptabilités locales, mais également des témoignages de voyageurs[11]. En l'absence d'un lieu particulier pour apprendre, il faut en déduire que l'enseignement avait lieu sous la forme d'une transmission du maître à l'élève, soit chez le géomètre souterrain proprement dit, soit dans les mines. Des règlements, publiés dans la première moitié du XVIII[e] siècle pour codifier des pratiques depuis longtemps en usage, nous informent plus précisément sur le déroulement. Celui qui apprend doit

> « écouter la leçon avec la déférence qui convient, l'assimiler et s'en imprégner, et en même temps porter chaque leçon sur papier, et la présenter de temps en temps à l'instructeur [pour voir] s'il a quelque chose à y ajouter, et par la suite non seulement conserver ces *scripta notata* de cours en bon ordre, et les parcourir régulièrement, mais aussi garder la main dessus et ne les rendre publique ou ne les brader à quiconque, pour de l'argent ou pour toute autre raison. »[12]

Les manuscrits étaient donc lus et recopiés par les élèves. Le paiement du cours comportait ainsi vraisemblablement le droit d'établir une copie, strictement personnelle et qui ne devait sous aucun prétexte être diffusée. Ce système était étroitement contrôlé par l'État, qui depuis le début du XVIII[e] siècle fournit également un système de bourses[13], comme le montre l'existence même de ces règlements. En Saxe, par exemple, un petit nombre de géomètres souterrains sont assermentés et sont les seuls à pouvoir enseigner la discipline. À la fin de sa période d'apprentissage, qui dure un à deux ans, l'élève reçoit un certificat officiel détaillant les compétences qu'il a acquise. Ces documents possédaient une grande valeur, on en trouve par exemple en Scandinavie[14] – ce qui suggère que les géomètres formés en Saxe étaient très demandés, mais je n'ai pas connaissance d'exemplaires conservés en France.

Si l'on étudie le contenu de ces certificats (voir Fig. 1. ci-dessous), on constate que les compétences attestées par les maîtres géomètres souterrains correspondent en tout point au système de propositions que l'on trouve dans les manuscrits étudiés dans la partie précédente. Ils attestent donc de l'acquisition des savoirs contenus dans ces manuscrits, prouvant par là-même que ceux-ci constituaient bien le socle de l'apprentissage. Cet ensemble de documents permet de reconstruire le fonctionnement, très organisé, du système d'enseignement. Un petit nombre de géomètres enseignaient selon leurs propres manuscrits, qui étaient recopiés, et établissaient des certificats à l'aide desquels leurs élèves pouvaient ensuite prouver leurs capacités et ainsi espérer obtenir un poste dans une administration des mines dans toute l'Europe, voire dans le nouveau Monde.

Avant de terminer cette partie, il faut introduire deux remarques. Premièrement, nous voyons qu'il peut exister des formes élaborées d'enseignement sans école ou académie officielle. Ces systèmes permettent au contraire une certaine maîtrise de la diffusion des connaissances. Deuxièmement, si cette organisation peut sembler artisanale, il faut garder à

---

[11] À Freiberg, il faut compter environ 50 talers, ce qui correspond au salaire annuel moyen d'un ouvrier mineur peu qualifié (voir par exemple UAF – OBA 6, ff. 244r-245r). Si l'on ajoute que la formation dure en moyenne un à deux ans, durant lesquels l'apprenti ne possède pas de revenus, on comprend que cet apprentissage était hors de portée des simples mineurs (sauf soutien exceptionnel) et concernait le plus souvent les fils d'administrateurs des mines.

[12] Règlement de la *Bergschule* Schemnitz, 22 juin 1735. Voir (Schmidt, 1834, p. 481).

[13] (Sennewald, 2002). Un système de bourse est créé en 1702 en Saxe, et au cours de la décennie suivante en Autriche-Hongrie.

[14] On en trouve un exemple dans (Berg, 2008, p. 154). On trouve également en Scandinavie un système de bourses pour financer les voyages dans les États allemands et la formation des géométres souterrains.

l'esprit qu'elle a lieu à grande échelle et dans plusieurs régions[15]. De plus, ce système évolue pour s'adapter aux difficultés croissantes. Par exemple, on voit dans les années 1750 apparaître à Freiberg une procédure standardisée d'examens qui conditionnent l'attribution des bourses[16]. En étudiant la création d'institutions comme les Écoles et Académies des mines, il faut donc garder à l'esprit que, dans les régions possédant une tradition minière forte, il existait déjà d'autres modes efficaces de transmission des savoirs mathématiques pratiques.

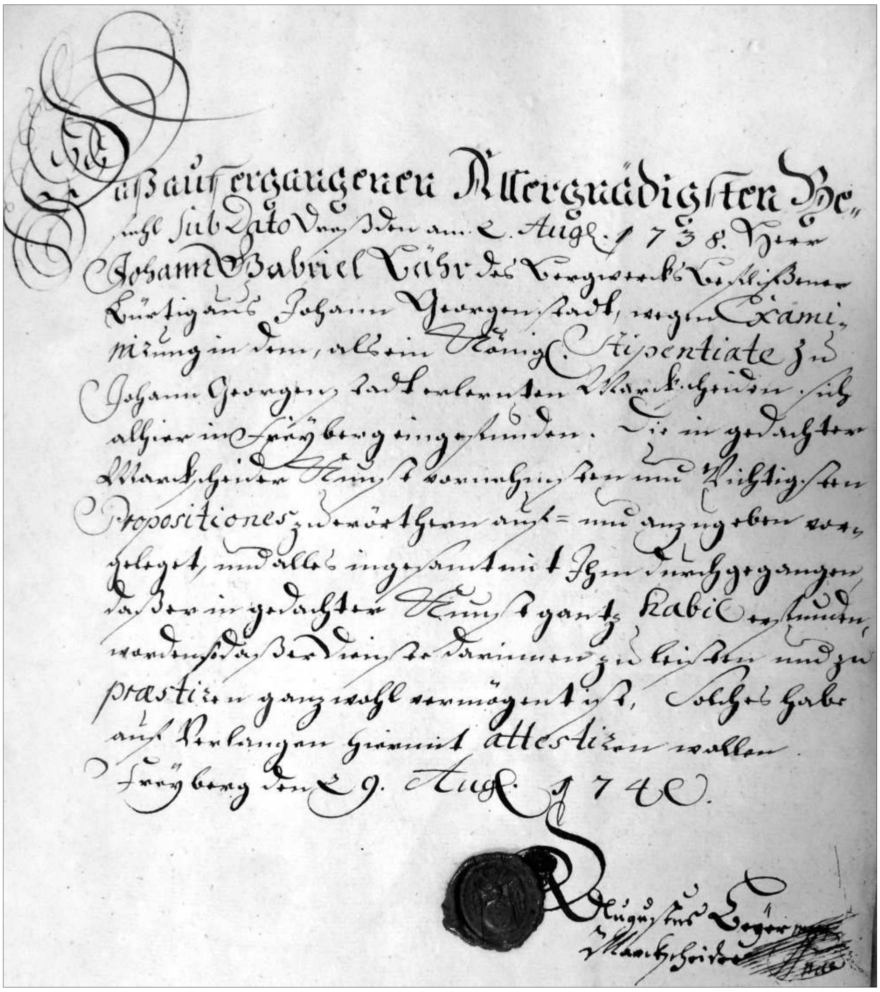


Fig.1 : *Certificat d'aptitude à la géométrie souterraine, rédigé en 1740 par A. Beyer (1677-1753),* Markscheider *à Freiberg, Saxe, pour J.G. Bähr, apprenti depuis 1738.*
Source : Universitätsarchiv Freiberg – OBA 5, f. 122r.

## 1.4. Une question ouverte : la formation des ingénieurs machinistes

Dans cette partie, je me suis focalisé sur les géomètres souterrains, d'une part car c'est la profession mathématisée la plus ancienne dans ce domaine et d'autre part car c'est celle pour laquelle le plus de sources ont été conservées. Il est cependant important de mentionner une autre utilisation très importante des mathématiques dans les mines : la construction de machines. Les situations étaient très variables selon les conditions d'exploitation dans chaque région. La Saxe, très en pointe sur la géométrie souterraine, faisait au XVIII^e siècle moins appel aux machines pour épuiser l'eau des mines.

On rencontre une situation complètement différente à Schemnitz, dans les mines de

15 Sur la circulation des connaissances mathématiques en géométrie souterraine, voir (Morel, 2015).

16 Pour un exemple de ces examens, qui contiennent des épreuves d'écriture, de calcul et de dessin, voir UAF – OBA 6, f. 66r-72v.

Basse-Hongrie. Dès les années 1720, des machines à vapeur de type Newcomen sont installées dans les mines[17]. Si elles sont rapidement abandonnées, de nouvelles machines hydrauliques alimentées par des systèmes de barrages sont bientôt installées. Une famille d'ingénieur, les Hell, s'illustre par leurs qualités de constructeurs. Ces machines n'étaient pas conçues de manière purement empirique et l'on parlait couramment à l'époque du « calcul d'une machine » pour désigner les études mathématiques préliminaires et les tests auxquels elles étaient soumises. Ces connaissances ont peut-être été diffusées de manière aussi systématique que pour la géométrie souterraine, mais les sources manquent sur ce point.

## 2. MATHEMATIQUES ET EXPLOITATION DES MINES : UN PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION COMPLEXE.

Au milieu du XVIIIe siècle, on assiste à plusieurs tentatives d'institutionnalisation de l'enseignement des mathématiques. Il s'agit de la création ou de réformes de structures existantes, dont le but est d'améliorer, de systématiser et d'augmenter l'utilité et l'utilisation des mathématiques dans l'exploitation des mines. On admet en général que les académies et écoles des mines ont été créées à partir des années 1760, au lendemain de la guerre de Sept Ans (1756-1763). Cette affirmation est vraie si l'on ne considère que les entreprises pérennes proposant un enseignement de type « académique », mais il ne faut cependant pas ignorer les nombreuses tentatives de la première moitié du siècle. L'échec même de ces projets est révélateur, en particulier pour l'histoire de l'enseignement des mathématiques. Je détaillerai ici trois tentatives ayant eu lieu dans les trois principales régions minières d'Europe centrale : dans l'Électorat de Hanovre (Allemagne centrale), en Autriche-Hongrie et en Saxe.

### 2.1. Le *Gymnasium* de Clausthal et le problème du public

Pour améliorer l'enseignement des mathématiques dans les régions minières, une première possibilité est de se servir d'institutions existantes et d'y modifier la formation pour mieux l'adapter aux problèmes géométriques, hydrauliques et arithmétiques rencontrés dans les mines. C'est le choix qui va être fait par l'Électorat de Hanovre. Les mines y sont concentrées dans une région, le Harz, dont la capitale Clausthal possède déjà un *Gymnasium*. Il s'agit d'un établissement secondaire classique, ce qui signifie que son rôle est de préparer les élèves, issus de la noblesse ou de la bourgeoisie locale, pour qu'ils puissent s'inscrire à l'université voisine de Göttingen. Par conséquent, les programmes scolaires se focalisent sur les langues anciennes : latin, grecs et parfois hébreux, ainsi que sur la religion[18].

Mathématiques et sciences naturelles sont alors réduites à la portion congrue. Au début du XVIIIe siècle, le recteur de l'école, Calvör Henning (1686-1766), est très intéressé par les sciences mécaniques. Il affirme « que dans les écoles des villes de montagnes, la jeunesse devrait être introduite aux mathématiques et à la mécanique, afin d'aider ceux qui se destinent à l'exploitation des mines et de pouvoir être utile au pays » (Henning, 1763, introduction). En 1726, il publie dans le bulletin annuel de l'école un mémoire historico-scientifique décrivant l'ensemble des machines mécaniques utilisées dans la région.

Si Henning n'explique pas dans les détails du contenu et de la méthode qu'il a pu employer, il se propose d'aborder la géométrie, l'arithmétique et la trigonométrie, pour pouvoir ensuite enseigner aux élèves les bases de la statique, de la mécanique, de l'aérostatique, de l'hydrostatique et de l'hydraulique, ce qui est pour l'époque particulièrement ambitieux. Son aspiration est novatrice, mais ses efforts ne seront cependant pas couronnés de succès, comme il le reconnaît lui-même dans un livre publié en 1763 :

---

[17] Voir par exemple (Vozar, 1976) sur ce sujet.

[18] Sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les écoles classiques en Allemagne, nous renvoyons aux nombreux travaux de Gert Schubring.

> « Au cours des 17 années durant lesquelles j'ai enseigné à Clausthal […] j'ai instruit la jeunesse en mathématiques, et j'ai même formé des individus tout à fait capables, qui obtinrent dans toutes les parties mentionnées ci-dessus une science profonde et suffisante. Mais je ne puis me rappeler d'un seul, qui, après être sorti de l'école, se soit engagé dans les travaux des mines ou des charpentes, et qui ait ainsi tiré, par le moyens de la théorie, une utilité pratique de ces sciences mathématiques. » (*Ibid.*, p. 7)

Henning a donc bien enseigné les mathématiques, mais à un public mal choisi. Il ne suffit donc pas d'enseigner les mathématiques dans une ville de montagne, mais il faut également s'assurer d'atteindre la bonne audience. Henning, qui connaît bien les techniciens et administrateurs locaux, ne peut que constater que ceux-ci manquent non seulement de connaissances, mais aussi de livres disponibles et utilisables en allemand. Seul, il ne peut cependant parvenir à réorienter l'école dans laquelle il enseigne.

## 2.2. L'école de Samuel Mikoviny (1735-1750) et le problème des enseignants

Une autre solution est de créer une institution dédiée à ce domaine particulier sans passer par une école classique existante. C'est ce qui va se passer en Autriche-Hongrie. En 1733, l'empereur envoie un de ses conseiller visiter les exploitations minières de Basse-Hongrie et demande un rapport sur l'amélioration de celles-ci. Le défaut principal semble venir du non-respect des procédures et du manque d'administrateurs compétents. On suggère de recruter un professeur de mathématiques, et une École des mines (*Bergschule*) est finalement créée en 1735.

L'école ne compte cependant qu'un professeur attitré, Samuel Mikoviny (1700-1750). Après avoir étudié dans les universités d'Altdorf et Iéna, il devient cartographe et arpenteur. Mikoviny est ensuite actif comme ingénieur dans la province de Bratislava (à l'époque Pressburg, parfois Pozsony), et est élu au début des années 1730 membre correspondant de l'Académie des sciences de Berlin[19]. À Schemnitz, il est non seulement enseignant mais aussi ingénieur, mettant notamment en place un système complexe de réservoirs d'eau pour alimenter les machines des mines[20]. Cette école est un prolongement du système de bourses qui existait auparavant. Les élèves doivent réaliser des travaux pratiques avec des géomètres souterrains et des essayeurs de minerai. Le programme de ces enseignements appliqués correspond, sans surprise, au contenu des manuscrits que nous avons étudié dans la première partie[21]. Le grand changement est la présence d'un mathématicien qui doit enseigner non seulement la résolution de problèmes pratiques, mais donner une perspective plus large en mathématiques théoriques.

Les cours de mathématiques et mécaniques de Mikoviny, regroupés sous le nom générique de *mathematica*, ont lieu en hiver, tandis que durant l'été, il parcourt la monarchie austro-hongroise pour réaliser des ouvrages d'art, aménager des rivières et établir des cartes. Le nombre des élèves, nommés *Expectanten*, est fixé à 8 par an. Ils suivent un cursus de deux ans : l'hiver, ils assistent aux cours de Mikoviny, suivis l'été de cours pratiques en géométrie souterraine, sur la métallurgie ou bien sur les machines à feu et les machines hydrauliques avec le *Kunstmeister* Jozef Carl Hell[22].

[19] Pour une biographie de S. von Mikoviny, voir (Tárczy-Hornoch, 1937). Mikoviny est un ingénieur au sens large du XVIII[e] siècle : typiquement, il est employé comme ingénieur militaire durant les guerres de Silésie, au lieu de développer les mines. Voir aussi plus récemment (Török, 2011) malheureusement en hongrois, mais les annexes sont en langue originale, avec de nombreuses lettres de Mikoviny en allemand et latin.

[20] Ces réservoirs sont nommé *Tajchy*, de l'allemand *Teich*, étang ou réservoir. Il s'agit d'une série de lacs artificiels ayant joué un rôle très important dans le développement technique et économique de la région.

[21] Voir le règlement de l'école rédigé en 1735 dans (Schmidt, 1834, p. 472-494), et en particulier la liste de propositions de géométrie souterraine pp. 483-485.

[22] Sur les autres, plus petites écoles fondées dans l'empire autrichien, voir (Hornoch, 1941). Ces écoles, qu'il s'agisse de cette de Sankt-Joachimstahl (1716) ou de celles de Schmölnitz et Orawitz (1747), n'ont eu qu'une existence éphèmere.

Après avoir subi un examen terminal, les élèves sont ensuite envoyés dans d'autres régions minières de l'Empire, où ils restent en stage jusqu'à ce qu'un poste d'administrateur se libère. Ils forment de fait un corps de réserve dans lequel le gouvernement pioche pour recruter ses administrateurs, sur un modèle similaire aux écoles du Génie et des Ponts et Chaussées en France (Birembaut, 1986). À la mort de Samuel Mikoviny en 1750, son poste n'est cependant pas renouvelé. L'enseignement des *mathematica*, les matières mathématiques théoriques, est simplement confié à l'un des géomètres souterrains locaux, Johann Tobias Brinn[23]. Les cours, qui avaient jusque-là lieu dans un espace public, la *Kameralhaus* de Schemnitz (centre local de l'administration des mines, où l'on trouve à la fois les cartes, les tables et le matériel), ont dorénavant lieu chez le géomètre souterrain. Il s'agit *de facto* d'un retour à la situation antérieure.

Si l'École des mines de Schemnitz a bien formé des administrateurs des mines, contrairement au *Gymnasium* de Clausthal, elle n'a pu survivre à la mort de son premier et unique professeur. La difficulté rencontrée est ici le manque de structure institutionnelle et de soutien politique. Cette école, comme plusieurs tentatives similaires en Europe à la même époque, était toute entière dépendante d'une personnalité exceptionnelle, en l'occurrence le mathématicien et ingénieur Samuel Mikoviny.

### 2.3. « L'Académie de papier » de C.F. Zimmermann

L'école de Clausthal ne s'adressait pas au bon public, tandis que celle de Schemnitz était si fortement dépendante de son unique professeur qu'elle disparut avec lui. La troisième et dernière tentative que nous étudierons, celle de Freiberg en Saxe, surmonte ces deux écueils. Son seul défaut est d'être restée, selon les mots de son créateur, une « académie de papier », c'est-à-dire un simple projet. En 1746, Carl Friedrich Zimmermann publie un ouvrage intitulé *Ober-sächsische Berg-Academie*. Il y propose une réflexion très détaillée sur la manière d'encourager l'exploitation des mines et plus généralement les activités techniques et économiques, par le biais d'institution d'enseignement et de recherche, qu'il nomme « académies ». Il analyse la situation avec perspicacité et se place immédiatement dans une perspective européenne : « Quand les autres pays veulent développer une science, ils essaient de lui apporter ordre et profondeur, et ceci peut seulement être atteint par la création d'académies » (Zimmermann, 1746, 13).

Il propose une analyse détaillée des besoins et suggère de fonder une académie avec deux professeurs de mathématiques, deux physiciens, deux chimistes et trois ou quatre ingénieurs mécaniciens. Il faudrait y ajouter des assistants, un géomètre souterrain, un maître de dessin et un juriste (*Ibid*., 26-27). L'ambition de la proposition tranche avec les modestes tentatives de Clausthal et Schemnitz, d'autant plus que les étudiants devraient avoir déjà appris l'arithmétique et la géométrie élémentaires avant d'entrer à l'Académie. Ils suivraient alors un programme de mathématiques très ambitieux :

> « Les disciplines suivantes pourraient ainsi être enseignées par le *Professores Matheseos,* à la place d'une introduction aux mathématiques : la géométrie, la trigonométrie, la statique et l'hydraulique. Il faudrait ensuite expliquer l'exploitation minière proprement dire et ses travaux manuels, ainsi que la géométrie souterraine et la construction des machines. Et si l'on avait un *Mathematicus* qui possède une compréhension solide de la physique, il serait le mieux placé pour enseigner la géographie souterraine, car il la connaît grâce à la géométrie pratique, au nivelage et à la géométrie souterraine pratique. » (*Ibid*., 33-34)

Le plan de C.F. Zimmermann est novateur non seulement par son échelle, mais surtout par sa vision des sciences mathématiques et minières. Il est clair qu'il est à l'époque bien trop coûteux pour être réalisé, et l'auteur lui-même le reconnaît explicitement à plusieurs reprises. Mais là n'est pas l'essentiel. Zimmermann insiste avant tout sur le fait que tout domaine technique doit, pour se développer, s'appuyer sur un enseignement approfondi comportant une

23 Voir par exemple un rapport de J.T. Brinn dans ŠÚBA – HKG VI, Kr. 655.

part de théorie et une part de pratique. Dans son projet, la transmission des connaissances va de pair avec la recherche de nouveaux résultats et chaque professeur aurait ainsi cette double mission. Cela est à l'époque loin de faire l'unanimité, comme il le reconnaît d'ailleurs lui-même :

> « À ceux que mécontentent tous les instituts qui ressemblent trop à des écoles, cette manière d'améliorer l'exploitation des mines par l'investigation des sciences semblera ridicule, et ils croiront qu'il ne s'agit que d'élucubrations fantaisistes qui ne peuvent apporter aucune amélioration pratique réelle. » (*Ibid.*, § 21)

En 1746, lorsque ce livre est publié, on trouve en Allemagne des universités qui dispensent un enseignement théorique, tandis que les ingénieurs ne possèdent pas d'institutions spécialisées. En France même, l'École des Ponts et Chaussées ne sera fondée que l'année suivante par Daniel-Charles Trudaine (Birembaut, 1986, 376-379). Le projet de C.F. Zimmermann semble intéresser au plus haut point les dirigeants du royaume de Saxe, puisqu'il est nommé sur le champ *Oberbergkommissar*, un haut poste dans l'administration des mines. Il meurt cependant l'année suivante, et le projet ne sera jamais réalisé. Peu après commence la Guerre de Sept Ans, qui va ravager l'Europe centrale jusqu'en 1763.

## 3. DE FREIBERG A PARIS, DES SITUATIONS VARIEES A LA FIN DU XVIII$^{e}$ SIECLE

À la fin de la Guerre de Sept Ans, les grands pays européens, et en particulier les États allemands, vont créer des écoles et académies des mines. Il serait cependant erroné de penser qu'il s'agit ici d'une catégorie fixe. Les termes « écoles » et « académies » des mines recouvrent selon les contextes des réalités bien différentes. Nous décrirons ici les deux modèles principaux, qui sont eux-mêmes loin d'être homogènes. Le premier est celui des académies créées dans des régions possédant une longue tradition minière. Le second est celui des académies créées *ex nihilo* par des États puissants, afin d'encourager le développement de l'exploitation des mines.

### 3.1. Mathématiques dans les régions minières : les cas de Freiberg et Schemnitz

Bien qu'il y ait quelques différences notables entre les académies des mines de Freiberg, en Saxe et Schemnitz, en Basse-Hongrie, je me focaliserai ici sur les nombreux points communs. Les deux établissements, qui se disputent la couronne de plus ancienne académie des mines au monde, sont créés au cours des années 1760[24]. Dans les deux cas, un système de bourses existait auparavant et fonctionnait avec succès à grande échelle. Certains élèves pouvaient suivre des cours, uniquement pratiques, de géométrie souterraine et d'essayage des métaux. Dans les deux cas, enfin, on trouve des raisons à la fois politiques et scientifiques à la création des institutions. D'un point de vue politique, il s'agit de réorganiser, de mieux former et de mieux contrôler l'administration des mines. D'un point de vue scientifique, on cherche à encourager le développement et la diffusion des sciences minières, notamment en proposant une formation solide en mathématiques.

En ce qui concerne l'organisation générale, il faut tout d'abord souligner que les étudiants doivent, en majorité désormais, suivre un cursus cohérent de trois années[25]. Ce cursus est conçu, discuté et éventuellement réformé par les professeurs et l'administration des mines. Ce qui nous semble aujourd'hui évident, du moins dans le système d'enseignement

[24] Une première chaire est créée en 1762 à Schemnitz, mais le statut d'académie n'y est délivré qu'en 1770, tandis qu'une académie avec deux chaires est créée en 1765 à Freiberg.

[25] Ceci s'applique aux étudiants boursiers, dont les études sont financées par les États et qui s'engagent à entrer dans l'administration à la fin de leurs études.

supérieur français, est à l'époque une innovation considérable[26]. Il est remarquable que les mathématiques occupent toujours une place de premier plan. Bien qu'il n'y ait que deux ou trois professeurs par académie, on trouve toujours une chaire de mathématiques, considérée à Freiberg comme « la plus importante de toutes nos chaires académiques » (UAF – OBA 62, f. 116r). À Schemnitz, la situation est tout à fait similaire, comme l'explique le professeur C.T. Delius (1728-1779) en 1773 :

> « Comme la science des mines est fondée, pour la plus grande partie, sur la *Physique & les mathématiques*, ces deux objets sont la base des deux premières classes : dans la première, on enseigne l'*Arithmétique,* l'*Algèbre,* la *Géométrie,* la *Trigonometrie,* l'*Aérométrie,* la *Méchanique,* l'*Hydraulique,* l'*Hydrostatique* ; dans la seconde, la *Minéralogie* & la *Chimie métallurgique* […]. Dans la troisième, l'*Art d'exploiter les mines* dans toutes leurs parties, la *Géométrie souterraine*, les *Loix des Mines*, les *Finances*, & la connoissance que les officiers des Mines doivent avoir de la *Régie des Forêts* : toutes ces sciences y sont traitées d'après les principes de la pratique théorique. » ( Delius, 1773, p. ix, traduction française de Schreiber, 1778)

Au niveau des mathématiques, ce nouveau système est décrit comme un enseignement « pratique théorique », c'est-à-dire d'un enseignement à but pratique réalisé dans un cadre scolaire (c'est le sens que possède « théorique » à cette époque). Il a plusieurs conséquences majeures que nous allons brièvement esquisser. D'une part, cela permet d'enseigner à un niveau bien supérieur les « mathématiques appliquées », qui comprennent à l'époque entre autres l'hydrodynamique, la mécanique et la construction des machines. D'autre part cela permet de proposer un enseignement dans lequel les cours de mathématiques ont une utilisation immédiate dans la pratique. Enfin, l'encadrement étroit des étudiants par les enseignants permet de s'assurer de la mise en pratique, dans des cas concrets, des connaissances acquises. Pour comprendre le rôle central des mathématiques, mais aussi à quel point le programme est conçu dans sa globalité, voici quelques explications données par Johann Friedrich Lempe (1757-1801), le professeur de mathématiques et mécaniques de l'Académie des mines de Freiberg, en 1798. Au début de son long rapport annuel, il écrit :

> « Comme les mathématiques pures élémentaires forment la bases des sciences susmentionnés [mathématiques appliquées] et sont même indispensables dans de nombreuses expériences de physique, leur plan d'enseignement figure ici en premier. Et tous les plans se suivent, tout comme chacune de ces sciences donne un coup de main aux autres »[27].

Cette articulation s'observe également dans les tableaux annuels fournis par J.F. Lempe, dont un extrait est reproduit en Fig. 2. ci-dessous. On remarquera que ces tableaux se placent dans la plus pure tradition des sciences administratives et camérales du XVIII[e] siècle, visant à fournir une vision panoptique de l'enseignement. Les étudiants qui participent au cours de « mathématiques appliquées » ont tous suivi le cours de « mathématiques pures », et de même ceux qui suivent le cours de « physique » ou de « théorie des machines » ont tous suivi le cours de « mathématiques appliquées ». Les classes, dont l'effectif est réduit à une dizaine d'étudiants, sont donc relativement homogènes, d'autant plus que ces sciences ne sont pas enseignées *in abstracto,* mais en lien constant avec leur mise en pratique dans les mines.

Outre les professeurs de mathématiques, plusieurs autres personnes sont impliquées dans l'enseignement des sciences géométriques et calculatoires. Des cours de dessin technique, d'arpentage et de géométrie souterraine sont assurés, le plus souvent par des géomètres souterrains qui font partie de l'administration des mines. Il faut souligner que ces cours ont lieu directement sur le terrain. À Schemnitz par exemple, les cours de géométrie souterraine pratique sont assurés par le géomètre Lorenz Siegel. Ils ont lieu dans la

26 Pour une comparaison avec l'enseignement des sciences mathématiques dans les universités allemandes de l'époque, et en particulier à Leipzig, voir (Morel, 2013, pp. 180-187).

27 UAF – OBA 12, f. 21v : « Da aber die reine elementare Mathematik die Grundlage von alle den obgenannten Wissenschaften und selbst bey sehr vielen physikalischen Experimenten unentbehrlich ist, so steht hier, ihr Plan zuerst: und alle Pläne folgen so aufeinander, wie eine von diesen Wissenschaften der andern die Hand bittet. »

*Markscheiderei*, le quartier général des arpenteurs et géomètres, où sont stockés les cartes et les instruments, et où travaillent les professionnels[28].

Un dernier point important concerne l'encadrement des étudiants et le déroulement des enseignements. Comme chaque cours comporte, selon son niveau, d'une poignée à une ou deux douzaines d'étudiants, le professeur de mathématiques peut produire pour chaque personne un rapport détaillé. Contrairement à l'université, où le système des cours magistraux prévaut largement, un cours de l'Académie inclut des exercices concrets. Sur une question générale du professeur, l'étudiant doit aller dans un puits de mine et modéliser le problème pour pouvoir lui apporter une solution mathématique[29]. Les progrès de chaque étudiant sont suivis par le professeur, et il n'est pas rare que les meilleurs étudiants suivent un cours plusieurs fois de suite pour s'y spécialiser.

Enfin, il faut souligner une dernière caractéristique des académies des mines situées dans des régions minières. Même si elle ne concerne par directement l'enseignement, elle joue indirectement un rôle absolument décisif : les professeurs de mathématiques ont un profil et une activité très spécifiques. Ils sont presque toujours d'anciens étudiants de l'académie, ou tout au moins des mathématiciens pratiques, par exemple des géomètres souterrains ou des ingénieurs hydrauliques. Ils sont ensuite en dialogue constant avec les autres membres de l'administration des mines. Ils apportent leur expertise, par exemple lors de la planification de nouvelles machines, pour résoudre des questions de propriété complexes, c'est-à-dire dans tous les domaines où ils peuvent faire usage de leurs compétences scientifiques. Les étudiants sont donc placés dans un cadre où théorie et pratique sont étroitement imbriquées, si bien que les frontières entre l'Académie proprement dite et l'exploitation des mines sont parfois plus des catégories de l'historien qu'une réalité de l'époque.

[28] Voir le rapport de Lorenz Siegel, ŠÚBA – HKG VI, *Ordinaria*, 06.04.1778, dans lequel il décrit précisément à la fois le contenu et l'organisation de son enseignement.

[29] On trouve des exemples concrets d'exercices pour l'Académie des mines de Freiberg dans (Morel, 2013, 166-170).

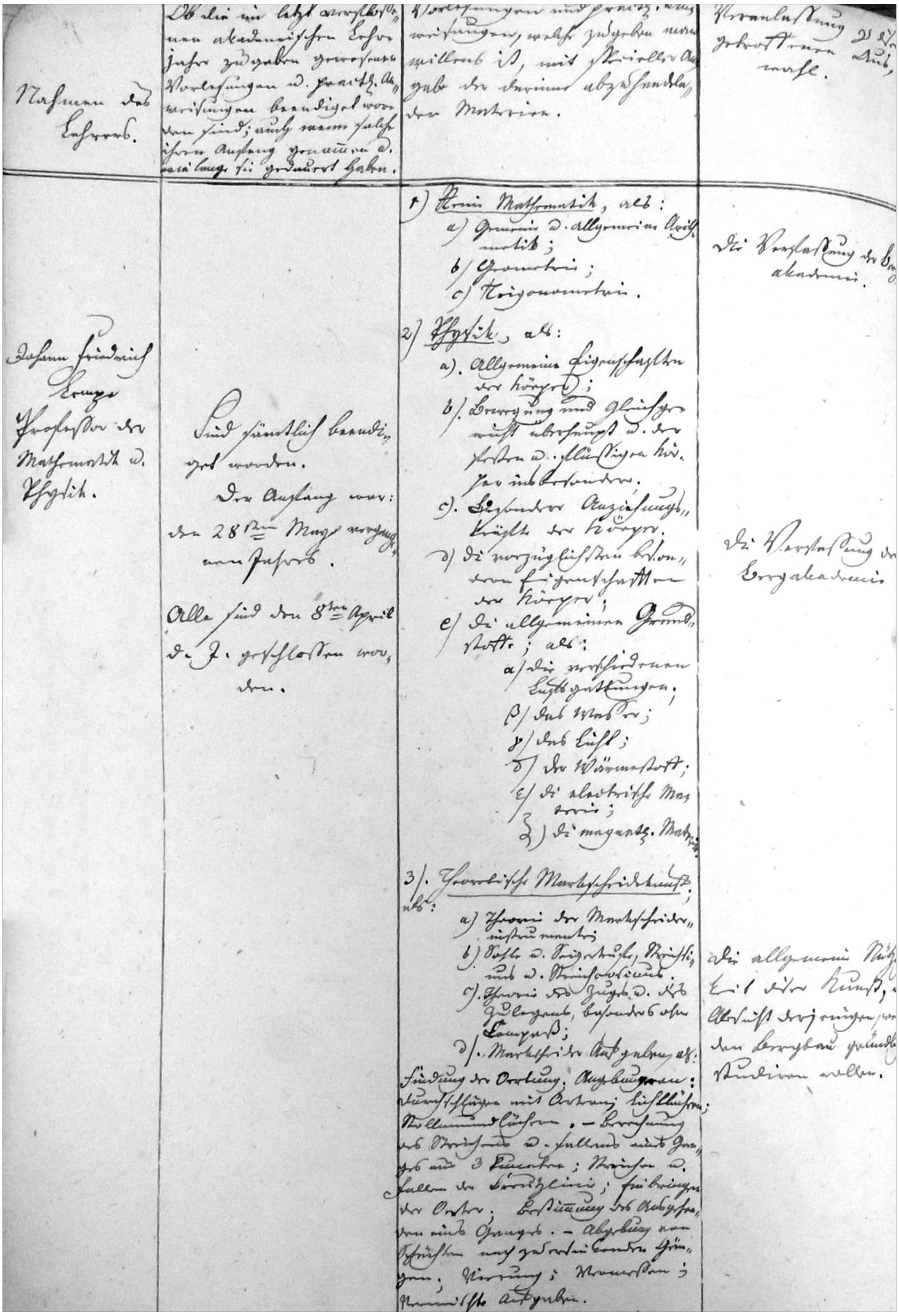


Fig.2 : *Tableau de J.F. Lempe, professeur de mathématiques à l'Académie de Freiberg, pour l'année 1796-1797, décrivant le contenu et l'articulation des enseignements (détail)*
Source : Universitätsarchiv Freiberg – OBA 256, f. 17v.

## 3.2. Berlin et Paris: les Académies des mines dans les capitales

Dans les cas de la France et de la Prusse, la situation est tout à fait différente. Les deux monarchies absolutistes n'ont pas de véritable tradition minière ; tout au plus la Prusse vient de conquérir la Silésie suite aux guerres de succession d'Autriche (1740-1748). Le développement économique au cours du XVIIIe ainsi que des raisons politiques poussent les gouvernements à encourager la recherche de nouvelles mines et leur exploitation rationnelle[30]. Cependant, les traditions politiques font que, dans les deux cas, les institutions seront créées dans les capitales, où il n'y a bien sûr aucune exploitation minière.

Un rapide point sur le cas prussien va permettre de montrer les limites et les différences de cette approche. Je me base ici sur l'étude de cas réalisée par Ursula Klein sur l'École des mines de Berlin (Klein, 2010). Dans les années 1760, la Prusse cherche à se remettre de la Guerre de Sept Ans et observe la création d'une Académie des mines en Saxe. Un important conseiller et minéralogiste, Carl Abraham Gerhard (1738-1821), est envoyé à Freiberg en 1770. Après de nombreux compte-rendu et réunions, l'idée d'une académie en bonne et due forme est abandonnée, et le gouvernement se contente de créer une série de cours de type universitaire. En effet, le modèle de Freiberg est considéré comme trop coûteux et trop imparfait dans la mise en pratique des connaissances. Les cours dans des institutions existantes de Berlin ont au contraire un grand avantage : il y a déjà de nombreux professeurs de mathématiques et des autres sciences physiques dans la capitale. L'inconvénient est bien sûr que l'on n'y retrouve pas l'étroite interaction entre théorie et pratique qui fait le succès des académies de Freiberg et Schemnitz. Dans le domaine des mathématiques, cela signifie que l'enseignement est tout à fait semblable à un enseignement universitaire. On considère simplement que la géométrie souterraine ou la construction de machine ne sont que de « simples applications » de la géométrie et de la mécanique.

La situation est assez similaire dans le cas de la France. Le problème est là-aussi que, pour des raisons variées et notamment juridiques, il n'y a pas au XVIIIe siècle de tradition minière forte. Le problème est bien résumé par Denis-Charles Trudaine (1703-1769) intendant des finances et créateur des Ponts et Chaussées : « Les obstacles viennent principalement du défaut de bons mineurs. Il ne dépend pas du gouvernement de faire que ceux qui n'ont ni théorie ni pratique, en ayent ; mais il peut [...] travailler à la propagation des lumières en faisant former les élèves qui ne soient pas de vains discoureurs » (Birembaut, 1986, 375-376). Dans les années 1740 et 1750, on envoie pour cela de nombreux savants et ingénieurs dans les états allemands, et en particulier en Saxe. Dans le même temps, on recrute des ingénieurs allemands, dont les géomètres souterrains König ou Broelmann, pour les mines de Bretagne et du Dauphiné.

L'école des Ponts et Chaussées, créée en 1747, tente de fournir un enseignement de substitution. Mais le principe d'enseignement mutuel qui y prévaut, ainsi que l'utilisation de manuels non-spécialisés, comme le *Cours de mathématiques* de Bossut ou les *Élémens d'algèbre* de Clairaut, limitent son utilité (Birembaut, 1986, 375-377). Dans le même temps, les savants français revenus de Saxe écrivent des rapports qui montrent toute la spécificité de l'utilisation des sciences dans les mines[31]. Plusieurs projets pour créer des écoles en province, notamment dans les Vosges, échouent.

Finalement, en 1783, une École des mines est créée à Paris. Le cursus dure trois ans et comprend l'enseignement de « la physique, la géométrie souterraine, l'hydraulique et la manière de faire avec le plus de sûreté et d'économie les percements […] et les machines nécessaires à leur exploitation » (article second de l'arrêt du 19 mars 1783, d'après (Birembaut, 1986, 390-391). Les élèves doivent suivre en hiver et au printemps des cours théoriques, avant de faire des stages en province dans les exploitations. L'influence de l'Allemagne, et en particulier de l'Académie de Freiberg, est claire. Le premier professeur de géométrie souterraine et de science des machines est Jean-Pierre-François Guillot-Duhamel

30 Pour la Prusse, on trouve la volonté d'assurer son indépendance en matière d'armement vis-à-vis de la Suède. La France cherche à diversifier son économie en encourageant les fabriques et manufactures, suite à la perte d'une grande partie de ses colonies au profit de l'Angleterre après la Guerre de Sept Ans.

31 Voir en particulier les *Voyage Métallurgiques* (Jars, 1774).

(1730-1816), qui a étudié avec les géomètres allemands dans les années 1750. En 1787, il publie d'ailleurs une *Géométrie souterraine, élémentaire, théorique et pratique*, où il affirme :

> « Afin d'étendre sur toutes ces parties les détails d'une instruction proportionnée à leur importance & aux besoins des Elèves, je dicte des cahiers sommaires sur tout ce qui est relatif aux procédés & à la manutention, de manière que l'art unit sans cesse à la théorie une pratique sûre ; car sans cette double connoissance, il n'y a point de vraie lumière capable de diriger les exploitations des mines : je m'en suis convaincu par une expérience de trente-cinq années. » (Duhamel, 1787, p. v)

Il existe cependant un problème fondamental dans la question des publics. Cette école s'adresse, tout comme les Ponts et Chaussées ou plus tard Polytechnique, à un nombre réduit d'élèves au profil bien spécifique. Cette élite d'inspecteurs des mines est ensuite chargée de parcourir les territoires, mais ne sont pas, ou pas principalement, des techniciens impliqués dans la production. Le problème n'est donc pas seulement d'avoir une institution qui enseigne les mathématiques et la minéralogie. Encore faut-il savoir comment et à qui l'on enseigne, un problème similaire à celui rencontré à Clausthal quelques années auparavant (voir 2.1 ci-dessus). Les cours forcément théoriques de l'école de la capitale ne peuvent pas toujours être rendus pratiques dans les mines de province, car celles-ci n'ont pas, en cette fin de XVIII^e^ siècle, un personnel compétent comme leurs homologues allemands. Et formant principalement des inspecteurs et des savants, l'école ne se donne pas vraiment les moyens de remédier à cette difficulté.

L'histoire de l'École des mines de Paris est par la suite aussi agitée que cette de la France révolutionnaire. Refondée en 1794 par le Comité de Salut Public, elle est finalement supprimée en 1802 au profit de deux écoles pratiques, à Geiserlautern en Sarre et à Pesey en Savoie (Garçon, 2004, pp. 55-85). Si les modes d'organisation changent, la dichotomie subsiste : la pratique, au lieu d'accompagner la théorie, la remplace souvent. En 1814, l'École des mines de Paris est réinstaurée, sans qu'un véritable lien avec les exploitations ne soit introduit. Le haut niveau de mathématiques théoriques développé à Paris n'a que peu d'impact sur la formation des techniciens proprement dits. En 1816, lorsqu'une école pratique est créée à Saint-Étienne (Garçon, 2004), le directeur Schreiber écrit ainsi que l'« on ne trouverait peut-être pas dans nos exploitations un seul maître-mineur, d'origine française, sachant lever un plan souterrain » (Babu, 1900, p. 17). Johann Gottfried Schreiber (1746-1827) est lui-même, comme son nom l'indique, d'origine allemande. Il a étudié à l'École des mines de Freiberg, dans la tradition allemande de géométrie souterraine et de mathématiques pratiques.

## CONCLUSION

En conclusion, il ressort de cet exposé que les institutions créées à la fin du XVIII^e^ siècle sous les noms d'académies ou d'écoles des mines ne sauraient être abordées d'une manière réductrice ou simpliste. Il ne s'agit nullement de l'introduction d'un enseignement en mathématiques dans un domaine technique jusque-là réfractaire. On a parfois écrit que la nouveauté principale est l'introduction d'une formation théorique de haut niveau en mathématiques[32]. Il me semble que ce point de vue est réducteur à deux niveaux. D'une part, il existait de riches traditions d'enseignement dans certaines régions d'Europe bien avant la création des académies. Si ces traditions peuvent rétrospectivement sembler insuffisantes sur certains points, dont celui de la formation initiale en mathématiques, elles sont adaptées à un contexte social particulier. Dans ce cadre, elles ont permis de former pendant près de deux siècles des géomètres souterrains et d'affronter des problèmes d'une complexité croissante. D'autre part, il nous semble que l'innovation principale n'est pas l'introduction des mathématiques pures, mais la notion d'un cursus d'enseignement coordonné. La concertation entre les différents professeurs, la difficulté croissante des matières et la collaboration avec les

[32] Voir par exemple (Tok, 1983) sur Schemnitz.

ingénieurs, géomètres et maîtres de machines dans les États-miniers constituent un véritable nouveau modèle d'enseignement des mathématiques pratiques.

Il faut cependant dans le même temps reconnaître la variété des situations et les limites des concepts de « modèle » et « d'influence ». Les tentatives françaises font certes appel à des connaissances allemandes, faisant venir des spécialistes et envoyant de nombreux étudiants à Freiberg et Schemnitz. Lors de la création de l'École polytechnique, l'Académie des Mines de Schemnitz est même explicitement citée comme modèle[33]. Il n'empêche que toutes les tentatives françaises sont bien différentes, centrées sur Paris et sur l'enseignement des mathématiques pures. En Allemagne même, d'autres États choisissent des solutions hybrides, où de petites académies collaborent avec une université voisine, comme dans le cas du Hanovre avec l'université de Göttingen et l'École des mines de Clausthal fondée en 1775. Enfin, les autres académies militaires, forestières ou de commerce offrent de multiples exemples. Ces méthodes d'enseignement des mathématiques et ces tentatives variées vont inspirer de multiples réformes des formations techniques au cours de la première moitié du XIX^e^ siècle. Celles-ci sont cependant presque toujours l'aboutissement de processus d'institutionnalisation de long terme visant à utiliser les mathématiques pratiques dans des domaines techniques particuliers.

Remerciements

Je tiens à remercier les archivistes des différentes institutions de Freiberg et Schemnitz, et en particulier le Dr. Herbert Kaden et Roland Volkmer, pour leur aide précieuse et leurs conseils durant mes recherches en archives.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AGRICOLA, G. (1556), *De Re Metallica libri XII*, Froben, Basileae.

BARTELS, C., SLOTTA, R. (2012), *Der alteuropäische Bergbau. Von den Anfängen bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts vol. 1*, Münster, Aschendorff.

BELHOSTE, B. (2003), *La formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin.

BERG, B.I. (2008), *Das Bergseminar in Kongsberg in Norwegen (1757-1814)*, in Der Anschnitt, vol. 60, pp. 152-165.

BEYER, AD. (1748), *Otia Metallica oder Bergmännische Neben-Stunden*, Schneeberg, Fulde.

BEYER, AU. (1749), *Gründlicher Unterricht von Berg-Bau, nach Anleitlung der Marckscheider-Kunst*, Schneeberg, Fulde.

BIREMBAUT, A. (1986), *Écoles techniques et militaires au XVIIIe siècle*, in Roger Hahn et René Taton (éds.), Enseignement et diffusion des sciences au XVIIIe siècle, vol. 4 et 5, Hermann, Paris.

DELIUS, C.T. (1773), *Anleitung zu der Bergbaukunst nach ihrer Theorie und Ausübung, nebst einer Abhandlung von den Grundsätzen der Berg-Kammeralwissenschaft für die Kaiserl. Königl. Schemnitzer Bergakademie entworfen*, Vienne, Tratter.

DUHAMEL, J.-P.-F.-G. (1787), *Géométrie souterraine, élémentaire, théorique et pratique*, Paris, Imprimerie Royale.

FRÄNGSMYR, T., HEILBRON, J.L. ET RIDER, R.E. (Eds.) (1990), *The Quantifying Spirit in the 18th Century*, Berkeley, University Press.

GARÇON, A.-F. (2004), *Entre l'État et l'usine, l'École des Mines de Saint- Étienne au XIX^e^ siècle*, Rennes, PUR.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1990), *Convolutions in French Mathematics 1800-1840*, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser Verlag, 3 volumes.

HENNING, C. (1763), *Acta historico-chronologico-mechanica circa metallurgiam in Hercynia*

[33] Dans un discours de Fourcroy daté du 24 septembre 1794, reproduit dans (Rapports, 1821, pp. 283-294)

*superiori, vol. 1*., Braunschweig, Waysenhausbuchhandlung.
HORNOCH, A.T. (1941), *Zu den Anfängen des höheren bergtechnischen Unterrichtes in Mitteleuropa*, in Berrg- und Hüttenmännische Monatshefte, 89(2), pp. 16-22.
JARS, G. (1774), *Voyages métallurgiques: ou, Recherches et observations sur les mines*, Lyon, Regnault.
KLEIN, U. (2010), *Ein Bergrat, zwei Minister und sechs Lehrende Versuche der Gründung einer Bergakademie in Berlin um 1770*, in NTM, 18(4), pp. 437-468.
MEIXNER, H., SCHELLAS, W., SCHMIDT, P. (1980), *Balthasar Rösler, Persönlichkeit und Wirken für den Bergbau des 17. Jahrhunderts*, Leipzig, VEB Verlag.
MOREL, T. (2013), *Mathématiques et politiques scientifiques en Saxe (1765-1851). Institutions, acteurs et enseignements*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux.
MOREL, T. (2015), *Le microcosme de la géométrie souterraine : échanges et transmissions en mathématiques pratiques*, in Philosophia Scientae, dans le cahier thématique « Échanges mathématiques : études de cas (XVIII^e-XX^e siècles) », 19/2, *à paraître*.
RAPPORT (1821), *Choix de rapports, opinions et discours: prononcés à la Tribune Nationale depuis 1789 jusqu'à ce jour*, vol. 15, Paris, Eymery.
SCHMIDT, F.A. (1834), *Chronologisch-systematische Sammlung der Berggesetze der österreichischen Monarchie*, section 2, vol. 6, Vienne, Staats-Aerial-Druckerey.
SENNEWALD, R. (2002), *Die Stipendiatenausbildung von 1702 bis zur Gründung der Bergakademie Freiberg 1765/66*. in *Beiträge zur Geschichte der TU Bergakademie Freiberg 1965-2002*, Freiberg, TU Bergakademie, pp. 407-429.
TARCZY-HORNOCH A. (1937), *Samuel v. Mikoviny, der erste Professor technischer Wissenschaften in Ungarn*. in: József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem bánya- és kohómérnöki osztályának közleményei, vol. 9, pp. 47–52.
TÖRÖK, E. (2011), *Mikoviny Samuel (1698-1750)*, Budapest.
Vozar, J. (1976), *Isaac Potter, constructeur anglais, et les premières « machines à feu » en Slovaquie*, Historické štúdie, vol. 20, pp. 73-100 (en Slovaque).
ZIMMERMANN, C.F. (1746), *Obersächsische Berg-Academie*, vol.1, Dresde, Hekel

# AU MILIEU DU GUE : ENTRE FORMATION DES ENSEIGNANTS ET RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Catherine **HOUDEMENT**

LDAR-Université de Rouen-ESPE

catherine.houdement@univ-rouen.fr

Remarque préalable
Dans la mesure où la note de synthèse développe les thèmes que j'ai abordés dans ma présentation au séminaire, je me permets de renvoyer à cette note. La troisième partie devrait faire l'objet d'un développement prochain… sans cesse retardé par les turbulences de la conjoncture liée à la formation en ESPE et à la refondation de l'école.

Cet exposé revisite mes trois thèmes de recherche : pratiques de formation, enseignement de la géométrie, résolution de problèmes, fondés sur une thématique commune, la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (3 à 11 ans).

La première partie reprend mes travaux de thèse (1995) qui ont proposé une organisation des pratiques de formation des professeurs des écoles en quatre types, différents quant au savoir visé (mathématique, didactique ou pédagogique), au mode de communication (cours dialogué, confrontation à un problème…), aux appuis didactiques. Ils ont analysé des déterminants stratégiques des choix des formateurs. Cette partie affine cette catégorisation des pratiques et des savoirs mathématiques et didactiques des enseignants, interroge leur transposition en formation et questionne les influences conjoncturelles sur les pratiques de formation.

Mes travaux géométriques ont pointé un savoir spécifique pour l'enseignant : l'organisation de la géométrie élémentaire en trois paradigmes (différents quant à leur relation au réel, le statut donné aux dessins et le type de preuve constitutive du paradigme) et l'Espace de Travail Géométrique (ETG) qui intègre les jeux entre paradigmes et donne une place aux artefacts. La deuxième partie de l'exposé revient sur la potentialité de l'ETG comme outil de comparaison de curricula, comme outil d'explicitation des malentendus entre élève et enseignant, entre ordres d'enseignement.

La troisième partie concerne la résolution de problèmes numériques à l'école. Elle repère des résonances et des frictions entre plusieurs points de vue, institutionnel, épistémologique, cognitif et didactique, réinterroge certaines pratiques issues de la recherche et de l'enseignement ordinaire. La pertinence d'une stabilisation d'une typologie des problèmes, en trois types (redéfinis) : basiques, complexes, atypiques est questionnée en insistant sur la nécessité d'un enseignement assumé de la résolution de problèmes basiques.
La question du tissage entre mathématiques et didactique pour l'enseignement, et sa transposition en formation des enseignants, sont les fils conducteurs de mes recherches.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M., & HOUDEMENT, C. (2007) Problem Solving in France: Research and Curricular Perspectives. *Zentral Blatt für Didaktik der Mathematik, 39. 5-6*, 365-382.

HOUDEMENT, C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM, 67*, 69-84.

HOUDEMENT, C. (2013) *Au milieu du gué: entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Paris-Diderot.
En ligne sur http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/95/71/66/PDF/Houdement_hdr.pdf

HOUDEMENT, C., & KUZNIAK, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-216

# ETUDE DE PROCESSUS DE RECHERCHE DE CHERCHEURS, ELEVES ET ETUDIANTS, ENGAGES DANS LA RECHERCHE D'UN PROBLEME NON RESOLU EN THEORIE DES NOMBRES

Marie-Line **GARDES**

Université Lyon 1

marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

**Résumé**

Nos recherches visent à étudier la question de la transposition du travail du mathématicien, via l'analyse de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants sur la recherche d'un même problème non résolu : la conjecture d'Erdös-Straus. Ce travail didactique s'appuie sur des analyses mathématiques et épistémologiques qui nous ont permis d'identifier différents aspects du travail du mathématicien et des éléments moteurs dans l'avancée de ses recherches. Cela nous a conduite à développer la notion de « geste » de la recherche pour décrire, analyser et mettre en perspective les processus de recherche des trois publics. Ces analyses ont mis en évidence les potentialités du problème pour créer une situation de recherche de problèmes pour la classe, plaçant les élèves dans une position proche de celle du mathématicien. Les analyses didactiques se sont appuyées sur la construction d'une telle situation puis sur sa mise à l'épreuve dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Dans cet article, nous mettons en évidence la méthodologie générale de la recherche, structurée selon les différents modèles de milieux (Bloch, 2002), et en particulier la construction d'un milieu favorisant l'émergence de gestes de la recherche.

**Mots clés**

Dimension expérimentale des mathématiques, problème de recherche, processus de recherche, théorie des nombres, conjecture d'Erdös-Straus.

## INTRODUCTION

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées, depuis près de trente ans, à la construction, la mise en œuvre et l'analyse de dispositifs didactiques permettant aux élèves de pratiquer des activités de recherche mathématique (Schoenfeld, 1985 ; Arsac, Germain, & Mante, 1988 ; Duchet, 1996 ; Grenier & Payan, 2003 ; Dias, 2008 ; Giroud, 2011). Ils mettent en évidence l'intérêt des enseignants et des élèves pour ces pratiques de classe (Arsac & Mante, 2007) mais également les difficultés de mise en œuvre et les freins au développement des problèmes de recherche en classe (Aldon et al., 2010). Nos recherches s'inscrivent dans la continuité de ces travaux, en partageant notamment l'hypothèse suivante :

> Il est possible de reproduire chez l'élève certains aspects du travail du chercheur en le mettant dans des situations appropriées. (Tisseron, 1998)

De cette hypothèse, sont nées les questions centrales de notre travail : que veut dire concrètement mettre les élèves en position de chercheur ? Que peut-on transposer de l'activité de recherche d'un mathématicien ? Comment construire un milieu riche favorisant l'activité de résolution de problèmes de recherche en classe ? Pour étudier ces questions autour de la transposition du travail du mathématicien, notre recherche s'est centrée sur l'analyse de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants sur la recherche d'un même problème non résolu :

la conjecture d'Erdös-Straus[1]. Notre hypothèse est qu'une mise en perspective des différents processus de recherche permettrait de dégager des éléments pour développer, dans l'enseignement, des pratiques mathématiques s'appuyant de manière effective sur la résolution de problème de recherche. De cette hypothèse, est né un questionnement de nature épistémologique et didactique. Nous nous sommes interrogée spécifiquement sur ce que l'on pourrait apprendre du travail mathématique effectif des chercheurs pour développer et enrichir des ingénieries favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche. Plus précisément, l'étude épistémologique porte sur la nature de l'activité de recherche mathématique professionnelle et la manière dont elle est pratiquée par les chercheurs. L'objectif épistémologique central est d'identifier des éléments invariants potentiels dans l'activité de recherche mathématique à travers des témoignages de mathématiciens et à travers le suivi du travail de mathématiciens. L'étude didactique consiste, elle, à l'identification des éléments pour la construction d'un milieu riche favorisant la résolution de problèmes de recherche dans les classes.

La méthodologie de recherche que nous avons élaborée s'appuie sur l'interaction de trois pôles (mathématique, épistémologique et didactique), et se structure en trois phases selon les modèles de milieux de Bloch (2002) :

- Une étude d'épistémologie contemporaine qui consiste, outre la lecture des travaux de recherches contemporains sur la conjecture et notre propre travail mathématique, à suivre des travaux de recherche de chercheurs « in statu nascendi » sur la conjecture d'Erdös-Straus (milieu théorique épistémologique au sens de Bloch).
- La construction d'une situation didactique de recherche autour de la conjecture par des allers et retours entre le milieu théorique et le milieu expérimental a priori (au sens de Bloch), en particulier grâce à la mise en œuvre de pré-expérimentations.
- Une expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique pour mettre à l'épreuve la situation didactique élaborée (confrontation à la contingence au sens de Bloch).

La première partie de cet article présente les analyses mathématique et épistémologique. Dans un premier temps, nous résumons l'analyse mathématique du problème de recherche choisi, réalisée à partir d'articles de la littérature existante d'une part et à partir de l'étude des recherches récentes de deux chercheurs d'autre part. Dans un second temps, nous présentons l'étude épistémologique avec l'identification de divers aspects de l'activité de recherche mathématique à partir de témoignages de mathématiciens ; la construction d'une grille d'analyse des processus de recherche et le développement de la notion de *geste* de la recherche ; la mise à l'épreuve de cette grille sur les travaux de deux chercheurs. La seconde partie de l'article est consacrée aux études didactiques, scindées en phases : construction d'une situation didactique de recherche autour du problème de recherche choisi et son analyse *a priori*, mise en œuvre d'une expérimentation en contexte de laboratoire et analyses *a posteriori* de l'expérimentation avec notamment l'analyse des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur recherche à l'aide de la grille construire et l'analyse du milieu.

## ANALYSE MATHEMATIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

Dans cette partie nous rendons compte des travaux que nous avons conduits pour élaborer le milieu théorique (au sens de Bloch) de la situation expérimentale autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans la première partie, nous résumons l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus que nous avons effectuée en étudiant et en articulant les résultats

[1] L'énoncé du problème est donné à la page suivante.

anciens et nouveaux sur le problème. Dans la seconde partie, nous présentons l'analyse d'épistémologie historique et contemporaine que nous avons conduite sur l'activité de recherche mathématique d'une part, et sur la conjecture d'Erdös-Straus d'autre part.

## Première partie : analyse mathématique

La méthodologie de l'analyse mathématique s'est structurée selon trois études : l'état de l'art du problème, l'étude des travaux récents de deux chercheurs et l'analyse des articulations entre les différents résultats. Après une brève présentation du problème et de ses principaux résultats, nous résumons ici les travaux des deux chercheurs : Thépault, amateur de problèmes mathématiques et Mizony, chercheur (retraité) à l'Université Lyon 1.

### *Présentation du problème et des principaux résultats*

Le problème choisi est une conjecture formulée par Erdös et Straus en 1950.

*Problème 71.*

La relation:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

a-t-elle des solutions en entiers $x$, $y$, $z > 1$, pour tout entier $n > 2$? (hypothèse de Straus et P. Erdös).

*Figure 1 – Enoncé de la conjecture d'Erdös-Straus (Erdös, 1963)*

Plusieurs mathématiciens, entre 1950 et 2011 se sont intéressés à la recherche de cette conjecture[2]. Nous présentons ici les trois résultats principaux.

**Résultat 1** : L'équation d'Erdös-Straus[3] a des solutions polynomiales en $n$ pour tout $n$ non congru à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840.

**Résultat 2** : Pour $n$ congru à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840, il n'existe pas de solutions polynomiales en $n$ lorsque $n$ parcourt l'une de ces progressions arithmétiques.

**Résultat 3** (Swett, 1999) : L'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout $n$ inférieur à $10^{14}$.

### *Recherches de deux chercheurs : Thépault et Mizony*

La démarche de recherche de résolution de la conjecture d'Erdös-Straus de Thépault a été la suivante :

1. Restriction de $n$ entier naturel à $n$ nombre premier[4]. Soient $n$ un nombre premier et $k$ un nombre entier. Alors $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$.
2. Pour $n = 4k + 3$, il donne la solution polynomiale suivante :
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{(4\mathrm{k}+3)(\mathrm{k}+1)((4\mathrm{k}+3)(\mathrm{k}+1)+1)} + \frac{1}{(4\mathrm{k}+3)(\mathrm{k}+1)+1} + \frac{1}{\mathrm{k}+1}$$
3. Pour $n = 4k + 1$, il donne une condition suffisante d'existence de solutions à l'équation

[2] Nous pouvons citer : Erdös (1950, 1963), Yamamoto (1965), Mordell (1969), Swett (1999), Schinzel (2000), Elsholtz & Tao (2011).

[3] L'équation d'Erdös-Straus est la relation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.

[4] Si l'équation admet, pour l'entier $n$, le triplet ($x$, $y$, $z$) comme solution alors elle admet, pour l'entier $kn$, le triplet solution ($kx$, $ky$, $kz$). Le théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers assure alors la réduction du problème aux nombres premiers.

d'Erdös-Straus.

**Théorème 1** : Soit $n = 4k + 1$. S'il existe $a$, $b$, deux entiers non nuls tels que $b$ divise $a^2$ et $4a - 1$ divise $bn + a$, alors

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{an} + \frac{4a-1}{n(a+bn)} + \frac{b(4a-1)}{a(a+bn)}$$

est une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires.

4. Etude de la conjecture pour des familles de nombres. A partir du théorème 1, il a montré que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tous les nombres impairs, à l'exceptions des nombres de la forme $n = 60k + 1$ et $n = 60k + 49$.

Les outils mathématiques utilisés par Thépault pour établir ces résultats sont essentiellement algébriques. En particulier, il transforme l'écriture de l'équation initiale pour ramener le problème à la résolution d'une équation du second degré avec une méthode « classique », à savoir celle de la somme et du produit des racines d'une fonction polynôme du second degré.

La démarche de recherche de résolution de la conjecture d'Erdös-Straus de Mizony a été la suivante :

1. Etude de la conjecture d'Erdös-Straus sous deux formes :
   *Conjecture forte* : Pour tout $n$ supérieur ou égal à 2, il existe $x$, $y$, $z$ tels que $4/n = 1/x + 1/ny + 1/nz$.
   *Conjecture faible* : Pour tout $n$ supérieur ou égal à 2, il existe $x$, $y$, $z$ tels que $4/n = 1/nx + 1/y + 1/z$.
2. Pour chaque forme de conjecture, il donne une condition suffisante d'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus.
   **Théorème 2** (pour la conjecture forte)[5] : Soit $n$ un nombre entier. S'il existe $m$, $d$, deux entiers tels que $d$ divise $m^2$ et $4m - 1$ divise $n + 4d$, alors
   $$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}$$
   est une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires[6].
3. Etude algorithmique de la conjecture d'Erdös-Straus : il a construit un programme de vérification de la conjecture pour tout $n < 10^{17}$. Il améliore ainsi le résultat 3.
   **Résultat 3 bis** (Mizony, 2010) : L'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout $n$ inférieur à $10^{17}$.

Pour établir ces résultats, Mizony a utilisé des outils d'arithmétique modulaire (congruences, diviseurs, nombres premiers, etc.), d'algorithmique et de programmation.

A travers ce bref résumé de l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus, nous voulons mettre en évidence trois points essentiels. Tout d'abord, au vu des résultats 1, 2 et 3bis, les recherches sur la résolution de la conjecture peuvent être résumées ainsi : il reste à démontrer l'existence de solution à l'équation pour tout nombre premier $n$ congru à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840 et plus grand que $10^{17}$. Le problème majeur qui subsiste, c'est de réussir à trouver une forme générale de solutions pour ces classes de nombres. Il s'agit d'un problème de résidus quadratiques. Ensuite, l'étude montre une diversité des domaines mathématiques et des méthodes utilisées par les mathématiciens dans leurs recherches sur la conjecture. Certains travaux se situent dans le champ de l'arithmétique modulaire et d'autres relèvent de l'arithmétique des polynômes dans Z[X]. Concernant les recherches récentes que nous avons recueillies, Thépault a eu recours à des outils algébriques simples (équations du second degré) et Mizony a étudié le problème algorithmiquement et en arithmétique modulaire. Enfin, cette étude mathématique montre qu'il est possible de proposer un travail de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus à des élèves de lycée et à des étudiants en début

[5] Un théorème similaire est énoncé pour la conjecture faible. Nous renvoyons le lecteur à (Gardes, 2013, p.94).

[6] Remarque : les théorèmes 1 et 2 sont équivalents par le changement de variable $a = m$ et $b = m^2/d$.

d'université. En effet, les outils mathématiques mobilisés dans l'exploration du problème (nombres entiers, calcul fractionnaire, divisibilité, congruences, nombres premiers, etc.) sont *a priori* naturalisés dès les classes de collège et se révèlent performants pour avancer assez loin dans la recherche du problème.

## Deuxième partie : analyse épistémologique

Notre référence pour définir l'activité de recherche en classe est le travail des mathématiciens. Des recherches en didactique se sont déjà intéressées aux caractéristiques de l'activité de recherche du mathématicien. Citons par exemple les travaux de Tisseron (1998) ou ceux de l'équipe Maths à modeler (Grenier & Payan, 2003 ; Grenier, 2012).

> Dans son quotidien, un chercheur va faire des essais, résoudre des cas particuliers, calculer, dessiner, étudier des conjectures, changer de cadre ou de registre, se poser une nouvelle question, mais aussi s'informer sur ce qui a été fait, échanger et débattre avec d'autres chercheurs. (Grenier, 2012, p. 1355)

Dans cette citation, nous distinguons des actions de natures différentes : des actions intrinsèques à la recherche d'un problème (faire des essais, résoudre des cas particuliers, étudier des conjectures, changer de cadre, etc.) et des actions extrinsèques telles que les échanges au sein de la communauté mathématiques. Dans notre recherche, nous nous intéressons plus spécifiquement à l'activité effective de recherche du chercheur lorsqu'il cherche un problème mathématique. Nous cherchons à analyser les processus de recherche mis en œuvre dans les actions intrinsèques, c'est-à-dire par exemple comment un chercheur va faire des essais, pour quelles raisons, comment il va les exploiter, quelles avancées cela entraîne pour ses recherches, etc. Nous voulons ainsi dégager des éléments invariants dans les processus de recherche mis en œuvre par les chercheurs dans une recherche de problème. Pour cela, nous avons choisi de mener une analyse d'épistémologie historique et contemporaine sur l'activité de recherche mathématique d'une part et une analyse d'épistémologie contemporaine sur la conjecture d'Erdös-Straus d'autre part. Dans un premier paragraphe, nous donnons les résultats de la première étude sur l'activité de recherche mathématique. Dans un second paragraphe, nous présentons la notion de *geste* de la recherche puis la construction d'une grille d'analyse des processus de recherche. Dans un troisième paragraphe, nous mettons à l'épreuve cette grille pour analyser les processus de recherche des deux chercheurs (Thépault et Mizony) sur la conjecture d'Erdös-Straus.

### *Résultats de l'étude d'épistémologie historique et contemporaine*

Pour mener cette étude, nous avons choisi de nous référer à des textes historiques et contemporains de source primaire, c'est-à-dire des textes autobiographiques de mathématiciens sur le processus de découverte ou d'invention mathématique (Poincaré 1908, Hadamard 1945, Fehr 1908, Nimier 1989, Villani 2012). Nous avons également étudié plus particulièrement l'heuristique de la découverte à partir des ouvrages de Pólya, *How to solve it* (1945) et *Mathematics and plausible reasoning* (1954) et d'un essai de Lakatos, *Proofs and refutations* (1976). A partir de l'analyse de ces témoignages de mathématiciens, nous avons identifié différents aspects du travail du chercheur en situation de recherche :

- un processus en quatre étapes où s'alternent des phases de travail « conscient » et des phases de travail « inconscient », avec des méthodes de recherche différentes dans les phases d'invention et les phases de rédaction ;
- le rôle central de l'intuition dans la création mathématique ;
- le rôle d'une certaine sensibilité dans le choix d'un problème et dans la manière de le traiter ;
- le rôle de la communauté mathématique dans le processus de création et en particulier, des collaborations entre pairs ;
- le processus dialectique de l'activité de recherche mathématique entre la mobilisation,

l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques (par exemple l'importance de faire des liens entre les notions, les problèmes déjà résolus, les méthodes, les domaines mathématiques, etc.) ;
- le caractère expérimental des heuristiques développées dans la résolution de problème de recherche.

Ces différentes caractéristiques du processus de découverte mathématique mettent en avant la dimension active de l'activité de recherche mathématique. Pour étudier plus finement les processus de recherche mis en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche, il nous semble ainsi intéressant de mieux comprendre les aspects suivants : le rôle de l'intuition (peut-on la provoquer ? si oui, comment la provoquer ?), l'importance du processus dialectique connaissances/heuristiques (comment y avoir recours ? comment le mettre en œuvre ?) et les ressorts de la dimension expérimentale (comment la favoriser ? comment permet-elle d'avancer dans la recherche d'un problème ?). Pour cela, nous avons développé la notion de « geste » de la recherche que nous présentons dans le paragraphe suivant.

***Geste de la recherche et construction d'une grille d'analyse des processus de recherche***

La notion de « geste » issue de la philosophie des mathématiques nous a semblé pertinente à développer pour analyser l'activité effective de recherche d'un problème mathématique, dans la mesure où elle permet de prendre en compte la dimension active de la recherche, le rôle central de l'intuition dans le processus de création et les aspects dialectiques entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. Pour mettre en évidence ces éléments, nous nous sommes appuyée sur trois références philosophiques développant la notion de « geste » en mathématiques (Cavaillès, Châtelet et Longo).

Cavaillès introduit la notion de geste dans sa première thèse en philosophie des mathématiques, *Méthode axiomatique et formalisme* (1938, rééd. 1981) pour discuter du fondement des mathématiques mais également des pratiques mathématiques. Il distingue deux facettes dans un geste : la manipulation de signes mathématiques, soumis à des règles d'emploi (geste qualifié de *combinatoire* par Cassou-Noguès (2001)) et un acte de pensée (geste qualifié d'*opératoire* par Cassou-Noguès (2001)). Cavaillès définit l'expérience comme un système de gestes et Cassou-Noguès précise alors que « l'expérience mathématique serait un double système de gestes : gestes combinatoires dans les espaces combinatoires, gestes opératoires dans les théories mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001, p. 13). Ce ne sont pas deux actes distincts mais un seul acte qui se déploie comme combinatoire et opératoire. Le geste, au sens large, est alors une combinaison de signes, qui, pour qui sait lire, réalise une opération mathématique. Cavaillès reconnaît une certaine unité des gestes combinatoires et opératoires.

> La mathématique ne quitte pas le monde sensible mais est analyse sans fin du noyau des gestes sensibles. [...] la pensée est immanente au geste. (Cavaillès, 1994, p. 579)

Enfin, pour Cavaillès, le pouvoir de créer, qui réalise l'extension de l'expérience et le développement des théories, semble déterminé comme pouvoir de gestes dans l'expérience, c'est-à-dire comme pouvoir de gestes combinatoires. Cassou-Noguès reprend cette idée en s'appuyant sur le processus de résolution de problèmes par un mathématicien. Il avance deux éléments pour guider le mathématicien, l'exigence des problèmes posés et une sorte de prémonition du sens. Les notions exigées pour la résolution du problème sont pressenties et reconnues proches, à la limite du champ constitué. Et c'est précisément pour saisir ces notions, qui le hantent, que le mathématicien expérimente et teste des gestes. Le progrès dans la résolution du problème, c'est-à-dire l'extension de l'expérience provient alors d'un geste qui capte ces notions dans l'espace combinatoire initial au moyen d'une combinaison de signes, laquelle bouleverse le champ d'expérience et ouvre un nouvel espace combinatoire. Pour Cassou-Noguès, l'unité des gestes opératoires et combinatoires se réalise dans l'émergence de la pensée dans le geste, déterminée par cette possibilité de capter une notion pressentie dans un champ d'expérience au moyen d'un geste dans l'expérience. Le « geste » permet ainsi de saisir l'intuition puis de la mettre en œuvre afin de faire progresser le développement des mathématiques.

La notion de « geste » chez Châtelet (1993), qui reprend et prolonge celle de Cavaillès, est relativement complexe et semble plutôt se décliner comme un système de gestes :

> C'est une propulsion, qui se referme en une impulsion, d'un même geste qui décape une structure et réveille en nous d'autres gestes. (Ibid. p. 32)
>
> Le geste inaugure une lignée de gestes. (Ibid. p.32)

Comme chez Cavaillès, le « geste » chez Châtelet ne se réduit pas à l'acte mais comporte une intentionnalité.

> Le geste n'est pas un simple déplacement spatial : il décide, libère et propose une nouvelle modalité du « se mouvoir » ; [...] on se pénètre du geste avant de le savoir. (Ibid. p. 31)

Dans le travail mathématique, il ouvre le champ des possibles et permet de progresser dans l'élaboration de nouveaux concepts. Bailly et Longo précisent ainsi qu'il n'est « pas étonnant que les concepts les plus généraux et les plus abstraits, en mathématiques et en physique, s'enracinent "en première instance" dans l'expérience motrice et que ce soit "le geste" qui en permette le développement en même temps qu'il permet, si abstrait soit-il lui-même devenu, l'élaboration de nouveaux concepts » (Bailly & Longo, 2003, p. 13). Selon ces auteurs, trois gestes semblent avoir présidé à la naissance des concepts les plus fondamentaux des mathématiques et de la physique : celui des déplacements pour l'espace (et le temps), celui de la caresse pour le continu, celui de l'itération illimitée pour l'infini (et le nombre). Longo insiste sur l'action motrice du geste :

> Le geste, qui commence par l'action motrice, enracine la signification entre nous et le monde, à l'interface entre les deux. (Ibid. p. 4)
>
> Et le geste, en tant qu'action élémentaire, mais complexe, du vivant, est à l'origine de notre rapport à l'espace, de nos tentatives de l'organiser, de la géométrie, donc. (Ibid. p. 8)

Longo montre alors en quoi cette notion de « geste » est intéressante pour l'enseignement des mathématiques :

> Dans ce cas [le concept de nombre réel], l'intuition précède la structure mathématique et, ensuite, elle en est enrichie et précisée. Un mathématicien comprend et communique à l'élève l'appréciation du continu, par le geste, car, derrière le geste, les deux partagent cet acte d'expérience ancien ; par des gestes et des mots, l'enseignant peut (et doit) introduire à « [...] tout ce parler dans les mains [...] réservé aux initiés » dont parle Châtelet (1993, p. 34). La re-construction conceptuelle rigoureuse est nécessaire, bien évidemment [...] mais l'enseignement doit aussi faire vivre à l'élève l'expérience de l'intuition, de ce « voir » qui est au cœur de toute pratique scientifique. (Bailly & Longo, 2003, p. 15)

Les gestes permettent donc de saisir l'intuition qui précède et suit la construction conceptuelle. On retrouve ici un certain pouvoir de création par les gestes.

A la lecture de ces textes philosophiques, nous retenons la définition suivante de « geste » de la recherche :

> Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Gardes, 2013, p.155)

Deux caractéristiques nous semblent essentielles dans cette définition pour notre recherche. La première est la double facette unifiée du geste (geste sur les signes et gestes sur les idéalités) qui lui confère un pouvoir de créer dans le travail mathématique. Il prend en compte le rôle de l'intuition dans la création mathématique décrite par de nombreux mathématiciens. Identifier les gestes dans l'activité d'un mathématicien pourrait permettre ainsi de caractériser les éléments marqueurs de progression dans leur recherche. Notons également que ce pouvoir de créer, de saisir une intuition par un geste sur les signes, se réalise dans un processus dialectique entre organisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques. La seconde caractéristique du geste est sa dimension active, il s'agit d'une action au cœur du travail mathématique. Dans une perspective socio-constructiviste de l'apprentissage, cette notion nous semble donc pertinente pour décrire et analyser l'activité mathématique effective d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche.

D'un point de vue didactique, nos travaux s'inscrivent dans la lignée de ceux de Dias (2008) qui a déjà repris cette notion de geste. Épistémologiquement, cet auteur a choisi de parler d'expérimentation en mathématiques à la lumière de Cavaillès comme d'un double système de gestes (combinatoire et opératoire) en les envisageant dans une dialectique qui les associe. Il considère l'intersection des espaces opératoire (où se situent la théorie mathématique et les opérations produits de la pensée) et combinatoire (où se construisent les signes sensibles et leurs règles d'emploi) par le sujet lui-même : « c'est en effet le sujet lui-même, celui qui écrit et qui pense, l'auteur unique de ces gestes » (Dias, 2008, p. 38). Cette représentation permet de faire apparaître l'expérience mathématique comme un dialogue du sujet avec les objets, où ces objets ne sont rendus visibles et accessibles que par les actes portant sur eux. En important ce modèle dans le champ didactique, l'auteur montre l'importance de créer un milieu propice à ce dialogue pour « faire faire des mathématiques » (au sens de Conne, 1999). Dias montre aussi que le modèle de « geste » peut rendre compte de l'aspect actif de l'activité mathématique ainsi que du processus dialectique de mobilisation, acquisition des connaissances et développement d'heuristiques (notamment dans la dialectique objets sensibles/objets théoriques). Cependant il ne l'utilise pas pour l'analyse de l'activité des sujets. Dans notre travail, nous voulons utiliser cette notion de « geste » à une autre échelle : celle de l'analyse du travail effectif d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche.

Pour étudier ces processus de recherche, nous proposons une analyse à deux niveaux. Dans un premier temps, nous effectuons une analyse globale de ces processus grâce à un outil méthodologique développé dans une recherche précédente (Gardes, 2010), basé sur une articulation entre une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire (Battie, 2003) et une prise en compte du caractère expérimental en jeu dans le problème. L'exploitation de cet outil méthodologique permet, d'une part de spécifier la nature des procédures mises en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche, notamment en mettant en évidence les connaissances mathématiques mobilisées ; d'autre part d'effectuer une comparaison des processus de recherche de publics différents. Ce premier niveau d'analyse des processus de recherche permet de donner des éléments sur la nature des processus (relevant d'une démarche théorique, expérimentale, en algèbre, en arithmétique, en algorithmique, avec quelles visées, etc.) et de déterminer des premiers éléments comparatifs. Cependant, il ne permet pas d'analyser finement le travail effectif de recherche d'un sujet en situation de résolution de problèmes de recherche, en particulier les éléments qui permettent concrètement une « avancée » dans la recherche du problème. Pour cela, nous réalisons une seconde analyse s'appuyant sur la notion de « geste ». Dans ce paragraphe, nous développons spécifiquement cet outil méthodologique.

Dans notre recherche, la notion de « geste » de la recherche est un outil pour décrire et analyser le travail mathématique effectif d'un sujet (chercheur, élève, étudiant) dans la recherche d'un problème. D'une part, elle permet de mettre en évidence certains aspects du travail du chercheur que nos analyses épistémologiques ont identifiés : le rôle de l'intuition, le rôle de la dimension expérimentale des mathématiques et l'importance d'un travail dialectique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. D'autre part, la notion de « geste » de la recherche permet de mettre en évidence la manière dont un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans son étude. Nous identifions deux marqueurs d'avancement dans l'étude d'un problème de recherche. Nous empruntons le premier à Giroud (2011) qui considère que :

> Il y a avancée dans la recherche lorsque la conception des élèves sur le problème est modifiée. Par exemple, lorsqu'un nouveau problème est formulé, une nouvelle relation entre deux problèmes établie, un nouvel exemple produit, une nouvelle représentation utilisée, etc. (Giroud, 2011, p. 118)

Pour la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus, résoudre un problème auxiliaire en lien avec la conjecture, simplifier la conjecture, réduire ou limiter la recherche, le poser dans un autre cadre, etc., seront des indices de progression de la recherche. Le second marqueur d'avancée de la recherche est la production de résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus. Par exemple, trouver des valeurs de $n$ solutions de l'équation d'Erdös-Straus, trouver des identités assurant l'existence de décompositions pour des classes de nombres ou trouver des conditions suffisantes ou nécessaires d'existence de solutions.

En appui sur l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus, sur les études épistémologiques de l'activité de recherche mathématique et sur les premières expérimentations en classe de terminale scientifique (Gardes, 2010), nous avons identifié sept gestes permettant d'analyser les processus de recherche mis en œuvre par les différents sujets cherchant cette conjecture :

- *réduire le problème aux nombres premiers* : c'est ramener l'étude du problème (pour tout entier $n$) à une forme équivalente (étudier la conjecture pour tout $n$ premier) ;
- *désigner des objets* : c'est représenter cet objet par le langage ou un signe (définition du Petit Larousse 2001). Cela permet d'indiquer précisément la nature de ces objets ;
- *introduire un paramètre* : c'est l'introduction d'un signe, dans une modification des écritures mathématiques, sans renvoi explicite aux objets qu'il désigne ;
- *construire et questionner des exemples* : c'est la détermination d'une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques naturalisés en jeu dans le problème et un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations ;
- *effectuer des contrôles locaux* : c'est vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques ;
- *transformer l'équation initiale* : c'est une transformation qui s'effectue par équivalence de jeux d'écriture ;
- *implémenter un algorithme* : traduire un algorithme dans un langage de programmation.

### *Analyse d'épistémologie contemporaine sur la conjecture d'Erdös-Straus : mise à l'épreuve de la grille d'analyse*

L'adjectif contemporain renvoie ici à la méthodologie particulière de cette étude. Nous avons recueilli et suivi des recherches « in statut nascendi[7] » de chercheurs (Thépault et Mizony) engagés dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. Après un court résumé de l'analyse globale de leurs processus de recherche, nous montrons, sur trois exemples, l'analyse locale que nous avons conduite grâce à la notion de « geste ».

L'analyse globale en termes de dimensions organisatrice et opératoire montre que la recherche de Thépault s'est effectuée dans un cadre algébrique et théorique sans mise en œuvre d'une dimension expérimentale alors que la démarche de Mizony a été de nature expérimentale, en appui sur la manipulation et la construction de nombreux algorithmes. Si les chercheurs privilégient une démarche de recherche particulière, ils ne déconnectent pas leurs recherches de l'autre aspect. Thépault exploite le caractère expérimental du problème pour vérifier que l'équation a des solutions pour des familles de nombres et Mizony garde à l'esprit la quête d'une preuve théorique de la conjecture. L'analyse à une échelle plus locale à

[7] Cette expression est empruntée à Pólya : « [...] on n'a, en effet, jamais présenté tout à fait ainsi les mathématiques "in statu nascendi" (c'est-à-dire telles qu'elles sont lorsqu'on est en train de les inventer) [...] ». (Pólya, 1989, p. xv)

l'aide de la notion de « geste » confirme cette différence dans la nature des processus mis en œuvre et ceci est lié à la nature des outils mathématiques mobilisés et au rôle des objets en jeu dans leurs recherches. Nous l'illustrons, ci-dessous, via l'analyse de trois gestes de la recherche utilisés par les chercheurs.

**Geste 1 : Réduire le problème aux nombres premiers**

Cette réduction se fait à l'aide de deux propriétés arithmétiques.

*Propriété 1* : tout nombre admet un diviseur premier.

*Propriété 2* (multiplicativité) : si une propriété est vraie pour deux éléments de Z, alors elle est encore vraie pour leur produit. Ici, c'est la propriété *satisfaire à la conjecture d'Erdös-Straus, pour n entier* qui est multiplicative.

Cette réduction est le premier geste de la recherche effectué par Thépault et Mizony :

> Il est clair que si pour un $n$ donné, il existe une solution, il existe également une solution pour tout multiple de $n$ et que le problème se réduit à se pencher sur le cas où « $n$ premier ». (Thépault, communications personnelles du 24 mars 2010)
>
> Si $n$ vérifie la conjecture alors $kn$ également, car si $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ alors $4/kn = 1/kx + 1/ky + 1/kz$. Ainsi tout multiple d'un nombre premier vérifiant la conjecture la vérifie aussi. [...] Mais comment trouver une décomposition générique pour tout nombre premier ? (Mizony dans Aldon et al. 2010)

Dans leurs raisonnements, les chercheurs mettent en évidence le caractère multiplicatif de la propriété pour effectuer la réduction aux nombres premiers mais ne précisent pas que cela relève également de l'existence, pour tout entier, d'au moins un diviseur premier. Cependant, il est clair que ces deux connaissances sont mobilisables par les chercheurs et présentes dans leur milieu. Ce geste est important dans leurs recherches car il permet de réduire le champ de recherche de la conjecture. Pour Thépault, cela lui permet de faire une réduction à l'étude de deux classes de nombres (les nombres premiers étant congrus à 1 ou 3 modulo 4, une partition modulo 4 se réduit à l'étude de deux classes de nombres) et pour Mizony, cela constitue une avancée dans sa recherche dans la mesure où ces objets vont jouer un rôle particulier dans la suite de ses travaux. En particulier, l'étude de certains nombres premiers, les nombres premiers (non)-pythagoriciens, permettra de formuler la conjecture d'Erdös-Straus en d'autres termes et de donner ainsi une nouvelle piste de recherche.

**Geste 2 : Transformer l'équation initiale**

Ce geste a été primordial dans les recherches de Thépault.

> Savoir, si pour un $n$ donné, je pouvais me servir d'une valeur auxiliaire de $z$ me permettant de déterminer dans tous les cas, $x$ et $y$ entiers en fonction de $n$ et de $z$. Je suis arrivé à l'équation $[(x + y)/xy = (4z – n)/zn]$, dans laquelle apparaissaient à la fois la somme S et le produit P de ces deux inconnues. (Thépault, communications personnelles du 24 mars 2010).

Ce geste semble provoqué par la volonté de formuler le problème dans un cadre qu'il connaît bien et dans lequel il sait mobiliser les objets mathématiques ainsi que leurs concepts et leurs propriétés. La transformation de l'équation initiale qu'il a effectuée va lui permettre, en passant dans un cadre algébrique, de simplifier le problème puis de trouver des résultats partiels sur la conjecture. En effet, le problème se ramène à la résolution d'une équation du second degré avec une méthode « classique » algébrique qu'il connaît bien, à savoir celle de la somme et du produit des racines d'une fonction polynôme du second degré. Il utilise ensuite cette méthode pour le traitement des nombres premiers de la forme $4k + 3$. Pour les nombres premiers de la forme $4k + 1$, il l'exploitera à nouveau mais elle demandera en amont un travail supplémentaire.

**Geste 3 : Construire et questionner des exemples**

Ce geste a été prépondérant et central tout au long des recherches de Mizony. En effet, sa démarche de recherche a été de nature expérimentale. Ses expériences se sont appuyées sur la construction d'exemples, c'est-à-dire la construction de décomposition de 4/*n* en somme de trois fractions égyptiennes pour certaines valeurs de *n* puis sur l'étude de ces différents exemples. Le rôle de ces expériences dans les recherches de Mizony est double : d'une part l'exploitation de nombreux cas particuliers permet d'effectuer des généralisations et d'autre part, l'analyse fine d'exemples clés permet de mieux comprendre les difficultés liées à la preuve de la conjecture. La construction et l'étude des exemples se sont effectuées à l'aide d'algorithmes. Ce recours à l'informatique lui permet de construire de nombreux exemples en temps limité. Or disposer de nombreux exemples est un avantage, en particulier pour la recherche de régularités. Ainsi, au sein de la résolution de la conjecture, ce geste de construction et questionnement des exemples conduit à de nombreuses avancées : approfondissement des connaissances sur le problème et en particulier des difficultés pour sa preuve, amélioration des algorithmes de décompositions et élaboration de résultats partiels sur la conjecture.

Pour résumer, la nature des principaux gestes identifiés comme moteurs dans la recherche de Thépault (réduction du problème aux nombres premiers, transformer l'équation initiale, effectuer des contrôles locaux) montre qu'il a peu travaillé sur les objets mathématiques en jeu. Il a en effet mobilisé des outils algébriques qui ne favorisent pas le recours à la manipulation des objets. Dans les procédures syntaxiques mises en œuvre, la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance et elle peut être mise de côté. Notons cependant que Thépault ne l'oublie pas et contrôle ses procédures algébriques à l'aide de procédures sémantiques, notamment par un retour à la nature des nombres en jeu. Dans les recherches de Mizony, la place des objets mathématiques est centrale. La nature des principaux gestes identifiés comme moteurs dans ses recherches (implémenter un algorithme, désigner des objets, construire et questionner des exemples) met en évidence qu'il a travaillé en appui sur la manipulation et le questionnement de ces objets. Le fait que ses gestes soient liés et s'appellent les uns les autres dans leur réalisation montre que ce travail sur les objets a favorisé la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, processus non linéaire mais au contraire dialectique entre expérience et théorie. Pour conclure, l'analyse des processus de recherche des deux chercheurs nous permet d'identifier deux visées de la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus : la quête de la vérité de la conjecture (choix de Thépault) et la recherche de décompositions effectives (choix de Mizony). Chaque visée privilégie des dimensions organisatrice et opératoire particulières et favorise l'émergence de gestes de nature différente : gestes dans l'espace combinatoire tels que la transformation de l'équation initiale, l'introduction de paramètre et les contrôles locaux pour la quête de la vérité et gestes opératoires tels que la construction et le questionnement des exemples, la désignation des objets et l'implémentation d'algorithmes pour la recherche de décompositions effectives.

## Conclusion des analyses mathématique et épistémologique

Cette étude mathématique et épistémologique a permis de confirmer le potentiel de la conjecture d'Erdös-Straus pour l'objectif didactique principal que nous nous sommes fixée, à savoir, mettre les élèves dans une situation de recherche de problèmes, en contexte scolaire, proche de celle du mathématicien. Ces analyses montrent, d'une part la possibilité d'implémenter une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus en classe (à partir du lycée) en prenant en compte différents aspects du travail du chercheur, et d'autre part les potentialités de ce problème pour analyser les processus de recherche mis en œuvre dans une étude de résolution de problème de recherche. Dans la partie suivante, nous présentons une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus, que nous avons expérimentée dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous montrons ensuite les analyses des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur étude du problème, à partir de la notion de « geste » de la recherche.

## Analyse didactique

A partir des études mathématiques et épistémologiques, nous avons construit une situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus et nous en avons fait une analyse *a priori*. Cette étude correspond à l'élaboration du modèle de milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch). Dans un premier temps, nous avons prévu différentes organisations didactiques et identifier plusieurs variables didactiques pour des situations d'enseignement selon différents critères : le public concerné, le contexte d'enseignement, le niveau d'enseignement, le temps disponible, etc. Dans un second temps, afin d'affiner notre analyse *a priori* de la situation créée, nous avons mené des pré-expérimentations. La mise à l'épreuve des différentes variables de la situation a pour but de tester la robustesse de la situation et de dégager des invariants mais aussi des phénomènes didactiques inattendus. La confrontation entre les séances prévues et les séances réelles nous a permis de faire un retour et d'enrichir les études mathématique, épistémologique et didactique et en particulier, d'affiner la grille d'analyse de l'activité de recherche effective d'un sujet en résolution de problèmes. Le retour des pré-expérimentations ont ainsi nourri les études théoriques. Les différentes organisations didactiques de la situation ont également pu être modifiées, pour éviter un biais ou pour pouvoir observer un phénomène particulier. Afin d'observer et d'analyser précisément l'activité de recherche effective des élèves en résolution de problèmes, nous avons choisi de mener une expérimentation de type laboratoire, c'est-à-dire hors-classe. Cette étape correspond à la confrontation à la contingence du cadre d'analyse de Bloch (2002). Le contexte de laboratoire permet de neutraliser le paramètre « classe » et ses conséquences (temps limité, insertion dans le cours de l'enseignant, nombre d'élèves) et de se focaliser sur d'autres paramètres qui méritent d'être étudiés plus en détail pour notre questionnement tels que l'influence du bagage mathématique sur la recherche, l'influence de la recherche individuelle sur la recherche collective et l'observation de l'évolution du milieu objectif des élèves. Nous avons ainsi construit un protocole expérimental long (sur sept semaines) pour dix élèves de terminale scientifique. Le scénario de cette expérimentation de type laboratoire s'est construit par des va-et-vient entre les élaborations théoriques mathématique et épistémologique et l'analyse didactique *a priori* qui s'est réalisée dans la mise à l'épreuve des pré-expérimentations. Dans cet article, nous présentons les résultats de l'analyse *a priori* de la situation didactique de recherche créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus, la caractérisation du milieu initial des élèves puis l'expérimentation en contexte de laboratoire. Nous exposons ensuite les résultats des analyses *a posteriori* et en particulier celles concernant les processus de recherche des élèves et l'évolution du milieu.

### Analyses *a priori*

Dans un premier temps, nous avons déterminé différentes procédures mathématiques qui pourraient être mises en œuvre par des élèves de terminale scientifique engagés dans l'étude de la conjecture afin d'établir des résultats partiels. Ces procédures sont nombreuses et de natures différentes. Nous les avons classées en deux catégories selon le premier geste de la recherche effectué : des procédures exploratoires qui s'effectuent à partir de la construction d'exemples et des procédures opératoires qui s'appuient sur des manipulations algébriques. Nous faisons l'hypothèse que les procédures exploratoires sont plus efficaces pour avancer dans l'étude de la conjecture et en particulier, pour la production de résultats partiels. D'une part, elles favorisent une démarche de type expérimentale en appui sur la manipulation des objets mathématiques en jeu, et d'autre part elles font appel à des connaissances mathématiques (notionnelles et heuristiques) disponibles et mobilisables par des élèves de terminale scientifique. Nous avons également relevé un lien privilégié entre les deux visées de la recherche que nous avons identifiées et la nature des procédures. Les procédures exploratoires sont associées à une étude de la conjecture par recherche de décompositions effectives alors que les procédures opératoires sont privilégiées dans la quête de la vérité de la conjecture.

Dans un second temps, nous avons affiné l'analyse *a priori* des processus de recherche des élèves en mettant à l'épreuve notre grille d'analyse dans les pré-expérimentations. L'analyse globale des processus de recherche en termes de dimensions organisatrice et opératoire montre que les élèves sont susceptibles de s'engager dans deux types de recherche : une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, de nature algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème et une recherche privilégiant la construction de décompositions, de nature expérimentale mais peu articulée avec la phase d'élaboration d'une preuve. Même si une démarche est privilégiée par les élèves, des articulations et des interactions entre les deux types de recherche peuvent se réaliser et permettre des avancées dans l'étude de la conjecture. L'analyse à une échelle plus locale, à l'aide de la notion de « geste », a montré que cet outil est pertinent pour étudier le travail de recherche effectif des élèves et des étudiants. Il permet en effet de mettre en évidence trois éléments essentiels des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans l'étude de la conjecture : l'origine des avancées de la recherche, les ressorts de la dimension expérimentale et l'apport d'un travail dialectique entre la mobilisation de connaissances et le développement d'heuristiques. Notons que nous avons identifié que les gestes associés à des procédures opératoires (introduire un paramètre et implémenter un algorithme) sont moins présents dans les recherches des élèves. Nous l'expliquons par la difficulté des élèves à mobiliser certaines connaissances en algèbre, algorithmique ou programmation.

Dans un troisième temps, nous avons déterminé une organisation didactique et un scénario possible pour mettre en œuvre la situation en classe. Notre objectif étant de placer les élèves ou étudiants dans une position relativement proche de celle d'un chercheur en mathématiques, l'organisation didactique de la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus s'est appuyée sur l'analyse épistémologique de l'activité de recherche des mathématiciens. Plusieurs différences entre les activités de recherche du mathématicien et les activités de recherche des élèves ou étudiants en contexte scolaire montrent les limites de cette référence au travail du chercheur professionnel. On peut citer par exemple la durée d'une recherche, le choix d'un objet de recherche ou la raison sociale du chercheur, dont le métier est de chercher. Cependant, de nombreuses modalités du travail des chercheurs peuvent être approchées et une organisation didactique spécifique peut permettre sous certaines conditions, la reproduction de la position d'un chercheur en situation de résolution de problèmes de recherche. En appui sur notre analyse épistémologique de l'activité de recherche mathématique, nous présentons ces différents aspects du travail du mathématicien et les choix qu'ils engendrent pour déterminer l'organisation didactique de la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus.

Les aspects du travail du chercheur sur lesquels nous nous sommes appuyée pour élaborer l'organisation didactique d'une situation de recherche autour de la conjecture sont les suivants : le rôle du temps, l'importance et les modalités des échanges entre pairs, l'importance de la documentation, l'importance du positionnement par rapport aux travaux antérieurs et l'aspect jubilatoire de la création. Nous avons alors fait les choix suivants pour l'organisation didactique :

- proposer une recherche du problème sur un temps long, avec plusieurs séances de recherche de deux heures, afin de prendre en compte le facteur « temps ouvert » ;
- construire un scénario composé de différentes phases de recherche (phase de recherche individuelle, phases de recherche collective par groupes, phase de production d'affiches, phases de mises en commun et de débat, phase de synthèse) afin de prendre en compte la dimension sociale de l'activité de recherche sous toutes ses formes d'une part et d'approcher les différentes phases du processus de création mathématique d'autre part ;
- permettre l'accès à tout type de documentation afin d'approcher l'importance du

recours à la documentation dans une recherche mathématique ;
- ne pas faire travailler les élèves sur des travaux existants sur la conjecture ;
- mettre en place, pour les élèves, des outils méthodologiques pour assurer le suivi de leur recherche : mémoire de leurs résultats, conservation de traces écrites, synthèse des travaux, etc.

Nous avons ensuite déterminé huit variables didactiques pour une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Le choix des variables didactiques et de leur valeur est déterminant pour mettre en adéquation les connaissances et outils mathématiques utiles à l'engagement dans le problème avec le répertoire des élèves. Nous listons ci-dessous ces variables avec entre parenthèses les différentes valeurs qu'elles peuvent prendre.

V1 - Statut épistémique du problème (indiqué aux élèves ou non indiqué aux élèves)
V2 - Lettres pour désigner les solutions (*a*, *b*, *c* ou *x*, *y*, *z*)
V3 - Syntaxe de l'énoncé

V3a : aspects prédicatif et opératoire (syntaxe avec forme prédicative, syntaxe avec forme opératoire, syntaxe hybride articulant les aspects prédicatif et opératoire)
V3b : forme interrogative ou forme affirmative

V4 - Indication sur le domaine d'exploration

V4a : indication sur le domaine d'exploration de *n* (*n* entier naturel, *n* entier naturel non nul et *n* supérieur ou égal à 2)
V4b : indication sur le domaine d'exploration de *a*, *b*, *c* (*a*, *b*, *c* entiers naturels ou *a*, *b*, *c* entiers naturels non nuls)

V5 - Précision sur les solutions (préciser ou non que *a*, *b*, *c* sont non nécessairement distincts)
V6 - Séance préalable (présence d'une séance préalable sur les fractions unitaires ou non)
V7 - Outils technologiques (disponibilité d'une calculatrice, disponibilité d'un ordinateur)
V8 - Aides écrites (introduite dans le milieu des élèves ou non)

Le choix des variables didactiques pour la situation mise en œuvre sont les suivants :

| **Variable** | **Choix des valeurs** | **Justification** |
|---|---|---|
| **V1** | Indiqué aux élèves | Savoir que ce problème est toujours une conjecture peut être une motivation (relever un défi) et les élèves sont dans une position proche de celle du chercheur.<br>Au vu du niveau en mathématiques des élèves, de leur pratique et de leur culture mathématique, ce choix ne constitue *a priori* pas un obstacle à l'engagement dans le problème et à la dévolution de la recherche. |
| **V2** | *a*, *b*, *c* | Ce choix permet de mettre en évidence la nature des nombres (ici des entiers). |
| **V3a**<br>**V3b** | Hybride (prédicative, opératoire)<br>Affirmatif | Nous faisons l'hypothèse que cette formulation favorise un engagement dans la recherche du problème par l'action et oriente vers une recherche constructive de solutions. |
| **V4a**<br>**V4b** | *n* supérieur ou égal à 2<br>*a*, *b*, *c* entiers naturels non nuls | Après avoir testé les différentes valeurs possibles de cette variable, nous avons retenu celle qui posait le moins de problème aux élèves pour comprendre l'énoncé. |
| **V5** | Non précisé | Nous voulons laisser l'initiative aux élèves de se questionner et de faire un choix sur l'égalité ou non de *a*, *b* et *c*. |
| **V6** | Non | Pour ces élèves, un travail préalable sur les fractions en jeu ne paraît pas nécessaire. |

| | | |
|---|---|---|
| **V7a**<br>**V7b** | Oui (de type TI-89)<br>Oui (tout logiciel autorisé) | L'utilisation d'une calculatrice et d'un ordinateur permet aux élèves de s'engager rapidement et facilement par l'action dans la recherche du problème. Certaines fonctions (calcul fractionnaire, programmation) favorisent l'exploitation du caractère expérimental du problème et la recherche de solutions constructives. |
| **V8** | Non | Pour ces élèves, nous faisons l'hypothèse que des aides ne sont pas nécessaires. |

## Caractérisation du milieu initial

Nous identifions cinq éléments qui caractérisent un milieu favorisant une dévolution de la recherche sur un temps long et la production de résultats partiels sur la conjecture :

- des connaissances mathématiques notionnelles (par exemple en arithmétique, notions de multiple, critères de divisibilité, parité, nombre premier, congruences, etc.) et heuristiques (par exemple sur la preuve, sur l'existence et la valeur de résultats partiels, etc.) ;
- une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes (qui comprend d'une part une culture mathématique et d'autre part une pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique) ;
- une organisation didactique spécifique prenant en compte divers aspects du travail du mathématicien (temps ouvert, accès à la documentation, diversité des échanges, etc.) ;
- un énoncé du problème incitant à l'action ;
- la disponibilité de calculatrices programmables et d'ordinateurs.

## Expérimentation en contexte de laboratoire

L'expérimentation s'est déroulée dans un lycée de Saône et Loire, classé « Ambition réussite » par le Ministère de l'Education Nationale. Dans ce cadre, le lycée a mis en place, pour les élèves de terminale scientifique volontaires, un parcours « Excellence » en mathématiques. Dix élèves, suivant par ailleurs l'enseignement de spécialité Mathématiques, se sont inscrits pour suivre ce parcours. C'est dans ce parcours que notre expérimentation a eu lieu. Ce dispositif leur offre deux heures hebdomadaires supplémentaires de mathématiques, dispensées par leur enseignant de spécialité. Ce dernier est expérimenté et a un DEA (diplôme d'études approfondies) en didactique des mathématiques. Il s'est particulièrement intéressé, dans ses recherches, à la mise en place de problèmes de recherche en classe ordinaire et à ses effets à long terme. Le contrat didactique qu'il instaure au sein de sa classe, dans les cours de spécialité et dans le parcours « Excellence », inclut ainsi une forte dimension liée à l'activité de recherche mathématique. Dans ce contexte spécifique, les différents éléments caractéristiques (cf. paragraphe précédent) d'un milieu favorisant une dévolution du problème sur un temps long et des avancées significatives dans la recherche sont *a priori* présents dans le milieu initial de ces élèves. En suivant les choix effectués pour l'organisation didactique, nous avons élaboré un scénario composé de sept séances de deux heures : une séance de recherche individuelle, quatre séances de recherche collective, une séance de mise en commun et débat et une séance d'institutionnalisation et synthèse. Les élèves avaient à disposition tout type de documents, des calculatrices programmables et des ordinateurs. Notons que nous avons limité l'accès à Internet aux séances de recherche en classe.

Nous avons recueilli quatre types de données pour chacun des groupes[8] :

- les traces écrites des recherches de chaque élève consignées dans un cahier de bord personnel ;
- les enregistrements audio et vidéo des échanges au sein du groupe pour chaque séance;
- les productions finales des groupes (affiches et démonstrations des résultats) ;
- les réponses de chaque élève à un questionnaire[9].

Les quatre types de données recueillies sont complémentaires pour mener l'analyse de l'activité effective des élèves en situation de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Les productions écrites des élèves (cahiers de bord et productions finales) ne sont pas suffisantes pour analyser les processus de recherche dans la mesure où elles ne rendent pas visible l'aspect non linéaire de la recherche des élèves, ni le cheminement de leurs idées ni la construction de leurs raisonnements. L'analyse des échanges entre les élèves permet alors d'avoir accès à leurs processus de recherche effectifs lors de l'étude du problème et notamment, aux aspects dialectiques de la recherche mathématique, que nous avons identifiés dans nos analyses mathématique et épistémologique et dans l'analyse *a priori*. Les cahiers de bord et les productions finales constituent alors un support essentiel pour comprendre les pistes de recherche étudiées, les expressions mathématiques examinées, les conjectures formulées ou les résultats mentionnés par les élèves dans leurs interactions.

## Analyses *a posteriori*

Dans ce paragraphe, nous effectuons une mise en perspective des analyses *a posteriori* des travaux des élèves avec nos analyses *a priori* selon trois points : dimensions organisatrice et opératoire, gestes de la recherche et milieu.

### *Dimensions organisatrice et opératoire*

Rappelons que nos analyses *a priori* mathématiques et épistémologiques de la conjecture d'Erdös-Straus nous ont permis d'identifier deux visées de la recherche pour étudier le problème : la quête de la vérité de la conjecture et la recherche de décompositions effectives. Nos analyses *a posteriori* de la situation créée autour du problème ont montré, d'une part que les deux visées apparaissent dans les travaux des élèves, et d'autre part que les recherches des élèves s'inscrivent dans une visée particulière pour explorer le problème (ce qui n'exclut pas d'éventuelles interactions ou articulations des deux visées). Le groupe 2 a débuté ses recherches en choisissant comme visée la quête de la vérité. Cette direction a guidé l'ensemble des recherches du groupe tout au long des séances. Lors des synthèses et des mises en commun des travaux, ils ont clairement expliqué avoir choisi des pistes de recherche leur permettant *a priori* d'étudier la vérité de la conjecture. Au contraire, les groupes 1 et 3 n'ont pas privilégié une direction particulière de recherche, elle s'est révélée au cours de leurs recherches. Les élèves ont débuté l'étude de la conjecture par l'exploitation de procédures exploratoires et se révélant productives en termes de résultats partiels, ils ont choisi de continuer à les exploiter. Cela les a conduits à une étude de la conjecture d'Erdös-Straus par recherche de décompositions effectives pour des valeurs de $n$ données. Ces analyses mettent donc en évidence un nouveau phénomène, non relevé dans les analyses *a priori* : soit le choix d'une visée de la recherche s'effectue dès le début de l'étude du problème, soit il se détermine progressivement, au cours des recherches, en fonction des procédures exploitées. Ceci semble lié à la perception qu'ont les élèves de l'étude de la conjecture à leur niveau : pour les élèves du groupe 2, il s'agit de déterminer des conditions d'existence de solutions et pour les élèves

[8] Les dix élèves ont été répartis en trois groupes : deux groupes de 3 élèves et un groupe de 4 élèves.

[9] Ce questionnaire portait sur leur vécu de cette expérimentation de recherche d'un problème non résolu sur un temps long.

des groupes 1 et 3, il s’agit de déterminer des classes de nombres pour lesquelles l’équation d’Erdös-Straus a des solutions.

L’analyse des processus de recherche en termes de dimensions organisatrice et opératoire met également en évidence la nature différente des démarches de recherche mises en œuvre par le groupe 2 d’une part, et par les groupes 1 et 3 d’autre part :

- une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, de nature algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème (groupe 2) ;
- une recherche privilégiant la construction de décompositions, de nature expérimentale, mais où l’étape d’élaboration de preuves peut être difficile à effectuer (groupes 1 et 3).

Dans nos analyses *a priori*, nous avions relevé que des articulations entre ces deux types de démarche pouvaient apparaître dans les recherches des élèves. En effet, privilégier une visée de la recherche n’exclut pas la mise en œuvre de procédures associées à l’autre visée. Nous avons relevé des articulations entre une recherche de nature algébrique et une recherche de nature expérimentale dans les travaux du groupe 1. En revanche, les groupes 2 et 3 ont exploité les deux types de procédures (exploratoire et opératoire) mais en passant de l’un à l’autre, sans les articuler. Nous ajoutons que cette expérimentation a mis en évidence une autre caractéristique des recherches selon la visée choisie. Une recherche dirigée par la quête de la vérité entraîne les élèves à mener une réflexion sur la nature de l’activité mathématique et à se poser de nombreuses questions métamathématiques sur les raisonnements ou le développement des mathématiques. Une recherche de type expérimental favorise davantage les avancées en termes de production de résultats partiels sur la conjecture, mais nous avons relevé que les élèves peuvent éprouver des difficultés à passer à l’étape de l’élaboration de preuves, même lorsque la nécessité de la preuve est reconnue. Ceci fait écho aux travaux de Grenier et Tanguay (2008) sur les relations entre les activités de définition, construction et preuves en géométrie dans l’espace. Enfin, notons que dans leur recherche du problème, les trois groupes ont travaillé les aspects dialectiques entre la mobilisation de connaissances mathématiques et le développement d’heuristiques.

***Gestes de la recherche***

Dans cette partie, nous donnons les résultats de l’analyse des processus de recherche des élèves effectuée en termes de gestes de la recherche. Nous détaillons l’émergence et les effets dans les recherches des élèves de trois gestes en particulier : réduire le problème aux nombres premiers, transformer l’équation initiale et construire et questionner des exemples.

**Geste 1 : réduire le problème aux nombres premiers**

Ce geste est effectué par les élèves mais ce n’est pas le premier geste réalisé lors de la recherche. Les élèves n’utilisent pas directement les propriétés d’arithmétique sous-jacentes même si ce sont des connaissances disponibles. Pour les rendre mobilisables, le recours à la construction et au questionnement des exemples semble nécessaire. Ce geste de la recherche est un construit de leur recherche, grâce à des allers et retours entre l’exploitation des exemples et la recherche de régularités pour élaborer des propriétés théoriques sur ces objets. De ce point de vue, l’émergence de ce geste dans la recherche des chercheurs et dans celle des élèves est différente. Cependant, nous avons relevé une similarité entre les mathématiciens et les élèves quant à l’explicitation de ce geste : ils évoquent la propriété de multiplicativité (admise ou démontrée) mais ils ne mentionnent pas le théorème fondamental de l’arithmétique. Le recours à ce théorème semble se faire implicitement. Pour les élèves, nous faisons l’hypothèse que cela peut dissimuler une difficulté à l’énoncer et à le mobiliser. Dans les groupes 1 et 3, l’émergence de la réduction du problème aux nombres premiers s’est réalisée dans un système de gestes, en interaction avec d’autres gestes de la recherche : la désignation des objets et la construction et le questionnement des exemples. La réduction du problème aux nombres premiers a conduit les élèves du groupe 1 à effectuer une disjonction de cas modulo 4 et à désigner un nombre premier selon sa congruence modulo 4. Cela leur a permis d'avancer dans la construction de leur méthode par élimination de cas. Dans le groupe 3, ce geste de la recherche a favorisé la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental. Ils ont en effet élaboré leur méthode de décomposition en étudiant tous les nombres premiers inférieurs à 300. Ce geste tient un rôle central dans les recherches des élèves dans la mesure où il permet des avancées, telles que la formulation de conjectures ou l'écriture d'identités générales et l'élaboration d'éléments de preuves.

**Geste 2 : transformer l'équation initiale**

Le geste de transformation de l'équation initiale apparaît assez spontanément dans la recherche des élèves. La visée de la quête de la vérité de la conjecture est un élément favorisant l'émergence de ce geste. Il est en effet associé à une étude de la conjecture dans un cadre général, par exploitation de procédures opératoires. Dans ce cas, sa réalisation et son exploitation sont favorisées par la mobilisation de certaines connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques. Les avancées de la recherche sont la production de résultats partiels mais surtout, un travail sur les heuristiques et une réflexion de type métamathématique. Nous avons relevé, dans une recherche, l'utilisation de ce geste en lien avec l'exploitation du caractère expérimental du problème (faire des essais sur des valeurs de n) mais généralement, au sein de procédures exploratoires, les élèves ont peu recours à ce geste de la recherche. Une des raisons est qu'il n'est pas particulièrement porteur d'une dialectique entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration d'éléments théoriques.

**Geste 3 : construire et questionner des exemples**

Le geste de construction et questionnement des exemples émerge dans la majorité des travaux de recherche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus. Dans les recherches individuelles, nous l'avons relevé dans 8 recherches sur 10. Il émerge, soit comme premier geste de la recherche dans le but de déterminer des régularités à partir de plusieurs exemples, soit à la suite de l'abandon d'une piste de recherche algébrique ou pour vérifier des manipulations algébriques. Dans les recherches collectives, ce geste a particulièrement été porteur dans la construction des méthodes de décomposition et d'élimination de cas au sein des groupes 1 et 3. Dans le groupe 1, les élèves ont élaboré leur méthode d'élimination des cas à partir de la valeur de la fraction unitaire inférieure la plus proche de $4/n$ (à savoir $1/y = 1/E(n/4\ )+1)$ , à partir du questionnement de trois exemples (donnés par le groupe 3 lors de la mise en commun : $n = 23$; $n = 29$ et $n = 457$) et à partir de la construction et de l'étude de deux exemples ($n = 461$ et l'exemple crucial $n = 4513$). Le geste de construction et questionnement des exemples joue un rôle central dans leur démarche de recherche : il favorise les allers et retours entre la manipulation des exemples, la recherche de régularités et l'écriture des expressions littérales pour rendre compte des propriétés de ces objets. Notons que l'étude des exemples comme produits finis (ceux donnés par le groupe 3) ne suffit pas aux élèves pour élaborer les éléments théoriques de leur méthode. Un recours au geste de construction et questionnement de nouveaux exemples (dont un exemple crucial) semble nécessaire. Dans le groupe 3, les élèves ont construit leur méthode de décompositions à partir de la construction, puis de l'étude des décompositions de $4/n$ pour tout nombre $n$ premier inférieur à 300. Ce geste de la recherche a émergé pour deux raisons : d'une part les élèves cherchent à déterminer des régularités pour généraliser leurs procédés de décomposition, et d'autre part ils veulent étudier en détail les cas problématiques. Il favorise alors la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental entre la manipulation de nombreux exemples, l'étude de cas particuliers, la recherche de régularités et la détermination de règles générales pour décomposer certaines classes de nombres. Leur utilisation de ce geste est similaire à celle de Mizony dans ses recherches sur la conjecture. La différence est dans la construction des exemples, « à la main » pour les élèves et à l’aide d’algorithmes pour le chercheur. Nous noterons également que ce geste de la recherche s’effectue en lien avec les gestes de désignation des objets et de contrôles locaux, favorisant également les interactions entre les expériences et l’élaboration d’éléments théoriques, comme nous l’avions relevé dans les recherches de Mizony.

Ces analyses concernant les gestes de la recherche ont mis en évidence que cet outil est pertinent pour étudier la question de la transposition du travail des chercheurs : les gestes de la recherche effectués par les élèves dans l’étude de la conjecture d’Erdös-Straus sont similaires à ceux des mathématiciens, ils émergent au sein de démarches de même nature, en appui sur les connaissances mathématiques sous-jacentes, et permettent des avancées, notamment en termes de production de résultats partiels. La notion de « geste » de la recherche permet de prendre en compte les aspects dialectiques de l’activité de recherche entre la mobilisation, l’acquisition de connaissances mathématiques et le développement d’heuristiques.

***Milieu***

L’analyse du milieu objectif des élèves montre que les éléments, identifiés pour caractériser un milieu antagoniste de type expérimental favorisant la dévolution de la recherche sur un temps long et des avancées sur le problème, sont producteurs des effets escomptés. Le milieu que nous avons élaboré est favorable pour placer les élèves dans une réelle position de chercheur sur l’étude de la conjecture d’Erdös-Straus. Nous avons particulièrement mis en évidence l’importance des connaissances mathématiques, de la pratique distanciée et régulière d’une activité de recherche de problèmes et du temps long de la recherche. Ces éléments ont permis aux élèves de vivre les différentes phases du processus de découverte mathématique (décrit par de nombreux mathématiciens) comme en témoigne cette citation d’élève :

> [Que] cette activité se vit, on y pense sans cesse quand on a le temps et des fois, l'idée vient d'où on ne s'y attend pas.

Ils ont également pu approcher divers aspects de l’activité de recherche experte (rôle du temps, différentes modalités d’échange, appropriation du travail des pairs), s’engager dans l’étude approfondie d’une piste de recherche, et pour certains, mettre en œuvre une démarche expérimentale, avoir une réflexion d’ordre métamathématique et produire plusieurs résultats partiels sur le problème.

### Conclusion

Les analyses didactiques ont mis en évidence la viabilité de la situation didactique de recherche créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus et ses diverses potentialités dans le travail des élèves : la richesse des procédures mises en œuvre, un travail effectif de la dialectique entre les connaissances mathématiques et les heuristiques mobilisées, et selon les groupes, une mise en œuvre de démarches de type expérimental, l’approfondissement de connaissances mathématiques notionnelles et une acquisition d’heuristiques expertes de recherche de problème non résolu. Nous avons également montré que le milieu construit est pertinent pour faire vivre aux élèves une authentique situation de recherche et qu’une certaine transposition du travail du mathématicien est effective.

## RESULTATS ET PERSPECTIVES

Dans notre recherche, nous nous sommes attachée à construire des outils pour décrire le travail des mathématiciens, et pour analyser les processus de recherche mis en œuvre au cours de la résolution d’un problème de recherche. Pour cela, nous avons développé la notion de

« geste » de la recherche, qui permet de prendre en compte différents aspects de l'activité de recherche mathématique, notamment sa dimension active et ses aspects dialectiques entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. De plus, elle permet de mettre en évidence les ressorts de la dimension expérimentale, dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche, et plus généralement pour l'apprentissage des mathématiques. En accord avec Dias (2008) et l'équipe DREAM (Aldon et al., 2010), nous faisons en effet l'hypothèse que le recours à la dimension expérimentale participe à la construction des connaissances mathématiques. Nous avons ensuite élaboré une situation de recherche pour des élèves et des étudiants, les plaçant dans une position proche de celle d'un chercheur en mathématique. Pour cela, nous avons identifié des éléments qui caractérisent un milieu favorisant une dévolution de la recherche et la production de résultats partiels sur le problème. La mise en œuvre d'une expérimentation en contexte de laboratoire a confirmé la consistance de la situation pour placer les élèves en réelle situation de résolution de problèmes de recherche. D'autre part, nos analyses montrent que la notion de geste est un outil pertinent à intégrer dans les analyses *a priori* d'une situation didactique de recherche. Cependant, cette notion reste à développer sur le plan didactique, en particulier pour analyser plus en détail la question de la transposition du travail du mathématicien. Enfin, dans notre recherche, nous avons fait le choix de construire et réaliser une ingénierie de recherche pour conduire nos analyses didactiques sur l'étude des processus de recherche d'élèves en situation de résolution de problèmes de recherche. Un des enjeux serait ensuite de passer d'une ingénierie de recherche à une ingénierie pour la classe.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ALDON, G., CAHUET, P.-Y., DURAND-GUERRIER, V., FRONT, M., KRIEGER, D., MIZONY, M., & TARDY, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

ARSAC, G., & MANTE, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. SCÉRÉN-CRDP de l'Académie de Lyon.

BAILLY, F., & LONGO, G. (2003). *Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique*. Consulté sur http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/arsac.pdf.

BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques. Corps, 21-30 août 2001* (p. 125-139). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

CASSOU-NOGUES, P. (2001). *De l'expérience mathématique. Essai sur la philisophie des sciences de J. Cavaillès*. Paris : VRIN.

CAVAILLES, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann.

CAVAILLES, J. (1981). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann, rééd.

CAVAILLES, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

CHATELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Editions du Seuil.

CONNE, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *Le cognitif en didactique des mathématiques*, 31-69.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

DUCHET, P. (1996). *De la recherche à la formation : MATh.en.JEANS, chercher, comprendre, aimer les mathématiques*. En ligne. Consulté sur

http://mapage.noos.fr/duchet/duchet_travaux_fichiers/pub_dida/rechform.pdf.
ELSHOLTZ, C., & TAO, T. (2011). Counting the number of solutions to the Erdos-Straus equation on unit fractions. *Arxiv preprint ArXiv :1107.1010.*
ERDÖS, P. (1963). *Quelques problèmes de théorie des nombres (N°6).* Monographies de L'Enseignement Mathématique.
FEHR, H. (1908). *Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens*. Gauthier-Villars.
GARDES, M.-L. (2010). Démarche d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures : Un exemple en classe de terminale scientifique. *Petit x 83*, 51-78.
GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.
GIROUD, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier Grenoble.
GRENIER, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In D. J.-L. & C. S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012*. Genève.
GRENIER, D., & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*.
GRENIER, D., & TANGUAY, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x 78*, 26-52.
HADAMARD, J. (1993). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine Mathématique*. Sceaux : Les Grands Classiques Gauthiers-Villars. Editions Jacques Gabay.
LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
MIZONY, M. (2010). Sur la conjecture d'Erdös-Straus. *Mathematice 18*. Consulté sur http://revue.sesamath.net/spip.php?article262.
MORDELL, L. (1969). *Diophantine equations (Vol. 30).* Academic Press.
NIMIER, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : l'heuristique mathématique*. IREM de Lyon.
POINCARE, H. (1908). L'invention Mathématique. *Bulletin de l'Institut Général Psychologique 3*, 175-187.
PÓLYA, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
PÓLYA, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press.
SCHINZEL, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math. 28*, 187-194.
SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic press.
SWETT, A. (1999). *The erdös-straus conjecture*. Consulté sur http://math.uindy.edu/swett/esc.htm.
TISSERON, C. (1998). *Différents aspects du travail du chercheur*. Consulté sur http://sierra.univ-lyon1.fr/irem/CF/epis/cadre1.htm.
VILLANI, C. (2012). *Théorème vivant*. Paris : Grasset.
YAMAMOTO, K. (1965). On the Diophantine equation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 19*, 37-47.

# L'ENTRETIEN CLINIQUE-CRITIQUE DE PIAGET EN TOILE DE FOND DE L'INTERACTION DE CONNAISSANCES DANS UN JEU DE TACHES

Christine **DEL NOTARO**

Université de Genève

Christine.DelNotaro@unige.ch

**Résumé**

Depuis quelques années, nous explorons la question de l'investigation de milieux numériques et des interactions entre les connaissances d'un expérimentateur et celles d'un élève, à travers ce que nous nommons avec d'autres chercheurs, un jeu de tâches. Nous nous plaçons dans une perspective épistémologique en ce sens que nous cherchons à comprendre comment les connaissances des élèves s'agencent autour de la distinction chiffre/nombre et de quelle manière leur expérience se manifeste. Pour ce faire, nous menons un jeu de tâches au cours duquel nous nous autorisons à intervenir dans les propos de l'élève, en proposant des contre arguments ou en changeant de tâche au besoin. Il ne s'agit toutefois pas d'une discussion ni d'un questionnement, mais d'une interaction de connaissances qui a pour objectif de répondre à l'élève par une tâche procédant d'un contenu mathématique. En tant qu'expérimentatrice, nous sommes un élément du milieu qui met en jeu ses propres connaissances dans son interaction avec le milieu de la tâche et le milieu de l'élève.

**Mots clés**

Jeux de tâches, entretien clinique-critique, expérience, interaction de connaissances, didactique des mathématiques.

## L'ENTRETIEN CLINIQUE-CRITIQUE

En premier lieu, le poster rappelle quelques points saillants du questionnement de l'enfant par Piaget et ses collaborateurs, à travers l'entretien clinique-critique. Ducret (2004) en précise la définition :

> La méthode clinique-critique est un procédé par lequel le chercheur interagit dialectiquement avec des enfants, des adolescents ou des adultes, de manière à rassembler des informations qui, toutes ensemble, vont permettre à ce chercheur de répondre à la question qu'il se pose (p.2)

Le terme de critique est apparu dans un deuxième temps, après que Piaget eut passé quelques années à étudier la philosophie et l'histoire des sciences. Il définit essentiellement le fait que le sujet questionné peut réajuster sans cesse ses propos, les modifier pour, enfin, les valider. C'est ce qui va nous intéresser, en écho à notre jeu de tâches. Ce type d'entretien tient beaucoup à l'habileté de l'expérimentateur à questionner l'enfant, se mettant à son niveau du point de vue du langage et de ses représentations. Il reprend ses mots, n'hésite pas à utiliser des néologismes caractéristiques du monde enfantin, ou encore, à être redondant dans ses explications. L'expérimentateur développe ainsi une finesse dans le dialogue avec l'enfant qui lui permet de s'assurer de ce qu'il pense d'une part, et de se faire comprendre dans ses intentions d'autre part. Un exemple particulièrement parlant est l'entretien de Sylviane, 4 ans

½, par Gérald Noelting (plusieurs séquences téléchargeables sur *youtube*[1]). Il propose deux boules de pâte à modeler de même taille, dont le but ultérieur sera de transformer une boule en galette sous les yeux de Sylviane, pour cerner la notion de conservation de la matière. A la question de l'expérimentateur de savoir si les deux boules sont de la même taille, l'enfant dira que non. Le psychologue-expérimentateur prend alors l'une des deux boules, enlève une petite partie de matière, la remodèle entre ses mains et demande si ainsi, les deux boules sont de même taille ; l'enfant répond alors que oui. Ceci lui permet de poursuivre son expérimentation puisque la fillette adhère au résultat ainsi obtenu. Ces extraits sont certes connus mais en les redécouvrant, on constate que l'expérimentateur a acquis une expertise du point de vue épistémologique qui lui permet de poser ses questions en lien à la fois avec son objet de recherche et les représentations de l'enfant, tout en se focalisant sur sa problématique de recherche. L'entretien clinique-critique, selon Ducret (2004), permet de découvrir la connaissance qu'un sujet a d'un concept ou d'un objet, impliquant pour l'expérimentateur, une bonne connaissance de l'épistémologie de la science en question. Perraudeau (1998) n'a pas hésité à transposer ce type d'entretien à l'enseignement, ce qui nous intéresse particulièrement dans la mesure où nous cherchons à vérifier si le jeu de tâches est transposable à l'enseignement, et dans ce cas, à quelles conditions ; ceci constitue notre travail de didacticienne. Une première tentative d'implémentation en classe a été conduite par une étudiante (Thévenaz, 2010) pour la réalisation de son mémoire de maitrise ; cet essai, concluant au demeurant à bien des égards, laisse toutefois des questions ouvertes (Del Notaro, 2014), dans le sens que l'expérimentatrice – l'enseignante-stagiaire elle-même – n'a pas résisté à l'envie d'enseigner à la fin de son expérimentation. Il y a encore un écart transpositif à modéliser entre l'expérimentation du chercheur et celle de l'enseignant.
Le risque encouru par l'expérimentateur menant un entretien clinique-critique, selon Ducret (ibid.), réside dans l'éventualité que ce dernier suggère les réponses au sujet. Ce fait courant dans l'enseignement a été théorisé par Brousseau (1998) comme un phénomène didactique appelé *effet Topaze*. La psychologie cognitive s'en affranchit par la mise en œuvre de plusieurs situations autour d'un même thème et d'entretiens menés auprès de nombreux enfants, pour se prémunir au maximum d'assimilations ou de généralisations abusives. Le jeu de tâches n'échappe pas à cela mais on peut contourner le phénomène en répondant essentiellement, comme préconisé, à une tâche par une tâche, à un contenu, par un contenu ; on ne demandera jamais à l'élève pourquoi il énonce un propos ni comment il a trouvé un résultat car on s'éloignerait du but poursuivi qui est, rappelons-le, la compréhension de la construction des connaissances de l'élève.

## LE JEU DE TACHES

En quoi le jeu de tâches peut-il être considéré comme un prolongement didactique à l'entretien clinique-critique et comment s'en distingue-t-il ?
La question de l'expérience est centrale, en ce sens qu'elle permet de médiatiser les liens entre une règle et une logique prononcées par l'élève et de faire ainsi des liens avec son raisonnement. Par raisonnement, nous entendons les processus inférentiels logiques qui le caractérisent : la déduction, l'induction et l'abduction. Sans entrer ici dans trop de détails, nous nous limiterons à mentionner que Piaget considère l'abduction comme faisant partie intégrante de l'accommodation, ce que nous interprétons comme une résultante d'un début d'assimilation du milieu qui permet d'effectuer un pas de côté, et qui plus est, de laisser s'exprimer une abduction. L'expérience acquise autour de la formation de certaines suites numériques, par exemple, favorise l'observation de régularités permettant d'énoncer une logique. Cette dernière, de nature inductive ou abductive, va dans le sens d'une formulation

[1] http://youtu.be/rvkMdEQc8Ks ; http://youtu.be/Z0SRaSEQw5E ; http://youtu.be/YfmyQXpfL1Q

de règle. Chaque nouvelle logique réinterprétée par l'expérience donne lieu à une nouvelle règle.
Tout comme le sujet dans l'entretien clinique-critique, l'élève, dans un jeu de tâches, se trouve face à du *vrai* par opposition à du juste ou faux ; ceci signifie pour les élèves qu'ils peuvent proposer une réponse ayant du sens selon leurs intérêts *hic et nunc* et pour l'expérimentateur, de le suivre dans son raisonnement au gré de ses propres connaissances, convoquées dans l'interaction.
Le dispositif du jeu de tâches se décline généralement en trois temps : premièrement, nous recourons à une investigation du milieu mathématique, ensuite, à l'élaboration d'une liste de tâches non hiérarchisées, comme autant de cartes à jouer, et enfin, nous effectuons un choix *in situ* et proposons les tâches au gré de l'avancement et de l'intérêt des élèves pour le contenu.
Nous retiendrons comme différence entre ces deux modes d'interaction, d'une part que le psychologue piagétien sait ce que son sujet va découvrir ou non, (étant lui-même conservant), ce qui n'est pas le cas de l'expérimentateur du jeu de tâches qui se met en position d'ignorance et *improvise* dans le cadre strict et contraignant des mathématiques, sans pour autant savoir où va le mener le jeu de l'élève, ni si les cartes prévues vont pouvoir être jouées, pas plus que le choix qu'il devra effectuer parmi les cartes préconisées (les utiliser toutes ou certaines seulement).
Le jeu de tâches se situe néanmoins dans cette filiation piagétienne de l'entretien clinique-critique en ce sens qu'il permet de la même manière à l'élève de se constituer une expérience autour d'un savoir mathématique, de discuter ses propres propos et ceux de l'expérimentateur, et de construire ses connaissances dans une dialectique, les remettant en cause à certaines occasions pour finalement les valider définitivement.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques* 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DEL NOTARO, C. (2013). Vers une distinction chiffre/nombre dans un jeu de tâches chez des élèves de 11 ans. *Actes du XXIXème Colloque COPIRELEM "Faire des mathématiques à l'école: de l'activité de l'élève à la formation des enseignants".* Quimper (France) IREM de Brest, 2012. p. C3; 1-13.

DEL NOTARO, C. (2014). *Implementation in Class of a Theory Stemming from a Research in Mathematics Education: a Question of Didactical Transposition.* US-China Education Review B, ISSN 2161-6248, October 2014, Vol. 4, No. 10, 730-739.

DUCRET, J.-J, (2004). *Méthode clinique-critique piagétienne* (texte d'une communication présentée au Service de la recherche pédagogique du canton de Genève).

PERRAUDEAU, M. (1998). *Échanger pour apprendre : L'entretien critique***,** Paris, Armand Colin, 159 p., ISBN 2-200-01971-8

THÉVENAZ, K. (2010). Un exemple de jeu de tâches pour explorer le milieu des puissances en 6P. *Mémoire de maitrise en sciences de l'éducation, mention enseignement*, Université de Genève. http://archive-ouverte.unige.ch/unige:12528

# DYSCALCULIE : ET SI LES ENSEIGNANTS REPRENAIENT LA MAIN ?

Michel **DERUAZ**

Thierry **DIAS**

Haute école pédagogique Vaud (Suisse)

michel.deruaz@hepl.ch

**Résumé**
Depuis un certain temps, la dyscalculie s'invite à toutes les tables de classe et dans toutes les salles des professeurs. Les enseignants confrontés à ces diagnostics sont souvent dépourvus de connaissances suffisantes dans ce domaine. Ils se retrouvent ainsi autant désarmés face à la dyscalculie que l'élève face aux mathématiques. Notre objectif est de proposer des pistes de réflexion, tant aux enseignants qu'à leurs formateurs et à l'institution scolaire.

**Mots clés**
Dyscalculie, élèves en difficultés, apprentissage, enseignement.

## LE CONTEXTE

Depuis un certain temps, la dyscalculie s'invite à toutes les tables de classe et dans toutes les salles des professeurs. Nous constatons en effet de très nombreuses demandes sur la prise en charge des troubles relatifs à cette « pathologie », voir, par exemple, Dias & Deruaz (2012). Les interrogations nous paraissent de plus en plus pressantes, elles émanent soit des enseignants ordinaires soit des enseignants spécialisés. Ils sont par exemple très démunis quant aux réponses professionnelles à apporter aux certificats médicaux présentés par les parents d'élèves diagnostiqués dyscalculiques. Comme ces diagnostics émanent du milieu médical (orthophonistes ou logopédistes, mais aussi médecins avec ou sans spécialité), ils sont donc réellement pris au sérieux par les professeurs. Cependant, ces certificats sont souvent vécus par les enseignants comme des injonctions professionnelles à agir :

- Soit pour remédier aux difficultés des élèves : « Faites en sorte que les élèves dyscalculiques apprennent quand même les mathématiques ! »
- Soit pour compenser les difficultés : « Il est de votre devoir d'aménager les examens pour les élèves qui sont dyscalculiques ! »

Faute de formation adaptée et pertinente dans ce domaine[1], les enseignants questionnent leur entourage professionnel pour savoir quelles sont les pistes qu'ils doivent emprunter pour sortir de cette impasse. Leur identité professionnelle est en jeu, la réussite scolaire des élèves n'attend pas…

Nous nous intéressons aux outils et aux gestes professionnels utiles aux enseignants qui doivent aider les élèves en grandes difficultés dans leur classe en interrogeant plutôt la notion de *dysmathématie* (Dias & Deruaz, 2012, p532).

[1] Les troubles et difficultés d'apprentissage en mathématiques n'ont par exemple fait leur apparition dans les contenus de formation du master en pédagogie spécialisée du canton de Vaud qu'à partir du plan de 2011, dans celui de Genève en 2013 et dans celui de Fribourg en 2014.

Nous présentons ici un projet de formations spécifiques[2] que nous allons mettre en place ces prochains mois à Lausanne au sein de la Haute École Pédagogique du canton de Vaud. Nous espérons que ce dispositif sera susceptible de répondre progressivement aux différentes problématiques relevant de la prise en charge de la dyscalculie dans sa dimension didactique et pédagogique.

Nous souhaitons également intégrer de façon plus importante la formation à la compréhension des difficultés en mathématiques plus qu'à leur repérage qui nécessiterait une bonne connaissance des outils appropriés comme l'UDN-II (voir par exemple Meljac, 2003). Cette dimension de la formation passe notamment par un travail spécifique sur les types de handicap et leurs corrélations respectives avec les difficultés d'apprentissage en mathématiques.

Enfin, le projet comportera une dimension professionnelle dédiée à la construction d'outils d'aides favorisant l'accompagnement adapté des élèves à destination des enseignants. Nous souhaitons pour cela utiliser le contexte de l'écriture des mémoires professionnels (Bachelor et Master) qui doit s'appuyer sur une problématique relevant de l'articulation enseignement/apprentissage. La notion de difficulté d'apprentissage en mathématique sera donc proposée lors de la présentation des différents séminaires d'accompagnement à ces différents types d'écrits.

Notre invitons ainsi les enseignants à *reprendre la main* afin de montrer notre souhait de voir cette délicate question des difficultés d'apprentissage en mathématiques concerner davantage la communauté scolaire. Les mathématiques sont pratiquées par les élèves essentiellement dans l'enceinte d'une institution dont la mission d'enseignement / apprentissage est première. Ainsi nous paraît-il fondamental que les observations et les remédiations soient un enjeu pour les enseignants. Les outils d'aide qui leurs sont destinés sont encore très largement insuffisants même si une littérature considérable sur la dyscalculie a émergé en librairie ces dernières années[3].

## TROUBLE DE L'ENSEIGNEMENT OU TROUBLE DE L'APPRENTISSAGE ?

Nous nous intéressons à la dimension didactique en tant que levier pour la résolution de situations déstabilisantes en classe de mathématiques. Pour nous, l'enjeu didactique est à envisager comme un processus dynamique susceptible de révéler les potentiels :

- d'adaptation des savoirs professionnels de l'enseignant aux résistances d'apprentissage inattendues de ses élèves,
- de développement des connaissances mathématiques des élèves ou pour le moins à leur prise de conscience.

Le modèle que nous développons consiste à étudier les corrélations qui existent entre les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Nous pensons que trois éléments principaux sont susceptibles d'engendrer un dysfonctionnement de l'enseignement de la discipline:

- des savoirs mathématiques insuffisamment maîtrisés,
- des savoirs professionnels didactiques non stabilisés,
- un rapport personnel conflictuel avec les objets mathématiques.

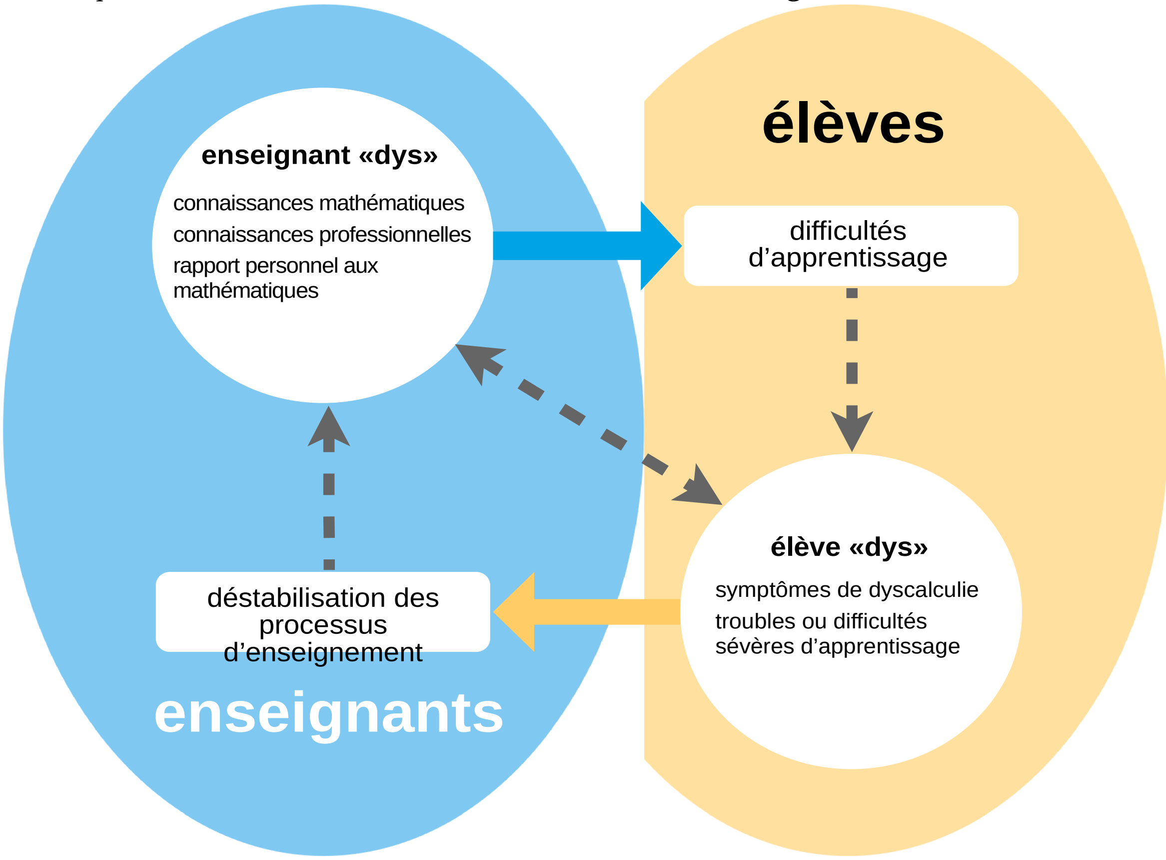
Lorsque l'un ou plusieurs de ces éléments sont présents dans un contexte scolaire, il y a fort à parier que des conséquences sont inévitables sur les apprentissages des élèves "ordinaires"

[2] Un site internet présente ce projet : http://dyscalculie.ocinfo.ch/
[3] Voir, par exemple, http://dyscalculie.ocinfo.ch/?page_id=68 ou http://dyscalculie.ocinfo.ch/?page_id=161

(c'est à dire sans difficulté *a priori*).

Notre seconde hypothèse consiste à dire que des difficultés sévères ou des troubles d'apprentissage en mathématiques d'un élève sont les causes presque certaines d'une déstabilisation des processus d'enseignement, y compris pour des enseignants n'ayant pas de difficulté particulière dans l'enseignement de cette discipline.

Ainsi, nous conjecturons que les effets "dys" tels que la dysmathématie (Dias & Deruaz, 2012) ou certaines manifestations de la dyscalculie sont relativement neutralisables lorsque l'environnement didactique est correctement constitué. Notre recherche consiste à inventorier des éléments déterminants dans la stabilisation de cet environnement. La finalité étant selon nous de maîtriser les effets des rencontres entre les deux pôles "dys" de la situation didactique: à savoir les interactions élèves - enseignants dans les deux sens.




*Figue 1 : enseignant ou élève « dys »*

## BIBLIOGRAPHIE

DIAS, T., & DERUAZ, M. (2012). Dyscalculie: et si les enseignants reprenaient la main? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (120-21), 529–534.
MELJAC, C. (2011). *Qui donc a inventé les mathématiques. Paris :* Petit ANAE.

# LE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES: L'UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE NUMERIQUE

Maria Alice **GRAVINA**
Marcus Vinícius **BASSO**
Elisabete **BURIGO**
Márcia **MENEGHETTI**
Eliana **SALIN**
Vandoir **STORMOWSKY**

PPGEMat /UFRGS/ BRÉSIL

mat-ppgensimat@ufrgs.br

**Résumé**
Cet article décrit un programme de développement professionnel des enseignants des mathématiques brésiliens du collège et du lycée pour l´usage de la technologie numérique. Il traite aussi de d´une recherche en développement qui se concentre sur les effets du programme de formation proposé sur les processus de genèses instrumentales personnelles et professionnelles des enseignants. Les résultats préliminaires indiquent la persistance des pratiques habituelles en salle de classe, avec peu d´innovation en matière d´approche didactique
ou des contenus mathématiques.

**Mots clés**
Technologie numérique, enseignant des mathématiques, formation professionnelle

## INTRODUCTION

Le rôle des systèmes sémiotiques de représentation dans l'apprentissage des mathématiques est objet de recherche dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. La technologie numérique multiplie les possibilités de représentation en permettant la manipulation de différentes représentations sur l'écran de l'ordinateur. Des recherches attestent le potentiel des systèmes de représentation dynamiques dans le processus d'apprentissage. Les élèves font des expérimentations et des conjectures qui sont raffinées à travers le *feedback* offert par l'environnement dans un processus d'apprentissage en spiral (Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008 ; Lagrange, 2013). Toutefois au Brésil, d'après notre expérience de formation des enseignants, nous observons qu'on ne fait pas encore usage dans les écoles, à grande échelle, de la technologie numérique comme une ressource pour l'apprentissage des mathématiques (Gravina et al. 2012) .
Dans cet article nous présentons un programme de développement professionnel des enseignants de mathématiques pour l'usage de la technologie numérique dans les écoles. Le programme se déroule à l'Université Fédérale de Rio Grande do Sul (UFRGS) au Brésil.

## UN PROGRAMME DE DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL

Le programme « Mathématiques, Médias Numériques et Didactiques (MMDD)» est offert par le Programme de Post-Graduation en Enseignement de Mathématiques (PPGMAT/UFRGS), en partenariat avec l'Université Aberta do Brasil (UAB) dans la modalité « éducation à distance(EAD)». Cent vingt enseignants de l'État du Rio Grande do Sul participent à la deuxième édition (2014-2015). Une équipe de sept professeurs d'université, formateurs et chercheurs, et sept tuteurs travaillent avec les enseignants, à travers les outils EAD. Des rencontres présentielles avec les tuteurs ont lieu tous les mois dans les six villes appelées « Pôles de Soutien Présentiel».

Les objectifs du cours sont: a) l'actualisation des connaissances des enseignants de mathématiques, en y intégrant l'usage des technologies numériques en classe ; b) l'implémentation de pratiques pédagogiques innovatrices dans les écoles, en introduisant un rôle actif de l'élève dans le processus d'apprentissage. Les enseignants doivent suivre quatre cours de formation en mathématiques faisant usage de la technologie, associés à quatre cours de discussion pédagogique; deux cours concernant les recherches en pratiques d'enseignement des mathématiques qui portent sur le nouveau contenu ou sur un nouvel abordage de contenu, faisant usage de la technologie numérique. Au long de dix-huit mois les enseignants apprennent à utiliser différents logiciels (GeoGebra, Winplot, GrafEq); ils réfléchissent sur leurs pratiques d'enseignement, ils proposent et réalisent de nouvelles pratiques à travers l'usage de technologies. Une monographie concernant une pratique d'enseignement faisant usage de la technologie numérique est un travail qui doit être présenté à la fin de la formation.

Des sites web ayant des animations et des vidéos sont utilisés comme matériel didactique. La communication synchrone/asynchrone et l'organisation des tâches hebdomadaires sont faites sur MOODLE. Un multiécran aide les enseignants à réaliser des tâches à partir de différents outils. La Web conférence est utilisée lors des rencontres mensuelles dans les villes « Pôle de Soutien Présentiel» pour que les professeurs participent aux activités.

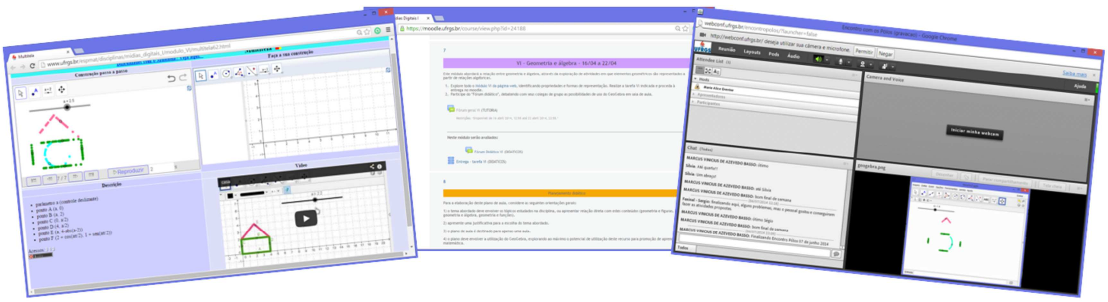


*Figure 1- Les outils pour la communication synchrone/asynchrone*

## LE DESSIN DU PROGRAMME

Dans le cadre de la théorie d'instrumentalisation (Artigue, 2002 ; Trouche, 2004) la question que nous nous posons c'est: de quelle manière un programme de développement professionnel pour l'usage de la technologie numérique peut favoriser des processus de genèses instrumentales personnelle et professionnelle qui impliquent des changements dans l'enseignement et dans l'apprentissage des mathématiques scolaires ?

Ce que nous comprenons comme la genèse personnelle se rapporte au processus de domaine des ressources disponibles dans la technologie numérique : des contenus des mathématiques, des multiples représentations, des possibilités de dynamisme sur l'interface ; et la genèse professionnelle se rapporte au processus d'implémentation de pratiques d'enseignement qui font usage de la technologie numérique (le choix des tâches, l'attention au processus d'apprentissage, la gestion des classes).

En ce qui concerne les changements, nous pensons à de nouvelles approches pour des contenus qui sont aujourd'hui à l'école, ayant peut-être la possibilité d'être anticipés dans le programme scolaire; nous pensons aussi à de nouveaux contenus à l'école qui peuvent être traités quand on fait usage de la technologie numérique.

Nous avons comme hypothèse de départ que les changements de pratiques de l'enseignant (ici on fait référence au processus de genèse instrumentale professionnelle) dépendent de la connaissance que l'enseignant a du potentiel de représentation sémiotique du logiciel qu'il veut utiliser (ici on fait référence au processus de genèse instrumentale personnelle). Cette hypothèse explique l'organisation des tâches au cours de la formation. Les objectifs des tâches, en ce qui concerne le travail avec GeoGebra, sont : comprendre la stabilité des figures dynamiques; comprendre que les constructions géométriques informent sur les propriétés et les théorèmes de la géométrie ; travailler avec des transformations de registres de représentation (Duval, 2006). En ce qui concerne le travail avec le GrafEq, ils sont: comprendre les transformations de registres géométrique et algébrique ; élaborer des raisonnements algébriques généralisateurs. En ce qui concerne le travail avec Winplot, les objectifs sont : comprendre les mathématiques de surfaces de révolutions; développer la visualisation dans l'espace.
Les sites web de soutien aux cours ont été pensés, surtout, pour aider les enseignants dans le processus de genèse instrumentale personnelle (des animations, des objets d'apprentissage, des vidéos, le multi-écran).

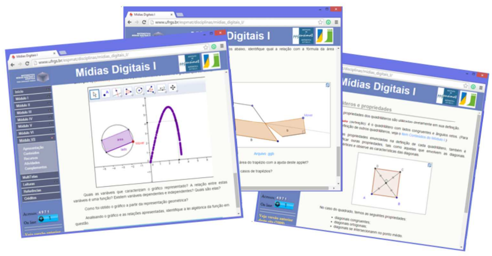


*Figure 2- Tâches avec Geogebra dans le site « Midias Digitais I »*

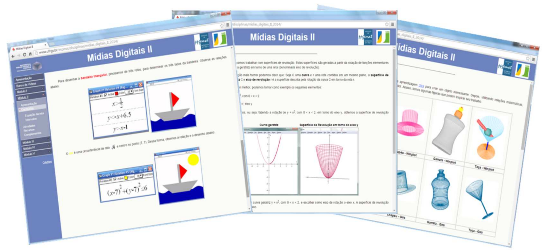


*Figure 3- Tâches avec GrafEq et Winplot dans le site « Midias Digitais II »*

## LA PRODUCTION ET LES PREMIÈRES ANALYSES

La production des enseignants concernant les tâches réalisées montre de quelle manière le processus de genèse instrumentale personnelle se déroule.
Concernant le logiciel GeoGebra nous pouvons dire que dans les tâches du type « boîte-noire » (assez simple), ils se sont appropriés des schèmes d'usage de « faire glisser les points» versus « stabilité de la figure »; ils ont compris le sens d'une figure dynamique, un premier aspect du potentiel de représentation sémiotique du logiciel. Ils ont réalisé des tâches provocatrices du schème d'usage qui convertit le processus de construction en énoncé de propriété géométrique. Par exemple, dans la tâche de construction de quadrilatères à partir des diagonales, ils ont établi la propriété « si les diagonales du quadrilatère ont la propriété … alors le quadrilatère est du type … ».

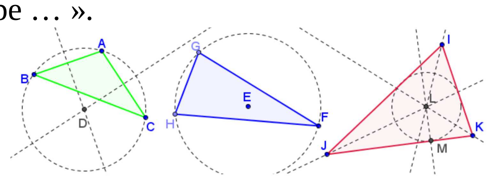


*Figure 4 – Tâche «boîte-noire»*

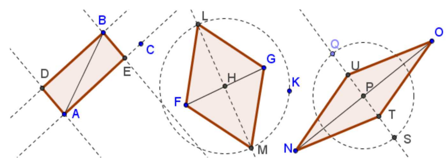


*Figure 5 – Tâche «quadrilatères»*

Encore faisant usage de GeoGebra, dans les tâches ayant des contenus géométrique et algébrique, ils ont développé des schèmes d'usage pour faire des conversions entre registres. Dans la tâche «nombres commandant des points», ils ont utilisé des relations algébriques pour produire un « dessin surprise» à travers la manipulation d'un seul Sélecteur (l'un des outils de GeoGebra). Dans la tâche « géométrie et fonctions », les schèmes d'usage présents ont été les suivants: manipuler le point sur la figure et identifier la variabilité; choisir les variables indépendante et dépendante et représenter la variation sur le plan cartésien; déduire la « loi » de la fonction.

-

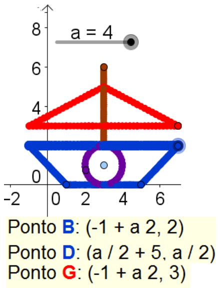



*Figure 6 - Tâche «nombres comandant des points»*

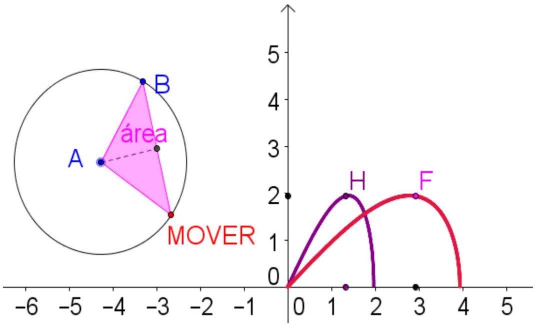



*Figure 7 - Tâche «géométrie et fonctions »*

Sur l'utilisation du logiciel GrafEq, nous avons observé que dans la tâche de construction de répliques d'œuvres d'art, ils ont repris les schèmes d'usage pour les conversions de la géométrie pour l'algèbre. Dans la tâche de construction de réplique d'illusion d'optique ils ont développé des schèmes d'usage pour la production de raisonnement algébrique généralisateur (grouper des relations à travers l'usage de paramètres).

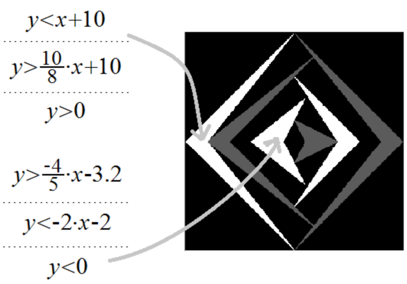



*Figure 8 – Tâche «œuvre d'art »*

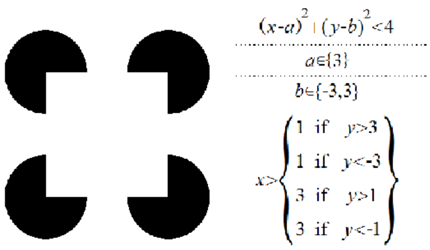



*Figure 9 – Tâche «illusion d'optique»*

Avec le logiciel Winplot, dans la construction de surface de révolution, un schème d'usage qui intègre des représentations dans le plan et dans l'espace a été mis en œuvre; le règlement des équations sur le plan pour produire une surface de révolution exige un traitement algébrique et une visualisation dans l'espace, simultanément.

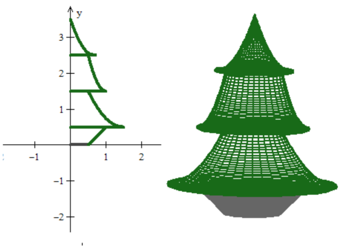


*Figure 10 – Tâche «surface de révolution 1»*

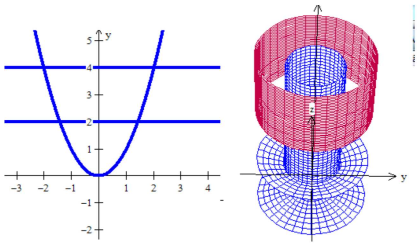


*Figure 11 – Tâche «surface de révolution 2»*

Sur le processus de genèse instrumentale professionnelle, il a été particulièrement contemplé dans les discussions asynchrones sur Moodle; dans des lectures de travaux de recherche qui discutent les expériences pratiques de l'usage de la technologie numérique; dans des élaborations et réalisations des pratiques faisant usage de la technologie numérique. Les résultats, jusqu'à présent, n'indiquent pas beaucoup de changement en ce qui concerne les pratiques: a) en général, les propositions des pratiques commencent par un moment d'exposition des contenus, fait par l'enseignant, et après, il y a une tâche sur le logiciel qui reprend les contenus déjà appris. Il est rare de proposer une tâche pour apprendre un nouveau contenu en faisant usage d'un logiciel ; b) les tâches qui provoquent l'expérimentation empirique, à travers l'usage de mesures numériques, sont récurrentes et des tâches qui exigent des arguments déductifs et généralisateurs sont rares ; c) le topique de préférence est « fonction » et la tâche proposée, en général, porte sur l'observation d'un mouvement graphique à partir de la manipulation des paramètres (translation et dilatation/contraction) ; des tâches avec des figures géométriques ressemblent, en général, à celles de nature statique inspirées des dessins des livres didactiques.

## CONSIDÉRATIONS FINALES

Nous n'avons toujours pas de réponse à la question posée. Les enseignants avaient à leur disposition des sites qui ont été conçus pour provoquer le processus de genèse instrumentale personnelle (ici on met l'accent sur le potentiel des représentations sémiotiques dynamiques des différents logiciels en étude). Dans leurs productions, les enseignants ont montré ce processus en cours. Cependant on ne voit pas encore un processus de genèse instrumentale professionnelle qui implique des changements dans les pratiques d'enseignement des mathématiques scolaire. Les variables qui font interférence dans ce processus ont besoin d'être mieux identifiées pour qu'on avance dans le perfectionnement du dessin du programme « Mathématiques, Médias Numérique et Didactique ». L'expérience en cours nous montre qu'il faut que les processus de genèse personnelle et professionnelle se déroulent de manière plus équilibrée.

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARTIGUE, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: the Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245–274.

DUVAL, R. (2006) A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131.

GRAVINA, M.A, BURIGO, E.Z., BASSO, M.V.A., GARCIA, V.C. (Eds) (2012). *Matemática, mídias digitais e didática : tripé para formação do professor de matemática*. Porto Alegre: Evangraf. http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf

LAGRANGE, J.B. (ed) (2013). *Les Technologies numériques pour l´enseignement*. Toulouse : Octarès Edition.

MORENO-ARMALLO, HEGEDUS, S. & KAPUT, J. (2008). From static to dynamic mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 68, 99-111.

TROUCHE, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281–307.

# UNE INGENIERIE DIDACTIQUE AUTOUR DE L'« ALGORITHME DE DICHOTOMIE » ILLUSTRANT UN ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHMIQUE EN PREMIERE SCIENTIFIQUE COMME OBJET D'APPRENTISSAGE DANS UN CHAMP DES MATHEMATIQUES : L'ANALYSE

Dominique **LAVAL**

LDAR – Université Diderot – Paris 7

dominique.laval@gmail.com

**Résumé**
Notre travail de recherche se concentre sur l'étude et les apprentissages d'un algorithme dans un champ particulier des mathématiques : l'analyse. Une ingénierie didactique est alors conçue et expérimentée dans une classe de Première Scientifique d'un lycée français. La conception et la construction d'algorithmes par les élèves sont situées dans un cadre plus général des approches de modélisation en mathématiques.

**Mots clés**
Algorithmique, Algorithmes, Dichotomie, Espace de Travail Algorithmique, Paradigmes algorithmiques, Modélisation, Outil, Objet.

## I. INTRODUCTION : LES QUESTIONS INITIALES

L'analyse des algorithmes est un nouveau domaine d'enseignement des mathématiques introduit dans les lycées français depuis 2009, mais c'est aussi un champ de recherche récent qui a émergé comme une nouvelle discipline scientifique dans les années soixante et a été rapidement reconnu comme l'un des domaines les plus actifs d'étude scientifique, devenant une part importante de la science informatique. La raison de ce soudain intérêt pour l'étude des algorithmes n'est pas difficile à retracer. Elle est due au développement rapide des ordinateurs et de leur usage dans de nombreux domaines de l'activité humaine ayant conduit à la construction d'une grande variété d'algorithmes informatiques.
Selon les nouveaux curricula de mathématiques au lycée, un enseignement algorithmique devrait pouvoir aider à donner un sens à un certain nombre de concepts mathématiques étudiés. Un tel enseignement est présenté comme un domaine transversal des mathématiques. Il favorise l'accès des élèves à la pensée scientifique. Nous pensons ainsi pouvoir observer trois objectifs fondamentaux en lien avec cet enseignement : **(1)** améliorer la connaissance des fondements de la logique et du raisonnement – **(2)** illustrer les concepts mathématiques enseignés par l'utilisation d'outils informatiques – **(3)** développer la créativité et des attitudes à la prise d'initiative chez l'élève à travers l'exploration.
L'enseignement des algorithmes dans les curricula de mathématiques semble essentiellement se limiter à un seul aspect, celui d'*outil* (au sens de Douady, 1986). Nous avons alors le problème de son existence comme *objet* (ibid.) d'apprentissage. En effet, nous pensons que la conception et la construction d'algorithmes impliquent des connaissances spécifiques que nous plaçons dans un champ plus large de processus de modélisation. Les questions sont alors les suivantes : **(Q1)** Comment un tel enseignement peut aller au-delà de cet objectif afin que

l'algorithme utilisé devienne un objet d'apprentissage ? **(Q2)** Comment le travail sur des algorithmes peut-il être considéré comme une tâche de modélisation ?

# II. LES CONNAISSANCES MISES EN JEU

## 1. Premières définitions

- **Un algorithme** (Bouvier & al., 2006, p. 27)

> Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des donnée.

- **L'algorithmique** est la science des algorithmes. Un de ces objectifs est la conception, l'évaluation et l'optimisation des mathématiques et des méthodes de calcul informatique.
- **Un programme** est la transcription d'un algorithme dans un langage qui peut être exécuté par une machine.
- **La programmation** en informatique est l'ensemble des activités permettant l'écriture de programmes exécutables par une machine. « *La programmation représente usuellement le codage*[1] ».

## 2. L'algorithmique, un concept !

- L'**algorithme** comme *objet* : Complexité – Aspect constructiviste – Machine de Turing.

- **L'algorithme** comme ***outil*** : Au lycée, le travail sur des algorithmes est considéré comme une pratique donnant du sens à d'autres concepts (ex. *l'algorithme d'Euclide*, *l'« algorithme de dichotomie »*, ...). Un algorithme est alors pris pour sa conception. L'algorithme comme *outil* est situé aux niveaux des paradigmes algorithmiques I et II (cf. le cadre théorique).

# III. LE CADRE THEORIQUE

Notre cadre théorique tient compte de cadres généraux issus de la didactique des mathématiques et de la didactique de l'informatique, ainsi que de cadres liés à la modélisation. Il est basé sur la *dialectique outil-objet* (Douady, 1986), les *Espaces de Travail Mathématique* (Kuzniak, 2011). En outre, nous utilisons la description des *niveaux de compétences en modélisation* (Henning et Keune, 2007).
Sous une approche de modélisation, un algorithme peut être considéré, comme un artefact associé à une situation issue du monde du jeu (cf. *L'« algorithme de dichotomie »* comme stratégie *rapide* pour la détermination d'un nombre entier secret compris entre 0 et 1000). Dans le cadre d'un *Espace de Travail Mathématique* (ETM) qui, comme en géométrie, peut s'appliquer à un espace de travail spécifique qu'est l'algorithmique et que nous notons ETA, nous étudions les interactions entre les objets, les artefacts et les paradigmes lors d'une analyse de tâches, permettant ainsi d'aider à observer les positions respectives des élèves et de l'enseignant, sous l'influence des curricula. Nous proposons de structurer les ETA autour d'un réseau de composants : **(R1)** d'un ensemble d'objets, qui conformément aux corpus du programme, est constitué des instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie) et des notions de boucle et itérateur, ainsi que des instructions conditionnelles ; **(R2)** des

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Programmation_informatique

artefacts *programmables* que sont la calculatrice, les objets programmables, le langage naturel, le langage pseudo-code, le tableur, les langages algorithmiques et les logiciels de programmation ; **(R3)** un référentiel d'idées théoriques qui aident à créer et à justifier des algorithmes comme objets pour l'exécution par des artefacts programmables.
Les paradigmes algorithmiques, permettant d'interpréter le contenu des composants et de définir leurs fonctions, sont les suivants :

- <u>Niveau I :</u> une approche intuitive des algorithmes issue de situations de la vie réelle. A ce niveau, par exemple, l'efficacité de l'algorithme découle naturellement de sa description.
- <u>Niveau II :</u> une axiomatique « naturel » des algorithmes. L'efficacité et la complexité de l'algorithme utilisé sont questionnées. L'algorithme peut devenir un objet.
- <u>Niveau III :</u> une étude du traitement formel des algorithmes (ex. Machines de Turing).

Aux trois niveaux, comme en géométrie, les représentations des algorithmes impliquent des registres spécifiques (Duval, 2006) avec les conversions et les traitements liés à ces registres.

## IV. ELABORATION D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE AUTOUR DE L'« ALGORITHME DE DICHOTOMIE »

Selon les travaux d'Artigue (1992), notre ingénierie didactique va comprendre quatre phases **–** **(1)** une première phase constituée d'analyses préalables **–** **(2)** une deuxième phase, où le chercheur agit sur un certain nombre de *variables de commande* (de types macro-didactiques ou de types micro-didactiques) du système, non fixées par les contraintes de l'expérimentation **–** **(3)** une troisième phase, constituées des expérimentations en classe avec les élèves et leur enseignant afin d'élaborer un recueil de données éclairant l'objet de la recherche en cours – **(4)** une dernière phase constituée des analyses *a posteriori* et de l'évaluation de l'expérimentation.

| Les objectifs pédagogiques | Les objectifs didactiques |
|---|---|
| **Cas discret**<br>• Décrire un modèle permettant de simuler le jeu :<br>« *Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant :*<br>*- Le joueur A choisit « secrètement » et au hasard un nombre entier « secret » compris entre 1 et 1000.*<br>*- Le joueur B doit deviner ce nombre « secret » en faisant le minimum de propositions.*<br>*A chaque proposition du joueur B, le joueur A répond par « Le nombre cherché est plus grand », « Le nombre cherché est plus petit » ou « Bravo, tu as gagné » selon la position de la proposition par rapport au nombre « secret» à atteindre.* »<br>• Définir une stratégie *rapide* consistant à minimiser le nombre de coups pour trouver ce nombre entier secret.<br>• Elaborer un algorithme en langage naturel.<br>• Ecrire des algorithmes en langage pseudo-code.<br>• Travailler en binôme.<br>• Envisager la modélisation d'une stratégie *rapide* en utilisant des simulations.<br>• Définir une conjecture sur une stratégie *rapide* associée à la dichotomie.<br>**Cas continu**<br>Les élèves ont à leur disposition plusieurs algorithmes associés soit à des fonctions qui peuvent ne pas être continues en un ou plusieurs points, soit à des | • S'approprier un jeu de la part des élèves.<br>• Passer d'un algorithme écrit en langage naturel à l'organigramme.<br>• Travailler dans divers ETA : *LARP* (organigramme), *AlgoBox* (les algorithmes écrits dans un langage pseudo-code avec le logiciel *AlgoBox* nécessitent un codage proche du langage naturel),...<br>• Travailler sur divers ETM spécifiques : $\text{ETM}_{analyse}$ et ETA. Ainsi, *l'espace de travail mathématique peut être vu comme une mise en réseau des diverses fibres que constituent les* $ETM_d$ (Espaces de Travail spécifique associé à un domaine *d*). *La question se pose alors de savoir comment s'organisent la fibration* entre ces espaces. *Ces interactions entre les domaines sont essentielles pour comprendre le fonctionnement global du travail mathématique et elles forcent en outre la considération des processus de modélisation dans le cadre des ETM, au-delà des seules questions sémiotiques* (Kuzniak et Richard, 2014).<br>• Etudier les effets d'une genèse instrumentale sur l'élève et les pratiques enseignantes : artefacts programmables (ex. calculatrice), les objets programmables, le langage naturel, le langage pseudo-code, les langages algorithmiques, les logiciels algorithmiques, ... |

| | |
|---|---|
| fonctions continues sur un intervalle mais dont on ne connait pas la monotonie sur cet intervalle. | • Observer différents registres de représentations sémiotiques possibles.<br>• Etudier les niveaux de compétences de modélisation chez l'élève. |

Dans le cas continu, les élèves travaillent sans avoir la connaissance du Théorème des Valeurs Intermédiaires et de son corollaire.

## V. PERSPECTIVE D'UNE ETUDE DIDACTIQUE DES COMPETENCES DE MODELISATION CHEZ LES ELEVES LORS DE L'APPLICATION DE L'« ALGORITHME DE DICHOTOMIE » DANS LE CAS DISCRET

Dans une approche de modélisation, lors du jeu décrit précédemment, l'élève est confronté aux défis suivants :

- décrire les différentes étapes entre l'observation de la réalité et de la construction du modèle mathématique développé ;
- mettre en marche la simulation et écrire, en langage naturel, un (ou plusieurs) algorithme(s) du modèle obtenu, et de la simulation définie ;
- coder le (ou les) algorithme(s) obtenu(s) pour un usage en langage machine ;
- faire une (ou des) interprétation(s) pertinente(s) des résultats obtenus.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARTIGUE, M. (1992). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9-3, pp. 281-308

BOUVIER, A., GEORGE M., LE LIONNAIS F. (2009). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : PUF.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7 (2), pp. 5-31.

DUVAL, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, *Numero Especial*, pp. 45-81.

HENNING, H., KEUNE, M. (2007). Levels of Modelling Competencies. *Modelling and Application in Mathematical Education-The 14th ICMI Study*, pp 225-232. Berlin: Springer

KUZNIAK, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 16, pp. 9-24.

KUZNIAK, A. ET P.R. RICHARD (2014) Espace de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives.

LAVAL, D. (2013). Studying the teaching/learning of algorithms at upper secondary level: first steps. (Poster) - *Actes du Colloque CERME 8* - Antalya Turquie 2013.

LAVAL, D. (à paraître) L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – Espace de Travail Mathématique* (juillet 2014), Madrid, Espagne.

Dictionnaire *Encyclopédie Universalis*, tome 19.

# DUO D'ARTEFACTS VIRTUEL ET MATERIEL POUR APPRENDRE LES MATHEMATIQUES

Anne **VOLTOLINI**

EducTice, IFE, ENS Lyon Laboratoire S2HEP

anne.voltolini@ens-lyon.fr

**Résumé**

Notre projet de recherche questionne la plus-value de la technologie et la complémentarité des environnements sensible et numérique pour l'apprentissage des mathématiques à l'école et au collège, dans des situations mobilisant des duos d'artefacts virtuel et matériel, qui fonctionnent sur une articulation objets virtuels et objets matériels. La technologie peut-elle amener des fonctionnalités qui renvoient à l'outil matériel et réciproquement l'outil matériel peut-il enrichir l'outil virtuel ? Nous illustrerons ce propos à partir d'une situation géométrique sur l'utilisation du compas pour construire un triangle.

**Mots clés**

Environnement informatisé, Artefact virtuel, Artefact matériel, Genèse instrumentale

## INTRODUCTION

Notre projet de recherche a pour objectif de développer et d'évaluer des environnements informatiques pour l'apprentissage des mathématiques à l'école et au collège qui incluent d'une part une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur et d'autre part l'articulation entre le virtuel et l'utilisation d'outils matériels. Nous interrogeons l'apport sur les apprentissages de tels environnements informatisés articulés à l'utilisation d'outils matériels concrets. L'environnement numérique peut-il être une valeur ajoutée à l'outil matériel qui aide à franchir certaines difficultés ou certains obstacles épistémologiques ? L'élaboration de situations didactiques (Brousseau 1998) faisant intervenir des duos d'artefacts et l'orchestration (Trouche 2004) du recours aux artefacts matériels et virtuels qui permet de mettre en évidence le choix et la place des artefacts, leur mode d'exploitation et leur contribution à tous les niveaux de la situation représentent l'enjeu didactique principal de ce travail. Nous illustrons ce propos à partir d'une situation géométrique sur l'utilisation du compas pour construire un triangle.

## LA CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DU TRIANGLE ET L'UTILISATION DU COMPAS

La situation que nous proposons a pour objectif d'apprentissage la construction géométrique à la règle et au compas d'un triangle étant données les trois longueurs de ses côtés. Il s'agit dans un premier temps, d'amener l'usage du compas dans cette construction puis dans un deuxième temps, d'aboutir à la nécessité de tracer des cercles.

Plusieurs types de difficultés peuvent être mis en évidence quant à l'usage du compas dans la

construction d’un triangle de longueurs des côtés données. Le compas n’est pas l’outil qui permet de tracer le contour du triangle, l’écartement du compas ne rend pas visible le segment côté du triangle et le compas produit des arcs de cercle, leur intersection va définir le troisième sommet du triangle, objet géométrique de dimension 0. Ainsi cette construction géométrique repose sur une déconstruction dimensionnelle (Duval 2005) du triangle 2D au triangle déterminé par ses trois sommets de dimension 0. La déconstruction dimensionnelle des formes de Duval est un premier outil pour analyser ce que peut apporter la technologie au travail en géométrie. La technologie peut elle permettre de proposer un travail intermédiaire pour ne pas obliger la déconstruction dimensionnelle du triangle jusqu’aux points, objet géométrique de dimension 0 difficilement appréhendée par les élèves ?
De surcroît l’utilisation du compas dans cette construction génère des actions et de nouveaux schèmes (Vergnaud 1990) qui n’appartiennent pas aux schèmes déjà constitués d’utilisation du compas. Les genèses instrumentales (Rabardel 1995) du compas pour faire des cercles ou reporter des longueurs ne permettent pas aux élèves de l’utiliser pour construire un triangle. L’approche instrumentale proposée par Rabardel nous permet de prendre en compte, et d’examiner la relation entre l’usage des outils et la conceptualisation. Les manipulations et les choix de variables et de contraintes faits dans l’environnement informatisé permettent-ils l’émergence de schèmes dont le domaine de validité peut s’étendre à l’instrument tangible ?

## DEUX CAHIERS INFORMATISES ARTICULES A L’UTILISATION DU COMPAS

Cette situation est composée de deux cahiers informatisés articulés avec l’utilisation du compas matériel dans l’environnement papier crayon. Dans un premier temps, la manipulation de segments dans l’environnement numérique qui décompose le mouvement en translation d’une part et rotation d’autre part, amène l’usage du compas (figure1). Le mouvement de rotation tout seul, engendre le cercle comme trajectoire d’une extrémité du segment. Dans un deuxième temps, les cercles sous-jacents à la construction du triangle seront introduits grâce à des contraintes sur les outils de géométrie dynamique disponibles.

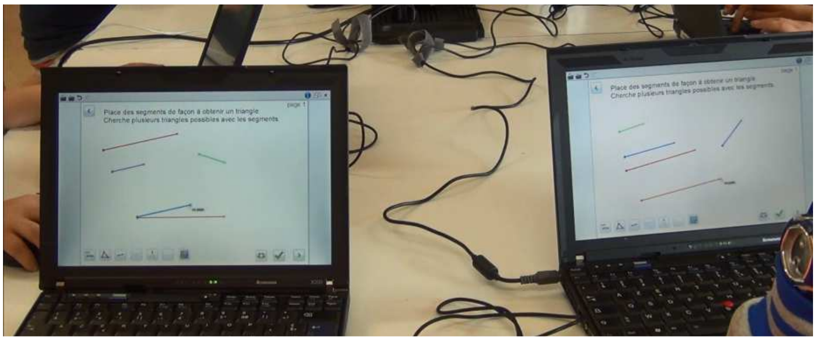


*Figure 1 : illustration de manipulations de segments à l’interface de l’ordinateur*

Une expérimentation avec 43 élèves de CM2 nous a permis de confirmer la plus value de la technologie :

- Les manipulations de segments numériques impose la dissociation des deux déplacements par translation ou par rotation et met en valeur la rotation.
- Ces manipulations permettent un contrôle sur le segment côté du triangle.
- La ligne brisée est une stratégie gagnante pour former un triangle dans l’environnement informatisée. Elle est une étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui peut être transportée dans l’environnement papier crayon (figure 2).

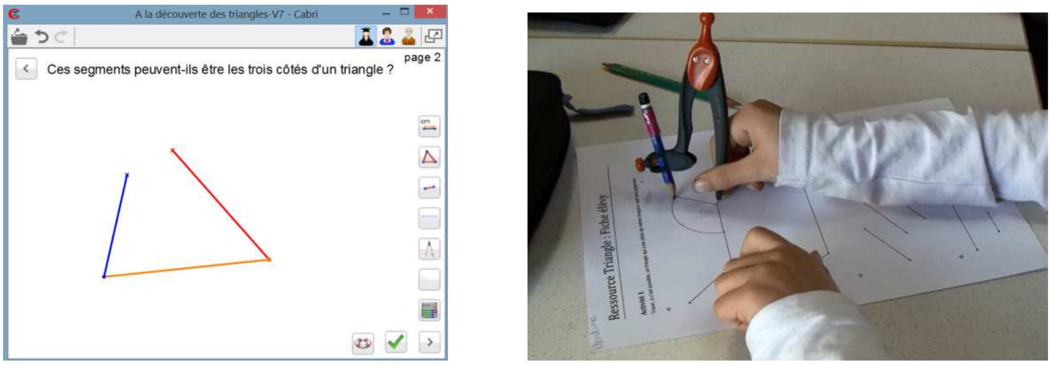



*Figure 2: la ligne brisée, une étape de la déconstruction dimensionnelle du triangle*

Au cours des manipulations des segments numériques le sujet construit des schèmes relatifs au déplacement par rotation du segment numérique. Ces schèmes peuvent être associés à des schèmes d'utilisation du compas matériel. Dans l'environnement papier crayon le compas est l'artefact matériel qui va « remplacer la rotation ». Le compas permet de « faire pivoter un segment », le segment étant « coincé » entre les deux branches du compas (figure 2).

## CONCLUSION

La technologie est un espace graphique augmenté par la manipulation directe et les rétroactions. Elle permet la mise en évidence de la ligne brisée formée des trois côtés du triangle ; déconstruction dimensionnelle intermédiaire du triangle. La technologie est ici une aide pour franchir les obstacles épistémologiques liés à la déconstruction dimensionnelle du triangle sans obliger à aller jusqu'aux points. De plus cette situation, et l'articulation segment numérique en mouvement et compas matériel, a permis l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment, qui participe à la genèse instrumentale du compas dans la tâche de construction du triangle. Ainsi la technologie articulée à un outil matériel est un gain didactique, une valeur ajoutée pour les apprentissages.
Notre but n'est pas de substituer l'environnement informatique à l'outil matériel dans les usages avec les élèves. C'est l'articulation et la complémentarité d'un duo d'artefacts virtuel et matériel qui nous semblent intéressantes et favorables aux apprentissages des élèves et que nous souhaitons questionner à nouveau dans d'autres situations.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, ed. La Pensée.Sauvage.
DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* vol 10. p 5 à 53.
RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
TROUCHE L. (2004) Managing the complexity of human machine intercations in computerized learning environments : guiding students' command process through instrumental orchestration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9*. P 281-307.
VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques* vol 10 (2-3) p 133-170.

## TITRE

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2014

## AUTEURS

Anne-Cécile Mathé

Éric Mounier

## RESUME

Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Les actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM de l'année 2014 regroupent les sessions de janvier, mars et novembre 2014.

Première session « itinérante » du séminaire national de l'ARDM, la session de janvier 2014 s'est tenue à l'université de Bordeaux 2. L'organisation a été soutenue par le laboratoire LACES de l'Université de Bordeaux 2 et l'ESPE de l'académie de Bordeaux, avec le partenariat du laboratoire LDAR et de l'IREM de Paris Diderot et l'aide de Caroline Bulf et Lalina Coulange.

Les sessions de mars et novembre se sont déroulées à Paris dans les locaux de l'université Paris Diderot, avec l'aide du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR-EA 4434, UPD, UPEC, UCP, U Rouen, U Artois) et de l'IREM de Paris Diderot.

## MOTS CLES

Didactique des mathématiques

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Fabrice Vandebrouck – Reprographie Nadine Locufier
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2015 – ISBN : 978-2-86612-361-1